



全民科学素质行动
科学教育专栏

[数学杂谈]

祖冲之密率的来源

文_吴朝阳

吴朝阳，数学博士，历史学博士，计算机科学硕士，
目前任教于南京大学。



中国邮票上的祖冲之



马里发行的祖冲之邮票

《隋书·律历志》记载祖冲之通过计算得出圆周率在 3.141 592 6 与 3.141 592 7 之间这样一个堪称伟大的结果，将 3.141 592 7 与 3.141 592 6 称为圆周率的“盈朒二限”。此外，《隋书·律历志》还说祖冲之得到“密率圆径一百一十三、圆周三百五十五，约率圆径七、周二十二。”这是告诉我们，祖冲之还找到 2 个圆周率的近似分数，一个是 $22/7$ ，因为精确度相对较差而称为“约率”；另一个是 $355/113$ ，因为精确度好而称为“密率”。圆周率带 13 位小数的近似值是 3.141 592 653 589 8，由计算可知，祖冲之的密率与圆周率的差小于 0.000 000 266 77。可见，密率是 1 个非常非常接近圆周率的分数。

如果一个分数 q/p 比密率更接近圆周率，则有：

$$\left| \pi - \frac{q}{p} \right| < \left| \pi - \frac{355}{113} \right| < 0.000\,000\,266\,77。$$

因此，

$$\left| \frac{355}{113} - \frac{q}{p} \right| < \left| \pi - \frac{q}{p} \right| + \left| \pi - \frac{355}{113} \right| < 2 \times 0.000\,000\,266\,77 = 0.000\,000\,533\,54，$$

即：

$$\left| \frac{355p - 113q}{113p} \right| < 0.000\,000\,533\,54，$$

这个不等式稍加变形，即得：

$$p > \frac{|355p - 113q|}{113 \times 0.000\,000\,533\,54}。$$

由于上述不等式右侧分数的分子是非零正整数，因此有：

$$p \geq \frac{1}{113 \times 0.000\,000\,533\,54} > 16\,586.4。$$

以上不等式告诉我们，任何比密率更精确的圆周率近似分数之分子都大于 16586。换句话说，在所有分母小于 16587 的分数中，祖冲之的密率是圆周率最精确的近似！因此我们可以说，祖冲之的密率同样是我国古代数学的一个伟大成果。

如上一篇文章所述，我们有理由推测祖冲之的盈朒二限是根据某种割圆方法计算得来的，那么，他又是怎么得到密率的呢？由于《缀术》的失传，这个问题也成为中国数学史上的一个谜，于是也出现了多种猜测。

在所有猜测的祖冲之推算密率的方法中，有 2 种推算密率的方法非常巧妙，

还有1种虽然没有那么巧妙,想法却很简单。而所有这3种方法,都是基于已知的圆周率近似分数的推算方法。

刘徽已经通过割圆术计算得到3.14和3.1416两个圆周率近似值,写成既约分数分别是 $157/50$ 和 $3927/1250$,历史上将这两个分数都称为“徽率”。我们为了行文方便,在这里姑且分别称为“小微率”和“大徽率”。祖冲之显然知道刘徽的这些结果,而且知道大徽率与圆周率非常接近,只是略大了一点点。因此,有一种猜测是:祖冲之通过不定方程寻找比大徽率更精确的近似分数,并因此找到密率。这种算法的具体做法如下。

假设 q/p 是一个比 $3927/1250$ 小而又非常接近圆周率的分数。由于这个分数比 $3927/1250$ 小,故有:

$$\frac{q}{p} < \frac{3927}{1250},$$

因此,

$$3927p - 1250q > 0.$$

由于大徽率很接近但是略大于圆周率,因此可设上式左边的整数等于1,即:

$$3927p - 1250q = 1.$$

记 $q_1 = q - 3p$,则有:

$$q_1 = \frac{3927p-1}{1250} - 3p = \frac{177p-1}{1250},$$

即:

$$p = \frac{1250q_1+1}{177} = 7q_1 + \frac{11q_1+1}{177}.$$

记 $p_1 = p - 7q_1$,则:

$$p_1 = \frac{11q_1+1}{177}.$$

故得:

$$q_1 = \frac{177p_1-1}{11} = 16p_1 + \frac{p_1-1}{11}.$$

显然,使得以上方程成立 p_1 的有很多,而其中最小正整数解是 $p_1=1$ 。由此可得:

$$q_1=16, \text{ 并且}$$

$$p=7q_1+p_1=113,$$

$$q=3p+q_1=3 \times 113+16=355.$$

这样,(假设中的)祖冲之就找到了一个很接近 $3927/1250$ 的分数。通过验算发现,这个分数非常非常接近圆周率,并且比很多由其他的 p_1 得到的分数更接近圆周率。因为这个缘故,我们假设中的祖冲之便以之为密率。

以上对祖冲之密率算法的猜测,其数值基础是刘徽的大徽率,即 $3927/1250$ 。而另外有1种奇妙的猜测,其数值基础则是祖冲之的约率($22/7$)及小微率($157/50$)。具体的做法是这样的。

由于小微率 $157/50$ 小于圆周率,而约率 $22/7$ 大于圆周率,因此,我们可以假设 n 是1个正的整数或分数,使得分数 $\frac{157+n \cdot 22}{50+n \cdot 7}$ 的值与圆周率非常接近。如果据祖冲之

的盈朒二限而取圆周率的近似值为3.14159265,则有:

$$\frac{157+n \cdot 22}{50+n \cdot 7} \approx 3.14159265.$$

据此,我们容易解得:

$$n \approx \frac{50 \times 3.14159265 - 157}{22 - 7 \times 3.14159265} \approx 8.99654859.$$

显然,我们应该取 $n=9$ 。这样我们求得1个圆周率的

近似分数 $\frac{157+9 \times 22}{50+9 \times 7} = \frac{355}{113}$ 。这,就是祖冲之的密率。

第3种猜测的计算基础是祖冲之的约率,即 $22/7$ 。祖冲之知道这个分数比圆周率略大,因此,如果祖冲之求得密率的方法只是简单的试算,那么他可能计算许多形如

$\frac{22-q/p}{7}$ 及 $\frac{22}{7+q/p}$ 的分数,从中寻找与其盈朒二限最接近的一个。显然,漫无目标的试算是很浪费精力的,因而我们可以猜测,祖冲之首先想到的是简单的情形,即首先试算形如 $\frac{22-1/p}{7}$ 及 $\frac{22}{7+1/p}$ 的分数。

遵循以上这个思路,我们先来尝试寻找形如 $\frac{22}{7+1/p}$ 的分数,即考虑 $\frac{22}{7+1/p} \approx 3.14159265$,由此易得:

$$p \approx \frac{1}{22 \div 3.14159265 - 7} \approx \frac{1}{0.0028175} \approx 354.92407.$$

这样,我们得到 $p=355$,寻找到的圆周率近似分数为 $\frac{355 \times 22}{355 \times 7 + 1}$ 。由于这个分数的分母 $355 \times 7 + 1 = 2486 = 22 \times 113$,我们可以对上述分数约分,并得到既约分数 $\frac{355}{113}$ 。这,恰好就是祖冲之的密率!

现在,我们来尝试寻找形如 $\frac{22-1/p}{7}$ 的分数,即考虑

$$\frac{22-1/p}{7} \approx 3.14159265. \text{ 与上一回尝试相似,我们很容易就得到:}$$

$$p \approx \frac{1}{22 - 3.14159265 \times 7} \approx \frac{1}{0.00885145} \approx 112.97584.$$

这就是说,这回我们得到,而相应的近似分数则为 $\frac{22 \times 113 - 1}{7 \times 113}$ 。这个分数约分后得到的结果 $\frac{355}{113}$,与上一方法所得完全相同!

以上这2种计算告诉我们,从约率出发,通过如此简单的想法就可以找到密率。这使我们有理由猜测:它也完全有可能是祖冲之寻找密率时的真正做法。■