



全民科学素质行动
科学教育专栏

[数学杂谈]

一种逼近 $\sqrt{3}$ 的快速迭代法

文_吴朝阳

吴朝阳，数学博士，历史学博士，计算机科学硕士，
目前任教于南京大学。



给定一个 y_0 值，然后以给定的公式 $y_{n+1} = f(y_n)$ 逐次计算 y_n ，可以得到一个数列 $\{y_n\}$ 。这种方法每次以已经计算过的 y_n 代入同样的公式进行计算，称为迭代法。如果数列 $\{y_n\}$ 以某数值 y 为极限，则说此数列收敛于 y 。此时显然可以通过迭代法计算 y_n 的值，作 y 值的近似计算。如果我们有关于这种近似的误差估计公式，则可以根据我们对近似的精度要求，确定迭代计算的次数。

显然，迭代法是非常适合当代计算机的一种算法。但是，如果 $\{y_n\}$ 收敛于 y 的速度慢，即误差随 n 变小的速度慢，则要得到符合精度要求的近似值就需要很多次的迭代。因此，迭代算法的设计者都会追求收敛速度快的算法。

在前几期的短文中，我们介绍的数列 $\{z_n\}$ 和 $\{m_n\}$ 是用递推的方式定义的。而其商数列，即逼近 $\sqrt{3}$ 的数列 $\{x_n\}$ ，满足：

$$x_0 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{2x_n + 3}{x_n + 2},$$

正是一个可以用迭代法计算的数列。对这个数列，我们以前得到过它的误差估计式，即：

$$\varepsilon_n = |x_n - \sqrt{3}| < \frac{1}{2\sqrt{3} \cdot (2 + \sqrt{3})^{2n}}.$$

因此，每多计算一项，则误差大约缩小为原来的 $1/(2 + \sqrt{3})^2$ 。可以说，这样的收敛速度还是挺快的。

然而，专家们有收敛更快的迭代公式。对于大于 1 的正数 A 的开平方，迭代法研究者提出一种迭代算法：

取 y_0 为某接近 A 平方根的正数，然后用公式 $y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + \frac{A}{y_n})$ 进行迭代。具体地说，对我们所讨论的 $\sqrt{3}$ 的近似计算，可以使用迭代公式：

$$y_0 = 2, \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + \frac{3}{y_n}).$$

这个公式的收敛速度到底有多快？我们先来计算几项试试。

$$y_1 = \frac{1}{2}(y_0 + \frac{3}{y_0}) = \frac{7}{4} = 1.750\ 000\ 000$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(y_1 + \frac{3}{y_1}) = \frac{97}{56} \approx 1.732\ 142\ 857$$

$$y_3 = \frac{1}{2}(y_2 + \frac{3}{y_2}) = \frac{18\ 817}{10\ 864} \approx 1.732\ 050\ 810$$

与 $\sqrt{3}$ 的高精度近似值比较可知， y_3 已经精确到小数点之后 8 位，可见这种迭代法的收敛速度非常非常快！

这种迭代算法的收敛速度惊人，因而这种迭代法的误差估计式就成为一个有趣的小课题。将以上计算与前文 $\{z_n\}$ 和 $\{m_n\}$ 的值对照，可知 y_1, y_2 的分子和分母依次分别是 z_1 和 m_1 ，以及 z_3 和 m_3 。继续计算 $\{z_n\}$ 和 $\{m_n\}$ ，我们发现 y_3 的分子和分母分别等于 z_7 和 m_7 。因此，数列 $\{y_n\}$ 与数列 $\{z_n\}$ 和 $\{m_n\}$ 到底有什么关系，显然又是一个有趣的问题。下面，我们将依次揭开其中的谜底。

我们先来看看误差估计。首先，尝试将迭代公式配成

完全平方, 有:

$$y_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \left(y_n + \frac{3}{y_n}\right) - \sqrt{3} = \frac{1}{2y_n} (y_n - \sqrt{3})^2.$$

因此, 对所有正整数 n , 显然都有 $y_n > \sqrt{3}$ 成立, 并且有:

$$\delta_{n+1} = |y_{n+1} - \sqrt{3}| = \frac{1}{2y_n} (y_n - \sqrt{3})^2 < \frac{1}{2\sqrt{3}} \delta_n^2$$

据此递推, 不难证明:

$$\delta_{n+1} < \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^{1+2+4+\dots+2^n} \cdot \delta_0^{2^n} = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^{2^{n+1}-1} \delta_0^{2^n}.$$

由 $\delta_0 = 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ 及 $(2\sqrt{3})^2 = 12$, 不难得到:

$$\delta_n < 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{12(2+\sqrt{3})}\right)^{2^{n-1}}.$$

将这个误差的估计不等式与关于 $\{x_n\}$ 的误差估计比较, 可以发现: $\{x_n\}$ 误差公式的指数 $2n$ 是 n 的线性函数, 而 $\{y_n\}$ 误差项的指数 2^{n-1} 却是 n 的指数函数, 可见其收敛速度之快!

关于 $\{y_n\}$ 的更精细的误差估算公式后文再说, 现在我们来考察 $\{y_n\}$ 化作既约分数时, 其分子、分母与数列 $\{z_n\}$ 和 $\{m_n\}$ 的关系。

首先, 我们以递推关系

$$u_0 = 1, v_0 = 2;$$

$$u_{n+1} = 2v_n u_n;$$

$$v_{n+1} = v_n^2 + 3u_n^2.$$

来定义数列 $\{v_n\}, \{u_n\}$, 然后记 $y_n = \frac{v_n}{u_n}$, 则有:

$$y_0 = \frac{v_0}{u_0} = 2,$$

$$y_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{v_n^2 + 3u_n^2}{2v_n u_n} = \frac{1}{2} \left(y_n + \frac{3}{y_n}\right).$$

因此, 这里的数列 $\{y_n\}$ 就是我们稍前定义的数列 $\{y_n\}$, 而且是数列 $\{v_n\}$ 和 $\{u_n\}$ 的商数列。 v_n 和 u_n 是互素的, 这个结论可以用“无限下推法”证明, 我们将证明细节留给读者自己完成。总之, 对任何非负整数 n , v_n 和 u_n 就是 y_n 写成既约分数时的分子和分母。

关于数列 $\{v_n\}$ 与 $\{z_n\}$, 以及它们与前文定义的数列 $\{u_n\}$ 与 $\{m_n\}$ 的关系, 我们有如下定理。

定理: 对任何非负整数 n , 上述定义的数列 $\{v_n\}$ 与 $\{z_n\}$, 数列 $\{u_n\}$ 与 $\{m_n\}$, 分别成立如下恒等式:

$$u_n = m_{2^n-1},$$

$$v_n = z_{2^n-1}.$$

证明

在以前的短文中, 我们已经证明数列 $\{m_n\}$ 和 $\{u_n\}$ 的通项公式分别为:

$$m_n = \frac{1}{2\sqrt{3}} [(2+\sqrt{3})^{n+1} - (2-\sqrt{3})^{n+1}]$$

$$z_n = \frac{1}{2} [(2+\sqrt{3})^{n+1} + (2-\sqrt{3})^{n+1}].$$

因此, 我们只需要证明:

$$u_n = \frac{1}{2\sqrt{3}} [(2+\sqrt{3})^{2^n} - (2-\sqrt{3})^{2^n}]$$

$$v_n = \frac{1}{2} [(2+\sqrt{3})^{2^n} + (2-\sqrt{3})^{2^n}].$$

我们可以用——您猜对了——用数学归纳法来证明以上二式。

首先, 容易验证, 以上二式 $n=0$ 对时显然成立。假设对非负整数 n , 上列两个通项公式都成立。

对正整数 $n+1$, 据归纳假设以及 $\{v_n\}$ 与 $\{u_n\}$ 的定义, 我们有:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n^2 + 3u_n^2 \\ &= \frac{1}{4} [(2+\sqrt{3})^{2^n} + (2-\sqrt{3})^{2^n}]^2 + \frac{3}{4 \cdot 3} [(2+\sqrt{3})^{2^n} - (2-\sqrt{3})^{2^n}]^2 \\ &= \frac{1}{2} [(2+\sqrt{3})^{2^{n+1}} + (2-\sqrt{3})^{2^{n+1}}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2v_n u_n \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} [(2+\sqrt{3})^{2^n} + (2-\sqrt{3})^{2^n}] \cdot [(2+\sqrt{3})^{2^n} - (2-\sqrt{3})^{2^n}] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} [(2+\sqrt{3})^{2^{n+1}} - (2-\sqrt{3})^{2^{n+1}}] \end{aligned}$$

因此, 定理得证。

这样, 关于数列 $\{y_n\}$ 与 $\{x_n\}$, 我们得到:

$$y_n = x_{2^n-1}$$

由我们以前证明的关于 $\{x_n\}$ 的误差估计式:

$$\varepsilon_n = |x_n - \sqrt{3}| < \frac{1}{2\sqrt{3} \cdot (2+\sqrt{3})^{2^n}}$$

可以得到 $\{y_n\}$ 误差的另一个估计式:

$$\delta_n = |y_n - \sqrt{3}| = |x_{2^n-1} - \sqrt{3}| < \frac{1}{2\sqrt{3} \cdot (2+\sqrt{3})^{2^{n+1}-2}}.$$

这是一个比稍前得到的估计式更精细的误差估计公式。

事实上, 根据 $\{v_n\}$ 与 $\{u_n\}$ 的通项公式, 可以得到 $\{y_n\}$ 的通项公式为:

$$y_n = \sqrt{3} \cdot \frac{(2+\sqrt{3})^{2^n} + (2-\sqrt{3})^{2^n}}{(2+\sqrt{3})^{2^n} - (2-\sqrt{3})^{2^n}},$$

因此, 其准确的误差公式并不难得到, 我们将它留给读者来完成。■