利用圆锥面方程设计和制作二次曲线规

张舒蕾 / 上海市梅陇中学
指导教师　翁方波　陈　新

◉ 研究背景

老师在上数学课时讲到了反比例函数，要求我们根据函数关系式绘制反比例函数图像——双曲线，并教给我们一种绘制方法——描点法。在完成作业的过程中，我觉得这种方法太繁琐，而且手绘的曲线也很难看。帮妈妈切黄瓜的时候，我发现随着刀与黄瓜之间的角度不同，黄瓜片的形状会发生变化：垂直切下去是一个圆片，随着刀与黄瓜之间倾斜的角度越来越大，黄瓜片渐渐变成越来越瘦长的椭圆，到了黄瓜末端竟然切出轮廓类似双曲线或抛物线的黄瓜片。看到这样的变化，我一时无法了解，这是为什么呢？

我将这个现象告诉了辅导老师。老师用了很长时间为我仔细讲解了立体圆锥面与平面相交后，随着相交角度变化会产生圆、椭圆、抛物线和双曲线的数学知识。在老师的启发下，我将平面想象成要绘图的纸，将圆锥面想象成一种圆规在转动，这样“圆规”与“纸”在不同角度时，就能“画”出不同的曲线了。那么，用什么方法能做出这样的“圆规”呢？

◉ 设计思路与数学模型

➲ 设计思路

在辅导老师的指导下，我用在科技兴趣课上学到的机械制图和设计知识、弹簧原理及电视里看到的阿拉伯弯刀结构，设计和制作了一种绘笔，能在弹簧作用下自动伸缩，也可绕中心立杆旋转、中心立杆可变角度的“倾斜式圆规”——利用圆锥面方程设计和制作的二次曲线规（以下简称曲线规），设计构想如图 1 所示。

用曲线规作图时，只要知道所绘圆的半径 R、椭圆的半长短轴 A 与 B、抛物线的焦点半径 $P/2$ 和双曲线的半虚长短虚轴 A 与 B 的值，计算出相应的 $\tan\alpha$ 和 $\tan\theta$ 值，通过滑动比例尺的使用，确定中心立杆与滑动立杆之间的夹角（$90^\circ-\alpha$），伸缩绘笔与滑动立杆之间的夹角 θ，以及图形中心原点偏移量 x_0，再旋转旋钮带动伸缩绘笔，就可按需要准确地绘出圆、椭圆、抛物线或双曲线图形（除抛物线外，该曲线规一次只能完成半个图形，须将该曲线规翻转 180°，按原点偏移量 x_0 修正中心位置，再画一次就可得到完整图形），最后用直尺按照修正的参数，绘出直角坐标和长度值，即可完成作图。

2．数学模型

由数学手册，可得圆锥面方程如下：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

式中，a 为圆锥底圆半径，c 为圆锥的高。按数学手册提供的方法，旋转底圆所在平面可导出该圆锥面在新坐标系中 xOy 平面的轨迹如下：

$$y^2+x^2\cdot\frac{\left(\tan^2\alpha-\tan^2\theta\right)}{1+\tan^2\alpha}+x\cdot\frac{2\tan^2\theta}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}-\tan^2\theta=0$$

式中 α 是圆锥底面旋转的角度，θ 是圆锥的顶角。

在上面的方程式中，决定 xOy 平面轨迹的主要变量是角度 α 和角度 θ。因此，只要确定 α 和 θ，就可确定曲线规绘制的曲线类型及有关参数。

◉ 结构设计与制作

本课题的装置由框架式直尺、可移动比例尺、量角器式圆形轨道、可定位滑车、以及有伸缩笔杆的圆规等零部件组成。

◈ 框架式直尺——一个有垂直和水平长度标记的框架式结构，具有直尺的功能。

◈ 可移动比例尺——一个安装在框架式直尺上的、有垂直和水平方向直尺功能、带滑动槽、可旋转移动的“T”形结构，主要用于测算所画曲线对应的曲线规的倾角和夹角（即 $\tan\alpha$ 和 $\tan\theta$ 对应的角度值）。

◈ 量角器式圆形轨道——一个与框架式直尺相连、略大于 1/4 圆、有 0°～90° 的刻度指示、可作量角器使用的圆弧形轨道结构，可方便滑车的滑动，如图 2 所示。

◈ 可定位滑车——一个与量角器式圆形轨道配套的、可滑动的结构，它

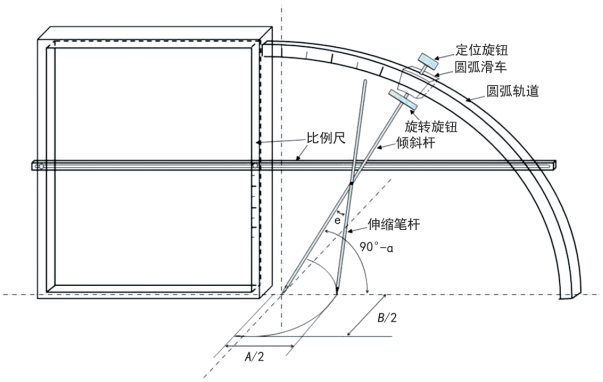


图 1　设计构想

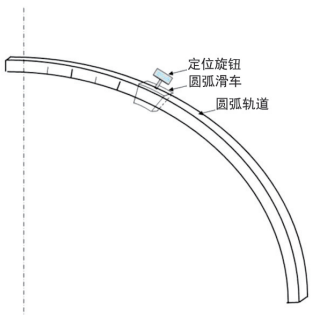


图 2　量角器式圆形轨道

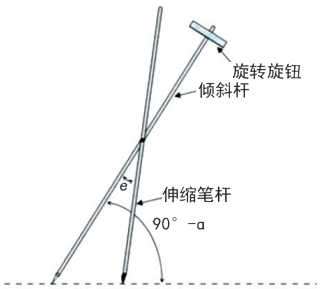


图 3　改进后的回转工作台心轴结构性能分析

有滑车定位固定旋钮，以及连接伸缩笔杆圆规的装置。

◈ 有伸缩笔杆的圆规——一个将普通圆规的画笔杆改装成有“弹性”和滑槽的伸缩笔杆、定位立杆的两头分别通过连接装置与框架式直尺底部和可定位滑车相连的结构。圆规的倾角可通过滑车的移动确定，见图 3。

◉ 操作说明

本曲线规在使用时，需要按一定步骤进行操作。下面以画椭圆为例介绍。

◈ 将装置垂直置于纸面上、比例尺的水平直尺垂直移动到纸面，并将其 0 距离标记与圆规倾斜立杆的底部对齐（装置原点）；

◈ 假定圆规倾斜立杆与伸缩笔杆的交叉点到纸面的垂直距离为一个单位（比例尺的垂直直尺），拉动伸缩笔杆，将其笔尖移动到至比例尺的水平直尺上对应的距离——$\tan\theta$，即确定了圆规的夹角；

◈ 上移比例尺，使水平直尺至圆规倾斜立杆与伸缩笔杆的交叉点重合，移动滑车至圆规倾斜立杆与水平直尺的交点对应距离——$\tan\alpha$，并固定滑车；

◈ 此时，移去比例尺的水平直尺，转动圆规的旋转，带动笔杆即可画出所需椭圆（图 3）。

◉ 总结

本课题的装置是一种结构合理、使用方便的装置，既可以用作学生的多功能文具，方便学生直观地理解二次曲线的图像特征和统一性，也可用作教师上课时使用的一种直观、使用方便且电脑虚拟演示系统无法替代的实物教具。

本项目的主要特点是：突破了普通圆规的习惯用法——垂直旋转，将其改变成可倾斜旋转的模式；通过简单计算，将圆、椭圆、双曲线、抛物线等二次曲线的参数，用比例尺转换成该曲线规的笔杆角度和曲线规的倾角，即可方便地画出对应的曲线；它是一种多功能装置，并解决了类似工具使用中经常存在的偏心问题。

该项目获得第 27 届全国青少年科技创新大赛创新成果竞赛项目中学组工程学一等奖。

专家评语

该项目利用简单的材料，在等位推导的基础上，制作出可以绘制椭圆、抛物线、双曲线的曲线规，这个项目来源于学生生活的实际，样机制作简单，演示效果良好，由于构思巧妙，制作符合学生特点，学生参与度可信。■