



全民科学素质行动
科学教育专栏

[数学杂谈]

古人开平方的近似公式

文_吴朝阳

吴朝阳，数学博士，历史学博士，计算机科学硕士，
目前任教于南京大学。



人类对数的认识当然是从自然数开始的。而由于正分数是自然数的比例，因此中西方古代的学者首先承认分数是数。接下来，由于勾股定理在古代数学中居于特别重要的地位，古人首先明确认识到的不能用分数表示的数量就是平方根。在西方，毕达哥拉斯学派通过归谬法证明，勾股长度均为1的等腰直角三角形斜边的长度不是一个分数。在东方，战国初期的墨家认识到平方根的普遍存在，提出“面”的概念。刘徽继承这个概念，指出开平方“开之不尽者，为不可开，当以面命之”。现代所说的“2的平方根”因为它“开之不尽”，刘徽说应该命名为“二之面”——翻译成现代汉语，就是“以2为面积的正方形的边长”的意思。既然“开之不尽”的平方根不是分数，古人就希望计算出它们的近似值，或者找出它们的近似分数表示式。在这方面，中西方大约在公元前就都已经找到了很不错的公式。有趣的是，双方找到的公式实质上是完全一样的。

三角形面积的“海伦公式”是因古希腊著名数学家海伦的名字而得名的，这位亚历山大时期的数学家生活于公元前100年之间，他用来计算平方根的近似公式是： $\sqrt{a^2 \pm b} \approx a \pm \frac{b}{2a}$ 。

据文献记载，阿基米德得到一个 $\sqrt{3}$ 的高精度近似式： $\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$ 。由于文献反映出海伦与阿基米德有着知识传承关系，数学史研究者猜测：阿基米德之所以得到上述不等式，是因为他应用了如下的近似公式（下面我们称之为“阿基米德近似公式”）： $a \pm \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2a \pm 1}$ 。

如果这个猜测成立，则以上公式在公元前100多年就已经为古希腊学者所得。

1984年，湖北江陵张家山出土了一部抄写于西汉初年（约公元前190年）的数学书，称为张家山汉简《算数书》。这部书中有一个名为“方田”的题，是一个关于“开方术”的算题。这个题的简文为：

“田一亩方几何步？曰：方十五步卅一分步十五。术曰：方十五步不足十五步，方十六步有余十六步。曰：并赢不足以为法，不足子乘赢母，赢子乘不足母，

并以为实。复之如启广之术。”

这个算题用“赢不足术”计算“开平方”。依照“赢不足术”，先列出整商，（整商+1）为第一行，将正、负余数列第二行，然后以交叉相乘之和作分母，以第二行之和作分子，即得到“方十五步卅一分步十五”这一近似答案。具体计算时列数如下： $\frac{15}{15} \quad \frac{16}{16}$ ，而计算式即为： $\frac{15 \times 16 + 16 \times 15}{15 + 16} = 15 \frac{15}{31}$ 。算题最后说“复之如启广之术”，“复”的意思就是“验算”，因此本题的计算要以验算来检验结果。因为验算结果只是近似而非相等，提出及应用公式的古人显然都知道这是一个近似公式。

张家山汉简《算数书》的这个近似公式虽然是以“赢不足术”来描述的，但它事实上给出了一个关于 $\sqrt{a^2 \pm b}$ 的近似计算公式——我们推导如下。

假如我们用这个公式求某数 N 的平方根，首先考虑 $N = a^2 + b$ 的情形。当然，我们要求 $(a+1)^2 > N > a^2$ 。由于 $N = (a+1)^2 - (2a+1-b)$ ，故依“赢不足术”所列出的数阵是：

$$a \quad a+1$$

$$b \quad 2a+1-b,$$

因此，我们不难得到：

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b} \approx \frac{a \cdot (2a+1-b) + (a+1) \cdot b}{b + (2a+1-b)} = a + \frac{b}{2a+1}。$$

相似地，考虑 $N = a^2 - b$ 的情形，则不难得到：

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 - b} \approx \frac{(a-1) \cdot b + a \cdot (2a-1-b)}{(2a-1-b) + b} = a - \frac{b}{2a-1}。$$

由此可见，张家山汉简《算数书》所给出的算法，与上述阿基米德近似公式的前半部分完全相同！

刘徽在为《九章算术》的“开方术”作注的时候说：“术或有以借算加定法而命分者，虽粗相近，不可用也。凡开积为方，方之自乘当还复有积分。令不加借算而命分，则常微少；其加借算而命分，则又微多。其数不可得而定。故惟以面命之，为不失耳。”他的意思是说：开方的结果做平方验算应该等于原来的被开方数，因此当被开方数为 $N = a^2 \pm b$ 形式时，开方的结果不是整数或者分数，平方根只能“以面命之”，即只能用“以 N 为面积的正方形的边长”来表示。刘徽

指出，用 $\sqrt{N} \approx a \pm \frac{b}{2a \pm 1}$ 来作 $\sqrt{N}$ 的近似，则结果比实际数值略小；而如果给分

数的分母“加借”，即使用 $\sqrt{N} \approx a \pm \frac{b}{2a}$ 作计算，则结果又略大。此可见，刘徽提

到的开平方之“术”，给出的结果与阿基米德近似公式实质上完全相同！与上引张家山汉简《算数书》的“方田”算题印证，可知刘徽的评论表明：这2个开平方的近似公式在秦朝或以前就已经是常用的近似公式了。

由于 $3 = 2^2 - 1$ ，因此据上述近似式直接得到的是：

$$\sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1} < 2 - \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{7}{4}。这个近似分数精度太低，而且与阿基米德的近似式$$

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153} \text{ 相差甚远。这，到底是怎么回事？原来，古人知道对一些形如}$$



图1 张家山汉简《算数书》“方田”简

$N = a^2 \pm b$ 的数, 如果 a 与 b 的比值太小, 则直接应用阿基米德近似公式将无法得到高精度的近似式。因此, 古人另辟蹊径, 发展出这样的技巧: 他们寻找使 $(k^2 \cdot N)$ 的值接近完全平方的自然数 k , 然后转而对 $\sqrt{k^2 \cdot N}$ 应用近似公式!

以 $\sqrt{3}$ 为例, 从平方表中搜寻平方数之间的近似 3 倍关系, 我们首先得到的是 $3 \cdot 4^2 = 48 = 7^2 - 1$, 以及 $3 \cdot 15^2 = 675 = 26^2 - 1$ 。为了得到高精度的近似结果, 我们选择后一个, 因而得到:

$$\sqrt{3} = \frac{1}{15} \sqrt{3 \cdot 15^2} = \frac{1}{15} \sqrt{26^2 - 1}。$$

这样, 据近似公式, 即有:

$$\sqrt{3} > \frac{1}{15} \cdot (26 - \frac{1}{2 \cdot 26 - 1}) = \frac{2 \cdot 26^2 - 26 - 1}{15 \cdot 51} = \frac{265}{153},$$

$$\sqrt{3} < \frac{1}{15} \cdot (26 + \frac{1}{2 \cdot 26}) = \frac{2 \cdot 26^2 + 1}{2 \cdot 15 \cdot 26} = \frac{1351}{780}。$$

显然, 以上 2 式即是阿基米德所得的近似式。需要指出的是, 古代这个技巧的价值不可小觑, 千余年之后的高等数学证明: 后一个公式是开平方最好的一阶近似公式之一! 事实上, 根据大学 1 年级讲到的中值公式或麦克劳林展式, 可以得到可导函数 $f(x)$ 的一阶近似式:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0x) \cdot x,$$

其中, $1 > \theta > 0$, 具体数值随 $f(x)$ 及 x 变化。当 $f(x) = \sqrt{1+x}$ 时, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$, 这个一阶近似形式即为: $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2\sqrt{1+\theta x}} x$ 。

在上式中取 $\theta = 0$, 即可得到比实际值略大的估计式, 因此: $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2} x$ 。

以 $\sqrt{3}$ 的近似计算为例, $\sqrt{3} = \frac{1}{15} \sqrt{3 \cdot 15^2} = \frac{1}{15} \sqrt{26^2 - 1} = \frac{26}{15} \sqrt{1 - \frac{1}{26^2}}$, 据以上一阶近似式即有:

$$\sqrt{3} = \frac{26}{15} \sqrt{1 - \frac{1}{26^2}} < \frac{26}{15} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{26^2} \right) \right]。$$

这, 正是阿基米德近似式的后一部分!

如果取 $\theta = 1$, 并用以上刚刚得到的近似式作为分母中 $\sqrt{1+x}$ 的近似, 则所得的近似式比实际值略小, 即:

$$\sqrt{1+x} > 1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x}} x > 1 + \frac{1}{2 \left(1 + \frac{1}{2} x \right)} x = 1 + \frac{x}{2+x}。$$

$$\text{同样以 } \sqrt{3} \text{ 为例, 则: } \sqrt{3} = \frac{26}{15} \sqrt{1 - \frac{1}{26^2}} > \frac{26}{15} \cdot \left[1 + \frac{1}{2 - \frac{1}{26^2}} \cdot \left(-\frac{1}{26^2} \right) \right] = \frac{2340}{1351},$$

计算可知, 这个结果比 $\frac{265}{153}$ 更接近 $\sqrt{3}$, 高等数学的威力, 于此可见一斑。■

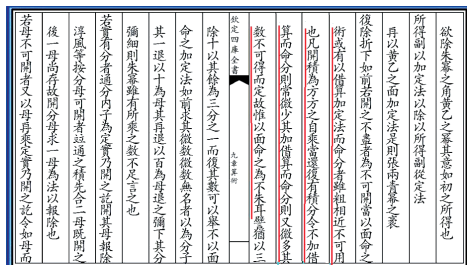


图2 《九章算术》中刘徽的评论