



全民科学素质行动
科学教育专栏

[数学杂谈]

勾股数趣谈之一

文_吴朝阳

吴朝阳，数学博士，历史学博士，计算机科学硕士，
目前任教于南京大学。



反映直角三角形 3 个边长之间关系的定理，在中国有时称为商高定理，通常则称为勾股定理，而在西方却称为毕达哥拉斯定理。许多人认为，古希腊的毕达哥拉斯最先发现了这个定理。但事实上，古希腊的这个定理来自毕达哥拉斯学派，而非毕达哥拉斯本人。因此，其发现年代只能宽泛地定在孔子至墨子时期（约公元前 550—前 400 年），也就是中国的春秋后期到战国初期。

中国传世文献中最早明确记述并证明勾股定理的是《九章算术》的刘徽注本。因此，虽然《周髀算经》说周公时代（约公元前 1000 年）的商高已经发现勾股定理，严苛的数学史研究者却只肯根据《九章算术》将该定理在中国的发现年代含糊地定在汉朝前后。幸运的是，1984 年在湖北张家山出土了西汉初年抄成的《算数书》，其中的一个算题把勾股定理的发现年代至少推进至吕后时期（约公元前 190 年）。而岳麓书院所藏秦简《数》的出现，则进一步把这个时间提早到秦始皇后期（约公元前 212 年）。

更重要的是，岳麓秦简和张家山汉简证明，传世文献对周朝有“九数”的记载是可靠的。因此，勾股定理虽然未必始于周公时代，但至迟春秋时代肯定已经被发现。也就是说，证据表明中国人发现勾股定理的时间不迟于毕达哥拉斯学派。当然，这些讨论只在数学史研究中有意义——就算中国古代曾经辉煌，也早已是过去的事情。

话说回来，毕达哥拉斯学派喜欢寻找满足 $a^2 + b^2 = c^2$ 勾股定理的自然数组，即满足的自然数组 (a, b, c) ，把它们称为“毕达哥拉斯三元组”。有趣的是，中国古人也喜欢研究这种数组，并称之为“勾股数”。而 3、4、5 这

组古今中外最著名的勾股数，据《周髀算经》说就是周公时代的商高提出来的。此外，5、12、13 及 7、24、25，也是中学数学题中常见的勾股数。

关于勾股数的趣味话题有很多，有兴趣的读者可以从很多不同的途径读到。这些趣味话题各有其妙处，其中有 2 个我觉得特别有意思。我们都知道，3、4、5 是最小的一组勾股数，而他们的乘积恰好等于 60。正因此，我最喜欢的关于勾股数的有趣定理是：勾股数的乘积是 60 的倍数！其次，“如何找出所有勾股数”也是一个我认为极有意思的问题。下面，我们先来证明勾股数必须满足的公式，因为根据这个公式可以找出所有的勾股数，并可以方便地证明“勾股数的乘积是 60 的倍数”这个有趣的结果。

如果 2 个自然数没有公因数，则数论中称它们是互素的。使用这个术语，我们有如下定理。

定理 1：如果 3 个自然数 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$ ， a 与 b 互素，并且 b 为偶数，则存在自然数 m, n ，使得：

$$a = m^2 - n^2,$$

$$b = 2mn,$$

$$c = m^2 + n^2.$$

证明：

由于 a 与 b 互素，它们不可能都是偶数。假设它们都是奇数， $a = 2k+1$ 而 $b = 2l+1$ ，则 $a^2 + b^2 = 4(k^2 + k + l^2 + l) + 2$ 。这个平方和是偶数但不是 4 的倍数，而偶数的平方是 4 的倍数，所以它不是一个偶数的平方。因此，勾股数中的“勾”和“股”不能同时为奇数。也就是说，互素的勾股数中的 a 与 b 不可能同时为奇数，

必然是一奇一偶。所以，定理中的“ b 为偶数”是一个合理的假设，而 c 则显然只能是奇数。

由于 b 是偶数，我们记 $b=2b_1$ ，则 $b_1^2=\frac{c-a}{2}\cdot\frac{c+a}{2}$ 。

由于 a 与 c 同为奇数并且 $c>a$ ，所以 $\frac{c-a}{2}$ 与 $\frac{c+a}{2}$ 都是正整数。

如果 $\frac{c-a}{2}$ 与 $\frac{c+a}{2}$ 有公因数 d ，则 d 同时整除 $\frac{c-a}{2}$ 与 $\frac{c+a}{2}$ ，因而整除它们的和 c ，以及它们的差 a 。如此，则 d 是 a 与 c 的公因数，因而其平方可以整除 b 的平方。这就是说， d 也是 a 与 b 的公因数。由 a 与 b 互素的假设，这个 d 只能等于1。因此， $\frac{c-a}{2}$ 与 $\frac{c+a}{2}$ 也是互素的。

如果 $\frac{c-a}{2}$ 不是完全平方，则它是一个完全平方数乘以一个非完全平方数 k 。而由 $b_1^2=\frac{c-a}{2}\cdot\frac{c+a}{2}$ ，可知 $\frac{c+a}{2}$ 也必须是一个完全平方数乘以 k 。因为 $\frac{c-a}{2}$ 与 $\frac{c+a}{2}$ 互素，所以 $\frac{c-a}{2}$ 与 $\frac{c+a}{2}$ 都只能是平方数。所以，存在自然数 m, n ，使得：

$$\begin{aligned}\frac{c-a}{2} &= n^2 \\ \frac{c+a}{2} &= m^2\end{aligned}$$

整理得：

$$\begin{aligned}a &= m^2 - n^2, \\ c &= m^2 + n^2\end{aligned}$$

代入 b 的表达式，即得：

$$b = 2mn.$$

至此，我们证明了上述定理1。如果 a 与 b 的最大公因数为 d ，则易知：存在自然数 m, n ，使得：

$$\begin{aligned}a &= d(m^2 - n^2), \\ b &= 2dmn, \\ c &= d(m^2 + n^2)\end{aligned}$$

这样，我们就得到了一般勾股数所要满足的公式。根据这个公式，取不同的自然数 m, n 和 d ，就可以得到所有的勾股数。

定理2：如果3个自然数 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$ ，则 abc 是60的倍数。

证明：

显然这个定理只需要对 a 与 b 互素的情形证明即可，因此我们不妨假设 a 与 b 互素。如此，则对勾股数 a, b, c ，

存在自然数 m, n ，使得 a, b, c 满足：

$$\begin{aligned}a &= m^2 - n^2, \\ b &= 2mn, \\ c &= m^2 + n^2\end{aligned}$$

因此，有：

$$\begin{aligned}abc &= (m^2 - n^2) \cdot 2mn \cdot (m^2 + n^2) \\ &= 2mn \cdot (m - n) \cdot (m + n) \cdot (m^2 + n^2)\end{aligned}$$

首先，我们证明上述乘积 abc 是4的倍数：如果 m 与 n 中有一个是偶数，则 $2mn$ 是4的倍数。如果 m 与 n 都是奇数，则 $(m^2 - n^2)$ 是4的倍数。因此，据以上表达式，无论 m 与 n 的奇偶，乘积 abc 都是4的倍数。

其次，我们来证明乘积 abc 是3的倍数：如果 m 与 n 中有一个是3的倍数，则 mn 是3的倍数。如果 m 与 n 都不是3的倍数，则它们除以3所得的余数等于1或者2。

在两个余数同时为1或者同时为2的情形， $(m - n)$ 是3的倍数；而在两个余数分别为1和2的情形， $(m + n)$ 是3的倍数。因此，无论 m 与 n 取什么样的自然数，乘积 $mn \cdot (m - n) \cdot (m + n)$ 都是3的倍数，所以乘积 abc 也是3的倍数。

最后，我们证明乘积 abc 是5的倍数——证明方法与上述很相似：当 m 与 n 中有一个是5的倍数时， mn 自然是5的倍数。而如果 m 与 n 都不是5的倍数，则它们除以5所得的余数等于1、2、3或4。我们拓宽余数的概念，把这些余数改记为+1，+2，-2，-1，并因此知 m 与 n 余数的绝对值只取1和2两个值。在两个余数的绝对值相同的情形， m 与 n 两数平方除以5所得的余数相同，因而 $(m^2 - n^2)$ 是5的倍数。而在两个余数绝对值不同的情形，它们分别为1和2，两数平方除以5的余数分别为1和4，因而 $(m^2 + n^2)$ 是5的倍数。因此，无论 m 与 n 取什么样的自然数，乘积 $mn \cdot (m^2 - n^2) \cdot (m^2 + n^2)$ 都是5的倍数，因而乘积 abc 也是5的倍数。

综合以上，我们证明任何一组勾股数的乘积都是3的倍数，是4的倍数，也是5的倍数。因为3、4、5是互素的，所以勾股数的乘积是 $3 \times 4 \times 5$ ，即60的倍数。

古希腊文献没有明确指出毕达哥拉斯学派是否知道以上这个关于勾股数乘积的有趣性质，但文献证明，毕达哥拉斯学派曾醉心于寻找勾股数的一般表达式，并且得到这样一个结果：

如果 m 是一个奇数，则 m ， $\frac{m^2-1}{2}$ ， $\frac{m^2+1}{2}$ 是一组勾股数。

毕达哥拉斯学派的这个结果与定理1当 n 等于1时的特殊情形不仅形式上相似，实质上也存在对应关系。由定理1可以推知，利用这个公式并不能得到全部的勾股数，但这个结果显然是很有趣的，而在公元前数百年就得到这样的结果，成就也是很了不起的。■