



全民科学素质行动  
科学教育专栏

## [数学杂谈]

# 逼近 $\sqrt{3}$ 的分数数列通项公式的另两种证明

文\_吴朝阳

吴朝阳，数学博士，历史学博士，计算机科学硕士，  
目前任教于南京大学。



前几期的文章中我们定义了两个数列 $\{z_n\}, \{m_n\}$ ：

$$m_0 = 1, z_0 = 2;$$

$$z_{n+1} = 2z_n + 3m_n;$$

$$m_{n+1} = z_n + 2m_n.$$

然后用它们的商 $x_n = z_n / m_n$ 定义数列 $\{x_n\}$ 。我们已经证明，数列 $\{x_n\}$ 以一个相当快的速度逼近 $\sqrt{3}$ ，并且还求出了 $\{z_n\}$ 和 $\{m_n\}$ 的通项公式。前文中通项公式的推求及证明用的都是初等数学方法，这回我们将介绍求解这些通项公式的两种高等数学方法。

### ◎ 方法一 生成函数法

这篇短文的主要目的是借这个通项公式的求解介绍一些有趣的数学知识和方法。因此，我们在这里先对生成函数法作点简单介绍。

我们知道，首项等于1，公比为 $x$ 的等比数列的前 $N$ 项和是：

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} x^n = \frac{1-x^N}{1-x}.$$

让 $N$ 趋于无穷大，则当 $|x| < 1$ 时， $x^N$ 趋于0，所以，此时有：

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1-x^N}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

这样，我们就得到一个无穷级数： $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 。从 $n=0$ 开始，这个级数的第 $n$ 项都是 $a_n x^n$ 的形式——即 $x$ 的 $n$ 次幂函数乘以一个系数。由于这个原因，通项形如 $a_n x^n$ 的无穷级数称为幂级数。这个幂级数例子中的所有 $a_n$ 都等于1，且当 $|x| < 1$ 时有极限 $\frac{1}{1-x}$ ，这个极限就是该级数的和函数。

对 $n$ 从0开始的数列 $\{a_n\}$ ，以与它密切相关的一组数为系数的某种形式的级数称为这个数列 $\{a_n\}$ 的生成函数。利用数列的生成函数及其和函数展开研究的学问，

称为生成函数学。特别地，以数列 $\{a_n\}$ 的通项为系数的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ，称为数列 $\{a_n\}$ 的普通生成函数（ordinary generating function）。下面，我们就用普通生成函数来求解 $\{z_n\}$ 和 $\{m_n\}$ 的通项公式。由于两个通项公式证明方法相同，我们只求解 $\{m_n\}$ 的通项公式。

解法一：构造数列 $\{m_n\}$ 的普通生成函数，将其和函数记为 $f(x)$ ，即令：

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n x^n.$$

由定义， $m_0 = 1, m_1 = 4$ ，因此有：

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} m_n x^n = m_0 + m_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} m_n x^n \\ &= 1 + 4x + \sum_{n=0}^{\infty} m_{n+2} x^{n+2}. \end{aligned}$$

在第9期的短文中我们已经推得：

$$m_{n+1} = 4m_n - m_{n-1}.$$

应用这个递推公式，即有：

$$f(x) = 1 + 4x + \sum_{n=0}^{\infty} (4m_{n+1} - m_n) x^{n+2}$$

$$= 1 + 4x + 4x \sum_{n=0}^{\infty} m_{n+1} x^{n+1} - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} m_n x^n$$

与生成函数 $f(x)$ 的定义相比较，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} m_{n+1} x^{n+1}$ 仅仅缺少其常数项，因此我们得到：

$$f(x) = 1 + 4x + 4x[f(x) - 1] - x^2 f(x).$$

$$\text{整理即得： } f(x) = \frac{1}{1-4x+x^2}.$$

对以上右式的分母作因式分解，易得：

$$1-4x+x^2 = (1-r_1 x)(1-r_2 x),$$

其中， $r_1 = 2 + \sqrt{3}, r_2 = 2 - \sqrt{3}$ 。

故有:

$$f(x) = \frac{1}{(1-r_1x)(1-r_2x)}$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2} \left( \frac{r_1}{1-r_1x} - \frac{r_2}{1-r_2x} \right).$$

前面我们介绍过等比级数的展开式, 利用这个展开式即有:

$$\frac{1}{1-rx} = \sum_{n=0}^{\infty} (rx)^n.$$

因此,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{r_1 - r_2} \sum_{n=0}^{\infty} (r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) x^n \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} [(2+\sqrt{3})^{n+1} - (2-\sqrt{3})^{n+1}] x^n \end{aligned}$$

将此级数与定义  $f(x)$  的级数比较系数, 即得到:

$$m_n = \frac{1}{2\sqrt{3}} [(2+\sqrt{3})^{n+1} - (2-\sqrt{3})^{n+1}].$$

这样, 我们就由  $\{m_n\}$  的定义出发, 应用普通生成函数以推导的方式, 证明了它的通项公式。

顺便介绍一下, 对本问题我们还可以构造如下生成函数:

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{n!} x^n.$$

这个幂级数以  $\frac{m_n}{n!}$  为系数, 是另一种重要的生成函数,

称为数列  $\{m_n\}$  的指数型生成函数 (exponential generating function)。应用这种生成函数的研究常常涉及导数和微分方程, 对本问题也不例外。这种生成函数虽然非常有用而且有趣, 但它牵涉到比较多的高等数学知识, 所以我们在这里仅提及这种生成函数, 不作详细介绍, 有兴趣的读者可以寻找合适的资料自行研习。

## ◎ 方法二 矩阵解法

考虑向量  $\begin{pmatrix} z_n \\ m_n \end{pmatrix}$ 。根据  $\{z_n\}$  和  $\{m_n\}$  的定义, 我们有:

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ m_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_{n+1} \\ m_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_n \\ m_n \end{pmatrix}.$$

由此逐步递推, 我们很容易得到:

$$\begin{pmatrix} z_n \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} z_0 \\ m_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

记  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 则只要我们能够计算出  $A^n$ , 则  $\{z_n\}$  和  $\{m_n\}$  的通项公式也就求出来了。下面, 我们就来介绍通过求  $A^n$  而求解  $\{z_n\}$  和  $\{m_n\}$  通项公式的方法。

解法二: 首先, 我们计算如下二阶行列式:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 1.$$

这个式子称为矩阵  $A$  的特征多项式, 相应地, 方程

$$|\lambda E - A| = \lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

称为矩阵  $A$  的特征方程。这个方程的解称为  $A$  的特征值, 它们是:

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}, \quad \lambda_2 = 2 - \sqrt{3}.$$

现在考虑如下二元一次方程组:

$$(\lambda_1 E - A) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -3 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

不难解得:  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} v$ , 其中  $v$  为任意实数。

这样, 我们得到一个向量  $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ , 它是  $A$  的一个“属于  $\lambda_1$  的特征向量”。相似地, 对  $\lambda_2$  我们解得向量  $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

用这两个向量构造矩阵  $U = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 。这个矩阵是可逆的, 它的逆矩阵为:

$$U^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

以上得到的矩阵非常关键, 因为我们有:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} U^{-1}.$$

据上式及矩阵乘法的结合律, 即有:

$$\begin{aligned} A^n &= \left[ U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} U^{-1} \right]^n \\ &= U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n U^{-1} = U \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} U^{-1}. \end{aligned}$$

因此,

$$A^n = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2+\sqrt{3})^n & 0 \\ 0 & (2-\sqrt{3})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

作矩阵乘法运算, 不难得到:

$$A^n = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3}[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n] & 3[(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n] \\ (2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n & \sqrt{3}[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n] \end{pmatrix}.$$

现在, 只要将上述结果代入  $\begin{pmatrix} z_n \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 化简后即可以得到  $\{z_n\}$  和  $\{m_n\}$  的通项公式。

以上这种做法用到的是矩阵论中关于相似矩阵的知识, 特征方程、特征值等, 都是关于相似矩阵的重要概念。遗憾的是, 如果不具备大学 1 年级的高等数学知识, 就难以欣赏本文两种解法的美妙之处。因为这个原因, 我们想在这里指出: 欣赏美是有门槛的, 增加知识提高修养, 才能欣赏更多美妙的事物, 数学如此, 诗词、书法也不例外。希望我们的读者努力学习, 用知识打开欣赏美妙事物的大门。■