



全民科学素质行动
科学教育专栏

[数学杂谈]

一种逼近 $\sqrt{3}$ 的分数数列及其逼近的误差

文_吴朝阳

吴朝阳，数学博士，历史学博士，计算机科学硕士，
目前任教于南京大学。



人们早就知道 3 的平方根不是有理数，也即是说， $\sqrt{3}$ 不能表示成分数。因为这个原因，寻找数值上接近 $\sqrt{3}$ 的分数（有理数）就成为一个古人很乐于研究的问题，本专栏以前提到的阿基米德近似公式，就是一个著名的例证。 $\sqrt{3}$ 虽然如刘徽所说是“开之不尽”，但却可以不断地“开”，不断地逼近。因此，人们就寻找数值上逐步逼近 $\sqrt{3}$ 的分数数列。

思考和实践都告诉我们，存在无穷多种逼近 $\sqrt{3}$ 的分数数列。我们在这里只介绍 1 个特别的数列，我们将从这个数列出发，带领大家欣赏琳琅满目的数学宝藏。

◎ 数列的定义

我们先定义 2 个数列 $\{z_n\}, \{m_n\}$ ：

$$m_0 = 1, z_0 = 2;$$

$$z_{n+1} = 2z_n + 3m_n;$$

$$m_{n+1} = z_n + 2m_n.$$

然后，我们用以上 2 个数列定义 1 个新数列 $\{x_n\}$ ：

$$x_n = \frac{z_n}{m_n}.$$

对上述数列 $\{x_n\}$ ，有以下定理 1：

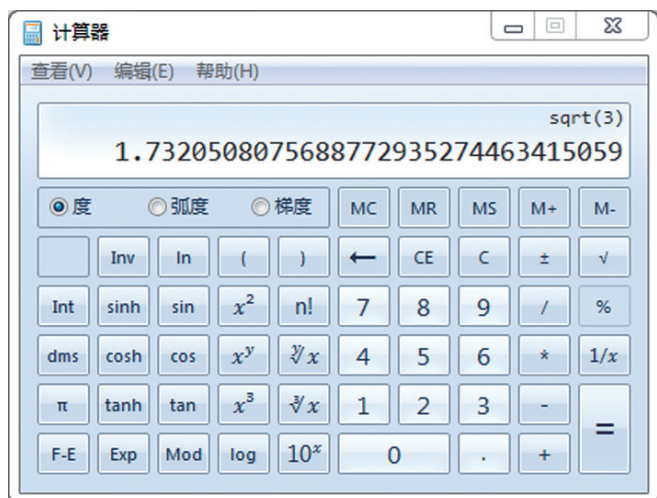
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{3}.$$

◎ 定理 1 的证明

根据 $\{z_n\}, \{m_n\}$ 的定义，容易得到：

$$x_0 = 2, \text{ 且:}$$

$$x_{n+1} = \frac{z_{n+1}}{m_{n+1}} = \frac{2z_n + 3m_n}{z_n + 2m_n} = \frac{2x_n + 3}{x_n + 2}.$$



由

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + 3}{x_n + 2} = 2 - \frac{1}{x_n + 2},$$

用数学归纳法不难证明： $\{x_n\}$ 严格单调减有下界，因此是一个收敛数列。

设 $\{x_n\}$ 收敛于 A ，则有：

$$A = \frac{2A + 3}{A + 2}.$$

此即 $A^2 = 3$ ，故数列 $\{x_n\}$ 的极限为 $\sqrt{3}$ 。

◎ 数列 $\{x_n\}$ 收敛速度估计

定理 1 告诉我们，数列 $\{x_n\}$ 以 $\sqrt{3}$ 为极限，我们因此得到 1 个数值逐步逼近 $\sqrt{3}$ 的分数的数列。问题是：有的数列收敛速度快，有的则收敛速度慢。收敛速度快的数列当然更受人们的青睐，因为用那样的数列很快就可以得到其极限的高精度近似值。因此，数列 $\{x_n\}$ 的收敛速度是一个值得关心的问题。

其实，数列 $\{x_n\}$ 的收敛性有比上节更有技巧的证明方法，我们现在就用这个方法估计数列的收敛速度。

$$x_{n+1}^2 - 3 = \frac{(2x_n + 3)^2}{(x_n + 2)^2} - 3 = \frac{x_n^2 - 3}{(x_n + 2)^2}$$

用归纳法容易证明： $x_n > \sqrt{3}$ 对所有正整数成立，因此易得：

$$0 < x_{n+1}^2 - 3 < \frac{|x_n^2 - 3|}{(\sqrt{3} + 2)^2} \cdots < \frac{|x_0^2 - 3|}{(\sqrt{3} + 2)^{2(n+1)}} = \frac{1}{(\sqrt{3} + 2)^{2(n+1)}}.$$

由于 $(x_n + \sqrt{3}) > 2\sqrt{3}$ 对所有正整数 n 成立，故记误差 $\varepsilon_n = |x_n - \sqrt{3}|$ ，则有：

$$\varepsilon_n = |x_n - \sqrt{3}| = \frac{x_n^2 - 3}{x_n + 3} < \frac{1}{2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + 2)^{2n}}.$$

也就是说，以 x_n 作为 $\sqrt{3}$ 的近似值，其绝对误差小于 $\frac{1}{2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + 2)^{2n}}$ 。

◎ 利用数列 $\{x_n\}$ 估算 $\sqrt{3}$ 至小数点后 6 位

以上误差估计式可以用来判断数列 $\{x_n\}$ 与 $\sqrt{3}$ 的接近程度，因此可以用以得到符合要求精度的近似分数。例如，若我们要求 $\sqrt{3}$ 精确到小数点之后 6 位的分数，依四舍五入规则，即要求绝对误差 $\varepsilon_n < 0.5 \times 10^{-6}$ 。

由误差估计式 $\frac{1}{2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + 2)^{2n}} < \frac{1}{2 \times 10^6}$ ，容易解得：

$n > 5.06$ 。由于误差估计公式高估了误差的数值，因此我们猜测 x_5 可能已经是符合条件的通项。列表计算 $\{z_n\}, \{m_n\}$ 如下：

n	z	m
0	1	1
1	7	4
2	26	15
3	97	56
4	362	209
5	1351	780

因此， $x_5 = \frac{1351}{780} \approx 1.73205128$ 。计算可得，这一近似的

绝对误差约为 0.474×10^{-6} 。

本篇开始时，先定义数列 $\{z_n\}, \{m_n\}$ ，然后再用它们来定义数列 $\{x_n\}$ 。数列 $\{x_n\}$ 的这种定义方式看起来是把事情复杂化了，但是这种定义方式可以方便地应用递推公式，逐次给出逼近 $\sqrt{3}$ 的分数之分子和分母。此外，这种定义方式明显地建立了 $\{x_n\}$ 与此前我们介绍的丢番图方程的联系——没错， (z_n, m_n) 就是本专栏第 2 期中丢番图方程 (1) 的第 n 组解，我们这里是用数列的形式重新讲述，并作了关于逼近误差的讨论。■

