



全民科学素质行动
科学教育专栏

[数学杂谈]

印度奇妙数组

文_吴朝阳

吴朝阳，数学博士，历史学博士，计算机科学硕士，
目前任教于南京大学。



前几期中我们所谈的趣味数学话题都是古人的旧事，行文又不够生动活泼，我们担心这会削弱一部分读者的兴趣。因此，尽管那些话题还没有谈完，还需要后续的文章继续来谈，我们还是想转换方向，聊一聊看起来完全两样的话题。关于需要继续深入的话题，我们打算以后再说。这样，这个栏目的文章将会经常在不同的话题间跳转，我们希望这样的安排能照顾兴趣点不同的读者。

今天，我们来聊一聊所谓的“印度奇妙数组”。关于这种数组，我第1次知道是在2007年5月，当时北京市陈经纶中学的徐锦添同学指出了以下奇妙的事实。

(1) 关于 86 ~ 90 这 5 个连续的 2 位数的奇妙事实

$$86^2=7396, 73+96=169, 169=13^2$$

$$87^2=7569, 75+69=144, 144=12^2$$

$$88^2=7744, 77+44=121, 121=11^2$$

$$89^2=7921, 79+21=100, 100=10^2$$

$$90^2=8100, 81+00=081, 081=09^2$$

(2) 关于 956 ~ 968 这 13 个连续的 3 位数的奇妙事实

$$956^2=913936, 913+936=1849, 1849=43^2$$

$$957^2=915849, 915+849=1764, 1764=42^2$$

$$958^2=917764, 917+764=1681, 1681=41^2$$

$$959^2=919681, 919+681=1600, 1600=40^2$$

.....

$$968^2=937024, 937+024=0961, 0961=31^2$$

以上 2 组连续正整数，它们的平方数“对折”之后相加，所得的结果仍然是完全平方数。这，当然是非常非常神奇的。

据说以上的第 2 组数是印度人发现的，后来它相对经常地被称为“印度奇妙数组”。徐同学利用计算机编程，给出了 4 位数、5 位数等多位数的同样奇妙的连续数字串，并且根据计算给出了这类印度奇妙数组起讫数的估计公式，但是没有对他估计的公式给出证明。

我读到徐同学的估计公式后很快给出了一个证明，并且在当年 6 月即公布

公差为 100 的 4 位数广义印度奇妙数组有 2 个，这是其一				
编号	X	X 平方	X 平方对折和 = Y 平方	Y
1	7598	57729604	5772+9604=15376=124 ²	124
2	7698	59259204	5925+9204=15129=123 ²	123
3	7798	60808804	6080+8804=14884=122 ²	122
.....				
25	9998	99960004	9996+0004=10000=100 ²	100

公差为 300 的 4 位数广义印度奇妙数组有 2 个，这是其一				
编号	X	X 平方	X 平方对折和 = Y 平方	Y
1	1167	01361889	0136+1889=2025=45 ²	45
2	1467	02152089	0215+2089=2304=48 ²	48
3	1767	03122289	0312+2289=2601=51 ²	51
.....				
30	9867	97357689	9735+7689=17424=132 ²	132

公差为 3 的 4 位数广义印度奇妙数组有 4 个，这是其一				
编号	X	X 平方	X 平方对折和 = Y 平方	Y
1	3228	10419984	1041+9984=11025=105 ²	105
2	3231	10439361	1043+9361=10404=102 ²	102
3	3234	10458756	1045+8756=9801=99 ²	99
4	3237	10478169	1047+8169=9216=96 ²	96
5	3240	10497600	1049+7600=8649=93 ²	93
.....				
25	3300	10890000	1089+0000=1089=33 ²	33

于南京大学的小百合。很让人高兴的是，这个证明不仅有趣，而且可以让我们学到一些思考问题的方法。下面，我们就来说一说这个证明——我们把印度奇妙数组中的数称为“奇妙数”。

问题：假设

$$(01) \ x > 10^{n-1} \text{ 且 } x < 10^n,$$

$$(02) \ x^2 > 10^n, \text{ 即 } x > \sqrt{10^n},$$

$$(03) \ x^2 = 10^n K + L, \text{ 其中 } K, L \text{ 为非负整数, 且 } 0 < K < 10^n, 0 \leq L < 10^n,$$

$$(04) \text{ 存在正整数 } y, \text{ 使得 } y^2 = K + L,$$

$$(05) \ x + y = 10^n - 1.$$

问题是： x 是什么数？

以上假设中，(01)是说 x 为 n 位数，(03)是说 K 和 L 就是把 x^2 “对折”所得的2个数，(04)是说“对折”所得的2数之和是完全平方数。很容易证明：在 $n > 2$ 时，

(02)式在(01)成立时自动成立。显然，奇妙数就是满足这4条假设的自然数。以上的假设(05)是我们添加的，添加这条假设的原因之一是上述奇妙数都满足这个假设。这条额外添加的假设，是我们可以得到以下解答的关键。

解答：据(05)，我们有：

$$y^2 = (10^n - 1 - x)^2 = (10^n - 1)^2 - 2(10^n - 1)x + x^2.$$

据(04)、(03)及上式，则有：

$$\begin{aligned} K + L &= (10^n - 1)^2 - 2(10^n - 1)x + x^2 \\ &= (10^n - 1)^2 - 2(10^n - 1)x + 10^n K + L. \end{aligned}$$

移项、整理，容易得到：

$$(06) \ K = 2x - (10^n - 1).$$

为方便以下讨论，取实数 r 使得

$$(07) \ x = 10^n - r\sqrt{10^n}.$$

显然 r 未必是有理数，更未必是自然数，但由(01)我们得到：

$$(08) \ r\sqrt{10^n} \text{ 是自然数.}$$

用 $\text{floor}(x)$ 表示不超过 x 的最大整数，则据(03)式，我们有：

$$(09) \ K = \text{floor}(x^2 / 10^n).$$

也即是说， K 是 x^2 除以 10^n 所得的整数部分。

由(07)式，我们得到：

$$x^2 / 10^n = 10^n - 2r\sqrt{10^n} + r^2.$$

根据(08)式，则有：

$$(10) \ \text{floor}(x^2 / 10^n) = 10^n - 2r\sqrt{10^n} + \text{floor}(r^2).$$

因此，再由(06)和(07)式，我们得：

$$K = 2(10^n - r\sqrt{10^n}) - (10^n - 1),$$

即：

$$(11) \ K = 10^n + 1 - 2r\sqrt{10^n}.$$

综合(09)、(10)、(11)式，不难发现：

$$(12) \ \text{floor}(r^2) = 1.$$

也就是说， r 虽然未必是有理数，但是 r^2 的整数部分必定等于1。

从以上推演中我们可以发现：由(07)式表示的满足(01) — (05)的充分必要条件是(12)。也就是说，只要 r 满足 $\sqrt{2} > r \geq 1$ ，则(07)式表示的 x 就是奇妙数。因此，问题的解答是：

$$10^n - \sqrt{2 \cdot 10^n} < x \leq 10^n - \sqrt{10^n}.$$

也就是说，满足以上这个公式的自然数都是奇妙数。这，就证明了徐同学的公式。

以上公式中的 $\sqrt{2 \cdot 10^n}$ 是一个无理数， $\sqrt{10^n}$ 在 n 为奇数时是无理数而在 n 为偶数时是自然数，但无论如何，这个公式给出了 n 位数中印度奇妙数组的起讫数。也就是说，

上述 n 位连续奇妙数的第1个数是 $10^n - \text{floor}(\sqrt{2 \cdot 10^n})$ ；最后1个数当 n 为奇数时等于 $10^n - \text{floor}(\sqrt{10^n}) - 1$ ，当 n 为偶数时则是 $10^n - \sqrt{10^n}$ 。如果我们用 $\text{ceiling}(x)$ 表示不小于 x 的最小整数，则这些 n 位印度奇妙数组的最后那个数可以表示为 $10^n - \text{ceiling}(\sqrt{10^n})$ 。这样，这种 n 位印度奇妙数组的长度就等于 $\text{floor}(\sqrt{2 \cdot 10^n}) - \text{ceiling}(\sqrt{10^n}) + 1$ 。

如果以4位数为例，则 $\text{floor}(\sqrt{2 \cdot 10^4}) = 141$ ， $\text{ceiling}(\sqrt{10^4}) = 100$ ，因此这类4位的印度奇妙数组开始于 $10000 - 141 = 9859$ ，而最后1个数则是 9900 。整个串的长度为 $141 - 100 + 1 = 42$ 。

我们以上问题中的假设(05)是根据本篇开头的印度奇妙数组的性质而添加的，因此满足这条假设的奇妙数符合以上公式。但是，不满足假设(05)而满足假设(01) — (04)的奇妙数是存在的，它们有些是零星的，有些形成很短的连续串。典型的短串是由2个奇妙数组成的，不妨称之为“孪生奇妙数”。最小的一组孪生奇妙数是49和50。

$$49^2 = 2401, 24 + 01 = 25$$

$$50^2 = 2500, 25 + 00 = 25$$

容易证明，对所有正整数 k ， $5 \times 10^{2k-1} - 1$ 和 $5 \times 10^{2k-1}$ 构成一组孪生奇妙数，49和50是这种孪生奇妙数中最小的一对。那么，此外还有没有孪生奇妙数或者其他形式的“短串”？零星奇妙数的出现有没有什么规律？这些问题没有简单的答案，但是有一点可以肯定：不满足假设(05)的奇妙数组都非常短。

很显然，印度奇妙数组可以看成是公差等于1并且满足“平方对折之和为平方数”性质的有限等差数列。我们最后在此指出：假如将公差大于1的且常“平方对折之和为平方数”性质的有限等差数列称为“广义印度奇妙数组”，我们将找到公差为3、9、11、100等很多有趣的数串——其中几个可见本文插图。■