



全民科学素质行动
科学教育专栏

[数学杂谈]

一种逼近 $\sqrt{3}$ 的分数数列的通项公式

文_吴朝阳

吴朝阳，数学博士，历史学博士，计算机科学硕士，
目前任教于南京大学。



上一期专栏我们定义了2个数列 $\{z_n\}, \{m_n\}$:

$$m_0 = 1, z_0 = 2;$$

$$z_{n+1} = 2z_n + 3m_n;$$

$$m_{n+1} = z_n + 2m_n.$$

然后用它们的商 $x_n = z_n / m_n$ 定义数列 $\{x_n\}$ ，并且证明了数列 $\{x_n\}$ 的值以一个相当快的速度逼近 $\sqrt{3}$ 。在上文中我们看到， $\{z_n\}$ 和 $\{m_n\}$ 的值可以用递推公式列表逐次计算。然而，如果能够求出它们的通项公式，则我们就可以对指定的任何自然数 n 直接计算出 z_n 和 m_n 的值。因此， $\{z_n\}$ 和 $\{m_n\}$ 的通项公式是重要的，本文将介绍它们的通项公式，以及3种有趣的证明方式。

定理：上述定义的数列 $\{z_n\}$ 和 $\{m_n\}$ 的通项公式分别是：

$$m_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}[(2+\sqrt{3})^{n+1} - (2-\sqrt{3})^{n+1}]$$

$$z_n = \frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^{n+1} + (2-\sqrt{3})^{n+1}].$$

证明一

首先用数学归纳法证明，对任何非负整数 n ，有：

$$(2-\sqrt{3})^{n+1} = z_n - m_n\sqrt{3}$$

$$(2+\sqrt{3})^{n+1} = z_n + m_n\sqrt{3}$$

由 $\{z_n\}$ 和 $\{m_n\}$ 的定义，上二式对 $n=0$ 显然成立。假设对非负整数 n ，以上二式均成立。则对正整数 $n+1$ ，据归纳假设得：

$$\begin{aligned} (2-\sqrt{3})^{(n+1)+1} &= (2-\sqrt{3}) \cdot (z_n - m_n\sqrt{3}) \\ &= (2z_n + 3m_n) - (z_n + 2m_n)\sqrt{3}. \end{aligned}$$

由数列 $\{m_n\}$ 的定义，有 $m_{n+1} = z_n + 2m_n$ ，
 $z_{n+1} = 2z_n + 3m_n$ ，故有：

$$\begin{aligned} (2-\sqrt{3})^{(n+1)+1} &= (2z_n + 3m_n) - (z_n + 2m_n)\sqrt{3} \\ &= z_{n+1} - m_{n+1}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

同理可得：

$$\begin{aligned} (2+\sqrt{3})^{(n+1)+1} &= (2z_n + 3m_n) + (z_n + 2m_n)\sqrt{3} \\ &= z_{n+1} + m_{n+1}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

这样，我们就用数学归纳法证明了等式：

$$(2-\sqrt{3})^{n+1} = z_n - m_n\sqrt{3}$$

$$(2+\sqrt{3})^{n+1} = z_n + m_n\sqrt{3}$$

上述2个等式揭示了数列 $\{z_n\}$ 和 $\{m_n\}$ 与 $\sqrt{3}$ 的隐秘联系。而这2个等式是关于 z_n 和 m_n 的二元一次方程组，解出 z_n 和 m_n ，立即得到定理所列的通项公式。

证明二

直接用数学归纳法证明。

由 $\{z_n\}$ 和 $\{m_n\}$ 的定义，2个通项公式对 $n=0$ 时显然成立。假设对非负整数 n ，定理2的2个通项公式成立。

对正整数 $n+1$ ，据归纳假设，以及 $\{z_n\}$ 和 $\{m_n\}$ 的定义，得：

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= 2z_n + 3m_n \\ &= [(2+\sqrt{3})^{n+1} + (2-\sqrt{3})^{n+1}] + \frac{\sqrt{3}}{2}[(2+\sqrt{3})^{n+1} - (2-\sqrt{3})^{n+1}] \\ &= \frac{1}{2}\{2 \cdot [(2+\sqrt{3})^{n+1} + (2-\sqrt{3})^{n+1}] + \sqrt{3}[(2+\sqrt{3})^{n+1} - (2-\sqrt{3})^{n+1}]\} \\ &= \frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^{n+1}(2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})^{n+1}(2-\sqrt{3})] \\ &= \frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^{(n+1)+1} + (2-\sqrt{3})^{(n+1)+1}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{n+1} &= z_n + 2m_n \\
&= \frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^{n+1} + (2-\sqrt{3})^{n+1}] + \frac{2}{2\sqrt{3}}[(2+\sqrt{3})^{n+1} - (2-\sqrt{3})^{n+1}] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\{\sqrt{3} \cdot [(2+\sqrt{3})^{n+1} + (2-\sqrt{3})^{n+1}] + 2 \cdot [(2+\sqrt{3})^{n+1} - (2-\sqrt{3})^{n+1}]\} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}[(2+\sqrt{3})^{n+1}(\sqrt{3}+2) + (2-\sqrt{3})^{n+1}(\sqrt{3}-2)] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}[(2+\sqrt{3})^{(n+1)+1} - (2-\sqrt{3})^{(n+1)+1}]
\end{aligned}$$

这就完成了定理的数学归纳法证明。

以上 2 个证明都应用数学归纳法, 这种证明方式只有在通项公式已知的情况下才行得通。那么, 这 2 个通项公式是如何推导出来的呢? 我们将介绍 3 种具体推导出通项公式的证明, 本文先介绍其中的 1 种。

证明三

由数列 $\{z_n\}, \{m_n\}$ 的定义式, 容易推得:

$$\begin{aligned}
m_0 &= 1, m_1 = 4; \\
z_0 &= 2, z_1 = 7; \\
m_{n+1} &= 4m_n - m_{n-1}; \\
z_{n+1} &= 4z_n - z_{n-1}
\end{aligned}$$

从这 2 个关于数列 $\{z_n\}, \{m_n\}$ 的递推公式出发, 有多种不同做法可以得到数列的通项。这里, 我们用更“初等”的、很多中学生已经接触过的方法。今后我们将介绍“生成函数”这种“高端大气上档次”的方法, 并用它来证明定理。

因为 2 个公式证明方法相同, 这里我们只证明 $\{m_n\}$ 的通项公式。取 r, s 使递推公式

$$m_{n+1} = 4m_n - m_{n-1}$$

化为:

$$m_{n+1} - sm_n = r(m_n - sm_{n-1})$$

对上式移项, 即知这要求 r, s 满足:

$$r + s = 4$$

$$rs = 1$$

据韦达定理, r, s 是方程 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 的 2 个根, 并且其值可以对换。我们记:

$$\begin{aligned}
r_1 &= 2 + \sqrt{3}, s_1 = 2 - \sqrt{3} \\
r_2 &= 2 - \sqrt{3}, s_2 = 2 + \sqrt{3}
\end{aligned}$$

然后定义新数列 $\{A_n\}, \{B_n\}$:

$$\begin{aligned}
A_n &= m_{n+1} - s_1 m_n \\
B_n &= m_{n+1} - s_2 m_n
\end{aligned}$$

据 r, s 所满足的条件, 显然有:

$$\begin{aligned}
A_n &= r_1 A_{n-1} \\
B_n &= r_2 B_{n-1}
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
A_n &= r_1^n (m_1 - s_1 m_0) \\
&= (2 + \sqrt{3})^n [4 - (2 - \sqrt{3})] = (2 + \sqrt{3})^{n+1} \\
B_n &= r_2^n (m_1 - s_2 m_0) \\
&= (2 - \sqrt{3})^n [4 - (2 + \sqrt{3})] = (2 - \sqrt{3})^{n+1}
\end{aligned}$$

由以上二公式及 $\{A_n\}, \{B_n\}$ 的定义, 有:

$$\begin{aligned}
A_n - B_n &= (s_2 - s_1)m_n = 2\sqrt{3}m_n \\
A_n - B_n &= (2 + \sqrt{3})^{n+1} - (2 - \sqrt{3})^{n+1}
\end{aligned}$$

由此, 我们立刻得到:

$$m_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}[(2 + \sqrt{3})^{n+1} - (2 - \sqrt{3})^{n+1}]$$

这样, 我们就用很初等的方法证明了定理。

我们在上一期用 $x_n = \frac{z_n}{m_n}$ 定义逼近 $\sqrt{3}$ 的分数数列, 并估计了 $\{x_n\}$ 与 $\sqrt{3}$ 的误差。现在我们有了 $\{z_n\}$ 与 $\{m_n\}$ 的通

项公式, 因而可以对 $\{x_n\}$ 逼近 $\sqrt{3}$ 的误差作进一步的讨论。首先, 我们有:

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{z_n}{m_n} = \frac{\frac{1}{2}[(2 + \sqrt{3})^{n+1} + (2 - \sqrt{3})^{n+1}]}{\frac{1}{2\sqrt{3}}[(2 + \sqrt{3})^{n+1} - (2 - \sqrt{3})^{n+1}]} \\
&= \sqrt{3} \cdot \frac{(2 + \sqrt{3})^{n+1} + (2 - \sqrt{3})^{n+1}}{(2 + \sqrt{3})^{n+1} - (2 - \sqrt{3})^{n+1}}
\end{aligned}$$

由 $2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$, 易得:

$$x_n = \sqrt{3} \cdot \frac{1 + (2 - \sqrt{3})^{2(n+1)}}{1 - (2 - \sqrt{3})^{2(n+1)}}$$

因此, $x_n > \sqrt{3}$, 且

$$\begin{aligned}
x_n - \sqrt{3} &= \sqrt{3} \cdot \left[\frac{1 + (2 - \sqrt{3})^{2(n+1)}}{1 - (2 - \sqrt{3})^{2(n+1)}} - 1 \right] \\
&= \sqrt{3} \cdot \frac{2 \cdot (2 - \sqrt{3})^{2(n+1)}}{1 - (2 - \sqrt{3})^{2(n+1)}}
\end{aligned}$$

所以, 精确的误差公式为:

$$\varepsilon_n = |x_n - \sqrt{3}| = \frac{2\sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})^{2n+2} - 1}$$

我们在上一期所得的误差估计公式是:

$$\varepsilon_n < \frac{1}{2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + 2)^{2n}}$$

简单的近似计算可知, 当 $n \geq 2$ 时, 精确误差公式所得不超过此公式估计值的 87%。■