



全民科学素质行动
科学教育专栏

[数学杂谈]

逼近 $\sqrt{3}$ 的数列与丢番图方程

文_吴朝阳

吴朝阳，数学博士，历史学博士，计算机科学硕士，
目前任教于南京大学。



图1 17世纪出版的丢番图著作《算术》的扉页



图2 据传是丢番图的画像

在上期的短文中，我们介绍了开平方的近似公式。为了得到接近 $\sqrt{3}$ 的分数，短文中提出了寻找平方数之间的“近似3倍关系”的问题。换句话说，就是要寻找方程 $x^2-3y^2=k$ 的正整数解，其中， k 是1个小的整数。显然，如果 k 的值小而 x 、 y 的值大，则上期短文中所得的分数就非常接近 $\sqrt{3}$ 。因此，这回我们考虑 $k=\pm 1, \pm 2$ 的情形，求如下诸方程的整数解：

- (1) $x^2-3y^2=1$,
- (2) $x^2-3y^2=-1$,
- (3) $x^2-3y^2=2$,
- (4) $x^2-3y^2=-2$ 。

以上诸问题都是二次不定方程的整数解问题，这类问题的历史至少可以追溯到古希腊著名的数学家丢番图。丢番图是亚历山大时期最伟大的数学家之一，他的生年数学史家们的估计各不相同，但都在公元220年前后10年之间——可以说，丢番图与刘徽基本上是同时代人。在其伟大的著作《算术》中，丢番图研究了很多不定方程的整数解问题，因而数学界所谓的“丢番图方程”，一般就指多元不定方程的整数解问题。上述4个方程都是典型的丢番图方程，而我们下文所说的“解”也都指“(正)整数解”。

问题是，这4个方程并不全都有解，其中的(2)和(3)都没有解——证明的关键是考虑平方数除以4或者除以8的余数，我们讨论如下。

假设 (x, y) 是方程(2)的一组解。如果 x 是奇数 $(2m+1)$ ，则 y 必须是偶数。此时， $x^2=4m(m+1)+1$ ，故 x^2 除以4的余数等于1。然而 $3y^2$ 是4的倍数，所以 x^2-3y^2 除以4的余数也是1，因此它不可能与-1相等。这就是说，如果方程(2)有解，则其 x 不能是奇数。而如果 x 是偶数，则很显然相应的 y 必须是奇数。这时， y^2 除以4的余数是1， $3y^2$ 除以4的余数是3，因而 x^2-3y^2 除以4的余数是1，也不可能与-1相等。综合两种情况的讨论，可知方程(2)没有解。

相似地，若 (x, y) 是方程(3)的解，则首先 x 不可能为偶数，否则 x^2-3y^2 在 y 为偶数时是4的倍数，在 y 为奇数时为奇数，两种情况都不可能等于2。而若 x 是奇数 $(2m+1)$ ，则由于方程右侧是偶数， y 也必须是奇数。由 $x^2=4m(m+1)+1$ ，无论 m 是奇或是偶， $m(m+1)$ 都是偶数，因此 x^2 除以8的余数是1。同理，

y^2 除以 8 的余数也是 1。这样, x^2-3y^2 除以 8 的余数是 6, 所以也不可能等于 2。可见, 方程 (3) 同样无解。

与方程 (2) 和 (3) 不同, 方程 (1) 和 (4) 都有无穷多组解。显然, (1) 的最小 (正整数) 解组是 (2, 1), 而 (4) 的最小 (正整数) 解组则是 (1, 1)。现在的问题是: 我们怎样能找到这两个方程的所有解。为了解决这个问题, 我们先来介绍一个古印度恒等式, 它的名字叫做“婆罗门笈多恒等式”。

引理 1: 对任意 a, b, c, d , 成立恒等式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 \\ = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2。$$

上述婆罗门笈多恒等式的证明是很简单的, 将等式左右各自展开就可以了。但是, 这个恒等式相当有趣, 因为它指出: 两个可以表示为两数平方和的数之乘积也可以表示为两数平方和, 而且表示方式至少有两种。不仅如此, 这个恒等式还有以下也称为婆罗门笈多恒等式的推广形式。

引理 2: 对任意 N 及 x_1, y_1, x_2, y_2 , 成立恒等式

$$(x_1^2 - Ny_1^2)(x_2^2 - Ny_2^2) = (x_1x_2 + Ny_1y_2)^2 - N(x_1y_2 + x_2y_1)^2 \\ = (x_1x_2 - Ny_1y_2)^2 - N(x_1y_2 - x_2y_1)^2。$$

由于 (2, 1) 是方程 (1) 的一个解, 即满足 $(2^2-3 \cdot 1^2)=1$ 。因此, 对任何一组 (x, y) , 以 (2, 1) 为 (x_2, y_2) , 则由以上引理可得:

$$(x^2-3y^2) = (2x+3y)^2 - 3(x+2y)^2 \\ = (2x-3y)^2 - 3(2y-x)^2。$$

也就是说, 我们有如下定理。

定理 1: 如果 (x, y) 是方程 (1) 的一组解, 则 $(2x+3y, x+2y)$, 及 $(|2x-3y|, |2y-x|)$ 也是方程 (1) 的解。显而易见, 这对方程 (4) 同样成立。

记 $(x_1, y_1) = (2, 1)$, 令 $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (2x_n+3y_n, x_n+2y_n)$, 则我们得到一个数对序列 $\{(x_n, y_n)\}$ 。据定理 1, 序列中的每一个数对都是方程 (1) 的解, 我们因此得到方程 (1) 的无穷多组解。其中, 最小的前 6 组解如表 1。

那么, 序列 $\{(x_n, y_n)\}$ 是不是包含方程 (1) 的所有解组? 答案是: YES! 方程 (1) 的所有解组确实都包含在序列里, 应用定理 1 不难证明这个结论。

表 1 $x^2-3y^2=1$ 的前 6 组解

x	y
2	1
7	4
26	15
97	56
362	209
1351	780

假设 (x, y) 是方程的一组异于 (2, 1) 的解, 则 $x^2=3y^2+1 < 4y^2$, 即 $x < 2y$, $2y-x > 0$ 。而由 $4x^2=4(3y^2+1) > 9y^2$, 知 $2x > 3y$, 故有 $2x-3y > 0$ 。因此, 只要 (x, y) 不是 (2, 1), 则 $(u, v) = (2x-3y, 2y-x)$ 也是方程

(1) 的一组解。然而, 简单计算可知, $(2u+3v, u+2v) = (2 \cdot (2x-3y) + 3 \cdot (2y-x), (2x-3y) + 2 \cdot (2y-x)) = (x, y)$ 。这等于说, 如果 (u, v) 包含在序列 $\{(x_n, y_n)\}$ 中, 则 (x, y) 亦然。

以上推导表明, (x, y) 至少是 (u, v) 的 2 倍大。因此, 从解 (x, y) 出发, 我们可以应用 $(u, v) = (2x-3y, 2y-x)$, 至少逐次减半地得到更小的解。容易验算, 在 (2, 1) 与 (7, 4) 之间不存在方程 (1) 的解组。因而, 经过有限步之后, 从解 (x, y) 出发逐次得到更小的解的过程, 必然得到 (2, 1) 这个最小解组。由于 (2, 1) 包含在序列 $\{(x_n, y_n)\}$ 中, 所以这个过程每一组解也都包含在序列 $\{(x_n, y_n)\}$ 中, 因而 (x, y) 同样也是该序列的一员。这就是说, 序列 $\{(x_n, y_n)\}$ 包含方程 (1) 的所有解组。

同理, 从 $(x_1, y_1) = (1, 1)$ 出发, 令 $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (2x_n+3y_n, x_n+2y_n)$, 我们将得到方程 (4) 的所有解组, 其前 6 组解见表 2。

在上期短文中, 我们说阿基米德有可能从 $3 \cdot 15^2 = 26^2 - 1$ 出发,

$$\text{得到 } \frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}。$$

我们发现: 相应的 3 个数对中, (26, 15) 与

(1351, 780) 在以上表 1

中出现, 而 (265, 153) 则出现在表 2 中! 很有趣, 是不是? 事实上, 这一有趣现象并不是偶然出现的。从方程 (1) 的一组解出发 (x_n, y_n) , 用上期短文中开平方近似公式的后一式所得到的结果近似分数是 $\frac{1}{y_n} \left(x_n - \frac{1}{2x_n} \right)$, 此即 $\frac{2x_n^2-1}{2x_n y_n}$ 。应用等式 $x_n^2-3y_n^2=1$, 我们不难算得: $(2x_n^2-1)^2-3(2x_n y_n)^2=1$ 。这就证明, 其所对应的数组 $(2x_n^2-1, 2x_n y_n)$ 恰好也是方程 (1) 的解!

显然, 对方程 (1) 与方程 (4) 的每一个解组 (x_n, y_n) , 相应的分数 $\frac{x_n}{y_n}$ 都是 $\sqrt{3}$ 近似, n 越大则二者的值越接近。此可见, 这种类型的丢番图方程可以用来寻找根式的近似分数序列。而以上推导表明: 应用上期短文中开平方近似公式的后一式, 虽然不能得到方程 (1) 的所有解, 却可以更快地、跳跃地得到 $\sqrt{3}$ 的近似分数。事实上, 用数学归纳法可以证明 (x_n, y_n) , 若是方程 (1) 的第 n 个解组, 则 $(2x_n^2-1, 2x_n y_n)$ 就是其第 $2n$ 个解组 (x_{2n}, y_{2n}) 。更有意思的是, 上述两个丢番图方程与 $\sqrt{3}$ 的连分数展开有着密切的联系, 同样牵涉到非常有趣的数学知识——关于这个话题, 以后我们再找机会来谈。■

表 2 $x^2-3y^2=-2$ 的前 6 组解

x	y
1	1
5	3
19	11
71	41
265	153
989	571