



全民科学素质行动
科学教育专栏

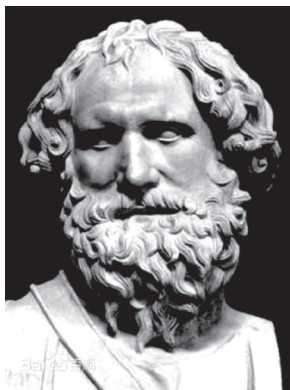
[数学杂谈]

球体积公式的经典证明

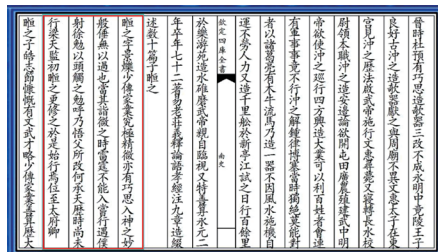
文_吴朝阳



吴朝阳，数学博士，历史学博士，计算机科学硕士，
目前任教于南京大学。



阿基米德（约前 287—约前 212）

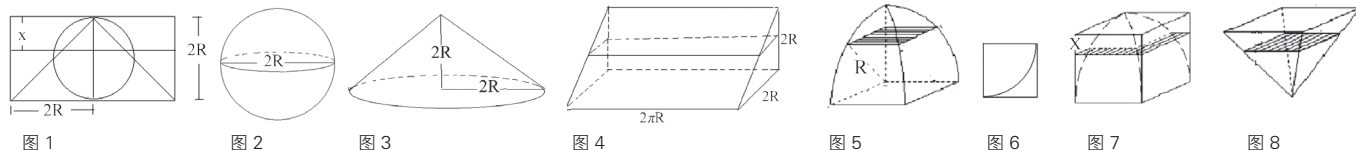


《南史·祖暅之传》

将我国的战国时期与古希腊作比较研究是一件很有意义的事，那个时期的中西方在很多方面是很相像的。以古代哲学为例，古希腊哲学中有“四元素说”，认为天下万物由水、火、土、气四大基本元素构成。在中国，八卦中的四个正卦是天、地、水、火，恰好与四元素相对应。对古希腊哲学的进一步考察可以发现，这一派哲学思想与阴阳八卦说其实颇为相似。古代数学的中西方比较则更加有趣，与《墨子》、《九章算术》等传世文献相参证，近些年重见天日的岳麓书院藏秦简《数》、张家山汉简《算数书》等秦至汉初的竹简数学书证明：战国时期我国的数学与古希腊数学在知识范围、证明方式及具体结果方面，都几乎完全一致。大体上说，双方都以整数的比例为主要代数工具，以割补法为几何证明的主要手法，得到了关于自然数及分数的主要古典成果，三角形及圆的主要公式，以及关于锥、柱、台的体积公式。

更有意思的是，中西方的不足之处也一样：在欧几里得所处的时代，双方都没有办法得到球的体积公式，也没有能够求得圆周率的高精度近似值。也正是由于这个原因，推求球体的体积公式与求圆周率的高精度近似值一样，成为此后数百年里中西方古代数学领域的重要问题。

在确立球体积公式方面，中西方都做出了很有意思的工作。西方的球体积公式由阿基米德于公元前 200 余年率先得到，而据唐初李淳风的记述，祖冲之的儿子祖暅之（后文依学界习惯称为祖暅）用刘徽提出的方法第 1 个推导出了正确的球体积公式。这个问题的解决，虽然中国比西方迟了六七百年，但中西方 2 个证明都非常非常精彩。因此，我们将在下文具体介绍这 2 个证明。需要在这里说明



的是，阿基米德原本用“物理”的方式来阐述他的证明，我们改用意思等价的“数学”方式来表述。

◎ 阿基米德证明球体积公式的做法

如上诸图所示意，我们解释阿基米德的想法如下。

以 $2R$ 为底半径及高作圆锥，以 R 为半径作球，以旋转体视之，旋转之前的截面如图 1 所示，二旋转体如图 2、图 3 所示。在距离锥顶 X 处，锥被截出的圆面积为： πX^2 。据勾股定理，知在此高度处球被截出的圆面积为：

$$\pi[R^2 - (R - X)^2] = \pi(2RX - X^2)。$$

因此，锥的截面积加上球的截面积为：

$$\pi X^2 + \pi(2RX - X^2) = 2\pi RX。$$

由图 4 可知，上述这个数值恰好等于图中横卧的三棱柱在距离顶棱 X 处的截面积。因此，我们有：

（锥体积 + 球体积）= 图 4 中立体的体积。

即：

$$（锥体积 + 球体积）= 4\pi R^3。$$

由于锥的体积已知为 $\frac{1}{3}\pi(2R)^3$ ，所以半径为 R 的球体积为以上二者之差，即：

$$球体积 = 4\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi(2R)^3 = \frac{4}{3}\pi R^3。$$

◎ 祖暅的证明

以 R 为半径，高为 $2R$ 的二圆柱垂直相交，截出立体的表面像是向上与向下 2 个“四棱瓜皮帽”合在一起的几何形状。不难证明，这个几何形状的表面之内恰好可以容下一个内切的半径为 R 的球体。正因为恰好与同半径球体内切，这个形似正、倒 2 个“方盖”相合的立体被刘徽称为“合盖”。在任何高度作水平截面，合盖的截痕为一个边长等于 $2\sqrt{2RX - X^2}$ 的正方形，而内切球的截痕则为这个正方形的内切圆。

依对称性，考虑此合盖的八分之一，为方便计我们临时称之为“卦方盖”，如下图 5。

在距离顶点 X 处作截面，则依勾股定理知截卦方盖所得为边长等于 $\sqrt{2RX - X^2}$ 的正方形，截内切球体得到此正方形之内切圆的四分之一（如上图 6）。据此，刘徽在《九章算术》的注文中指出，因为所有截面都是如此，而圆与正方形的面积比为 $\pi : 4$ 。因此，八分之一球体与卦方盖的体积比，与球体积与整个方盖的体积比相同，同样也等于 $\pi : 4$ 。

如图 7 所示，卦方盖外接正方体的边长为 R ，其截面与卦方盖截面积之差是一个“曲尺形”，由于卦方盖截面是边长等于 $\sqrt{2RX - X^2}$ 的正方形，故这个曲尺形的面积等于：

$$R^2 - (2RX - X^2) = (R - X)^2，$$

即等于以 $(R - X)$ 为边长的正方形面积。据此，祖暅得出结论：卦方盖体积与其外接正方体体积之差，等于 1 个以 R 为底边，高为 R 的倒置正四棱锥的体积（如图 8）。

由于锥体体积为同底同高柱体体积的三分之一，因此，

卦方盖体积等于其外接正方体体积之三分之二，即 $\frac{2}{3}R^3$ 。

如前所说，八分之一球与卦方盖的体积比为 $\pi : 4$ ，因此整个球的体积等于 8 乘以 $\pi : 4$ 再乘以卦方盖的体积，即

$$球体积 = 8 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} R^3。$$

◎ 简短的评述

事实上，在正确的球体体积公式出现之前，我国曾出现错误的公式——大约在战国后期至西汉初年，我国的数学书中记载了球体积公式，这个最早的公式是：

$$球体积 \approx \frac{9}{16} \cdot 球直径立方 \approx \frac{9}{2} \cdot R^3。$$

但是，这个公式是由错误的理论推导出来的错误结果。

据记载，这个公式具体的推导过程是：“因为正方形与内切圆的面积比为 $4/3$ ，而球横竖都是圆形的，所以正方体与内切球的体积比为 $4/3$ 的平方，因而球体积等于以其直径为边长之正方体体积的 $9/16$ 。”

东汉的张衡认为这个原始公式是错误的，因此他应用阴阳五行、天圆地方等古代哲学，推导出球体积等于以其直径为边长之正方体体积的 $5/8$ 。刘徽明确提出“幂势既同，则积不容异”的原理，指出 $4/3$ 这一比值应该明确修正为 $4 : \pi$ 。更重要的是，刘徽构造合盖，并应用合盖证明原始公式的推导错误，为祖暅后来的证明提供了思路。此外，刘徽还证明张衡所推导出的公式实际上比原始公式的误差更大，并对张衡不顾事实、一味迷信哲学的伪科学方法进行了严肃的批评。

从以上我们可以看到，阿基米德的证明，以及我国那个错误的推导，都已经事实上应用了所谓的“祖暅原理”。阿基米德原始的“物理”证明只是含蓄地包含这个原理，并没有对该原理的明确表达；而我国那个错误的推导则出自刘徽的阐释，其本来是否应用此原理并没有切实的证据。与之不同地，《九章算术》清楚地表明，刘徽明确提出了比所谓“祖暅原理”更一般化的原理。正因为这个原因，现在有些数学史专家认为，“祖暅原理”应该改称为“刘徽原理”或“刘祖原理”。然而，无论这个原理如何命名，我们都很有理由认为：无论在古代中国或者古希腊，它都很早就被认为是正确的了。■