



全民科学素质行动
科学教育专栏

[数学杂谈]

两个趣味数字问题

文_吴朝阳

吴朝阳，数学博士，历史学博士，计算机科学硕士，
目前任教于南京大学。



本期我们介绍 2 个趣味数字问题，它们的形式是相似的：给定 1 个含有未知数字的算式，要求根据算式推算出其中的未知数字。这 2 个问题，第 1 个改编自 1 个历史悠久且流传广泛的趣味数字问题；第 2 个则是我自己最近的创作。这 2 个问题有 2 个共同点，一是它们都包含有趣味数字；二是它们所需的知识只是小学算术，但需要较强的分析思考能力才能解决。因此，这 2 个问题不仅锻炼我们的分析思考能力，同时也介绍了 2 个有趣的数字。

问题 1：设 A、B、C、D、E、F 分别表示 1 个十进制的数字，ABCDEF 表示 1 个其个、十、百、千、万、十万位依次是 F、E、D、C、B、A 的 6 位数。将 ABCDEF 的前 3 位挪到后面，得到另一个 6 位数 DEFABC。已知这 2 个 6 位数满足等式 $ABCDEF \times 6 = DEFABC$ 。

试问：A、B、C、D、E、F 分别是什么数字？

解：为讨论方便，我们用 2 个变量分别表示 3 位数 ABC 及 DEF，即记： $x = ABC$ ， $y = DEF$ 。

据此，我们有 $(10^3 \times x + y) \times 6 = 10^3 \times y + x$ 。

移项整理，易得 $5999 \times x = 994 \times y$ 。

用辗转相除法求得 5999 与 994 的最大公因数为 7。将上述等式两边同时除以 7，我们得到 $857 \times x = 142 \times y$ 。

由于 y 是 1 个 3 位数，因而据以上等式的左边，可得 $x = 142$ ， $y = 857$ 。因此，我们得到：

A、B、C、D、E、F 依次是 1、4、2、8、5、7。

原问题中的乘法算式则是： $142857 \times 6 = 857142$ 。

很多读者可能以前就知道，142857 是个有趣的数字，它乘以 1、2、3、4、5、6 所得的结果，仍然是由 1、4、2、8、5、7 构成的 6 位数，并且数字间的顺序非常有规律：

$$142857 \times 1 = 142857; 142857 \times 2 = 285714;$$

$$142857 \times 3 = 428571; 142857 \times 4 = 571428;$$

$$142857 \times 5 = 714285; 142857 \times 6 = 857142.$$

更有趣的是：142857 其实是循环小数 $1/7$ 的循环节，即：

$$1/7 = 0.142857142857\ldots$$

问题 2：设 A、B、C、D、E、W、X、Y、Z 分别表示 1, 2, …, 9 中的 1 个数字，它们所表示的数字各不相同。DCBA0WXYZ 与 ZB0YDEWAC 是各有 1 个 0 及 8 个未知数字的 2 个 9 位数，它们满足

$$DCBA0WXYZ \times E = ZB0YDEWAC.$$

试问：A、B、C、D、E、W、X、Y、Z 分别是什么数字？

解：由于 1 个自然数乘以 10 以内的自然数只可能进 1 位，因此上述已知等式可以拆成如下 2 个等式：

$$\textcircled{1} DCBA \times E = ZB0Y; \textcircled{2} WXYZ \times E = DEWAC.$$

我们从讨论 E 的数值入手。

(1) 由于 $\textcircled{2}$ 式的乘法结果进位，所以 E 不可能等于 1。由于 $\textcircled{1}$ 式没有进位，所以 E 不可能等于 9。再有，所有字母所代表数字各不相同，而乘以 5 的结果是 1 个尾数为 0 或者 5 的数，所以 E 不可能等于 5。

(2) 假设 $E=2$ 。则由 $\textcircled{2}$ 式知，左边 4 位数乘以 2 的结果是 1 个万位数字等于 D 的 5 位数，因此 $D=1$ 。此时， $\textcircled{2}$ 式即为： $WXYZ \times 2 = 12WAC$ 。

上式右边为 12WAC，故其左边之 $W=6$ ，此式化为：

$$6XYZ \times 2 = 126AC.$$

据此，容易得到 X 的值： $X=3$ 。

现在考虑 $\textcircled{1}$ 式，由 $D=1$ 及 $E=2$ ，知等式为 $1CBA \times 2 = ZB0Y$ ，其右边的首位只能是 2 或者 3，这与 $E=2$ 及 $X=3$ 相矛盾！因此 E 不能等于 2。

(3) 现在，假设 $E=3$ 。则由 $\textcircled{2}$ 式知， $D=1$ 或 $D=2$ 。

若 $D=1$ ，则 $\textcircled{2}$ 式为： $WXYZ \times 3 = 13WAC$ 。

将右边除以 3，得左边的首位数字 W 的值等于 4。据此， $\textcircled{2}$ 式即化为： $4XYZ \times 3 = 134AC$ 。

此式右边为 134AC，这不难推得左边第 2 数字 X 也是 4，

与 W 的取值相矛盾！因此，D 只可能等于 2。

现在设 $D=2$ ，则②式右边为 $23WAC$ ，故左边的 W 等于 7。因此，②式右边为 $237AC$ ，这使得左边为 $79YZ$ 。这样，我们得到： $YZ \times 3 = AC$ 。

这个等式没有进位而被乘数等于 3，因此 Y 小于 4。由于 Y 已不可能等于 2 或 3，故 $Y=1$ 。

回头考虑①式，由 $Y=1$ ，知此式为：

$$DCBA \times 3 = ZB01.$$

A 乘以 3 得到尾数 1，因此 $A=7$ 。然而这不可能——因为它与 W 的值相同！

综合以上，我们知道 E 不能等于 3。

(4) 接下来，我们假设 $E=4$ 。据①式我们知道 $ZB0Y$ 是 4 的倍数，而 $ZB00$ 是 100 的倍数，因而也是 4 的倍数，所以 Y 也是 4 的倍数。由于假设 E 等于 4，所以 Y 只能等于 8。据此，将②式约去 4，我们得到： $DCBA=25 \times ZB+2$ 。

假如 B 是偶数，则 $25 \times ZB$ 是 10 的倍数，故 $A=2$ 。由于偶数中 0、4、8、2 已被占用，故 $B=6$ 。然而，②式右边的尾数 C 也是偶数，却已无数可用，于是出现矛盾。因此，B 只能是奇数，比较以上等式两边的尾数，可得 $A=7$ 。

25 乘以奇数，最后 2 位数必然是 25 或 75，由 B 是奇数，及 $DCBA=25 \times ZB+2$ ，推得 $B=7$ ，与 A 的值冲突！

总之，以上分析证明：E 不能等于 4。

(5) 现在，我们尝试假设 $E=6$ 。由于①式没有进位，因此 $D=1$ ，并且②式化为： $WXYZ \times 6 = 16WAC$ 。将右式除以 6 得 $W=2$ ，因而此式化为：

$$2XYZ \times 6 = 162AC.$$

再作除法，知 $X=7$ ，并且由于 $27 \times 6 = 162$ ，故有：

$$YZ \times 6 = AC.$$

上式左边的乘法结果没有进位，故得 $Y=1$ ，与 D 的值矛盾！所以，E 不可能等于 6。

(6) 我们暂且跳过 7，先探讨 $E=8$ 的可能性。由于①式为 $DCBA \times 8 = ZB0Y$ ，乘法结果没有进位，因此 $DC < 13$ ，故 $D=1$ ， $C=2$ 。据此，易得右边首位数字 $Z=9$ ，即：

$$12BA \times 8 = 9B0Y.$$

显然，B 大于或等于 6。将 $B=6$ 代入，矛盾立即出现。因此，由于 8、9 已被 E、Z 占用，B 只能等于 7。将 $B=7$ 代入， $127A \times 8 = 970Y$ ，同样不可能成立。因此，E 不能等于 8。

(7) 现在，只有一种可能： $E=7$ 。

显然， $D=1$ 。因此②式化为： $WXYZ \times 7 = 17WAC$ 。

由右式除以 7，易得 $W=2$ ，②式化为：

$$2XYZ \times 7 = 172AC.$$

再考虑右式除以 7，得 $X=4$ ，并且②式变成：

$$24YZ \times 7 = 172AC.$$

两边减去 2400×7 ，则得： $YZ \times 7 = 400 + AC$ 。

据此式，易知 $Y=5$ 或 $Y=6$ 。

由于 Y 是①式的尾数，它等于 5 将导致 $A=5$ 这一矛盾结果，故 $Y=6$ 。将上式两边减去 400，我们得到：

$$20 + Z \times 7 = AC.$$

现将已确定的数字代入①式，得： $1CBA \times 7 = ZB06$ 。

由 $A \times 7$ 的尾数为 6，故 $A=8$ 。由 $20 + Z \times 7 = 8C$ ，可得 $Z=9$ ， $C=3$ 。此时除了 5 以外的所有数字都已经被占用，故 B 只能等于 5。将所有求得的数字代入①式，即 $1358 \times 7 = 9506$ ，等式成立！

综合以上，我们解得： $A=8$ ， $B=5$ ， $C=3$ ， $D=1$ ， $E=7$ ， $W=2$ ， $X=4$ ， $Y=6$ ， $Z=9$ 。而问题中的乘法等式即为：

$$135802469 \times 7 = 950617283.$$

这个问题中只有 0 是已知的，其他数字全部未知，它看起来似乎非常困难。然而，如上解答所示，只要我们拥有分析思考的能力，小学数学知识就足以解决这个问题！

我们想在这里指出的是，这个问题中的数字也是非常有趣的：等式左边的 9 位数 135802469 含有 0 ~ 9 这 10 个数字中的 9 个，唯独缺了 7 这个数字；而等式右边的 950617283 也一样，它只缺一个 4！

现在我们考虑 9 位数——我们放宽定义，将 8 位数最前面添加 1 个 0 也算成 9 位数。如果 1 个 9 位数含有 0 ~ 9 这 10 个数字中的 9 个，而唯独缺少其中的某 1 个，我们就将它称为一个“独缺数”。显然，最小的独缺数是 012345678。然而，有趣的、与本问题中的独缺数相关的，是次小的那个，即 012345679。简单验算即可以发现原问题中 2 个数字与它的关系：

$$135802469 = 012345679 \times 11;$$

$$950617283 = 012345679 \times 77.$$

那么，012345679 是不是还有其他有趣的性质？答案是“是的”，它乘以 81 以内所有不被 3 整除的自然数，所得的结果也是 1 个独缺数！因此，等于 012345679 的正整数倍的独缺数总共有 54 个，问题中出现的的就是其中的 2 个。

对于这 54 个独缺数，我们马上会问 2 个问题：独缺数缺的是哪个数字？独缺数中数字的排列有什么规律？第 1 个问题的答案是这样的：如果这个独缺数是 012345679 的 N 倍，而 N 除以 9 的余数等于 k ，则它所缺的数字是 $(9-k)$ 。以原问题中的第 2 个数字为例，它是 012345679 的 77 倍，77 除以 9 的余数为 5，所以它所缺的数字为 4。对于第 2 个问题，由于答案无法用简单明了的话来概括，我们在这里不作回答，希望有兴趣的读者自行探讨。

最后的问题是：012345679 是不是某个循环小数的循环节？答案同样是“YES”——它是 $1/81$ 的循环节：

$$1/81 = 0.012345679012345679\cdots \blacksquare$$