



全民科学素质行动
科学教育专栏

[数学杂谈]

祖冲之的圆周率算法的一种猜测

文_吴朝阳



吴朝阳，数学博士，历史学博士，计算机科学硕士，
目前任教于南京大学。

众所周知，祖冲之（公元 429—500）是一位古代大数学家，科技史界对他非常重视自不用说，甚至文史界对他也会有特别的关注。例如在 1933 年北京大学的入学语文试卷中，文史大家陈寅恪就以“祖冲之”为答案，拟出一道以“孙行者”为上联求对下联的试题。有趣的是，有些学生以当时的北大校长“胡适之”作答，也获得了阅卷者的首肯。

祖冲之所撰的数学著作名为《缀术》，《隋书》说《缀术》共有 6 卷，“学官莫能究其深奥，是故废而不理”。唐朝时《缀术》只有 5 卷流传，从一个侧面证明《隋书》所说不错，《缀术》有些内容连其他学者都读不懂，所以在唐朝就已经有 1 卷失传。从记载看，《缀术》大约在唐朝末期完全失传，因而祖冲之到底有多少了不起的数学成就，后人再也无从知晓。但据《隋书·律历志》记载，我们确知祖冲之通过他的计算得出了圆周率在 3.141 592 6 与 3.141 592 7 之间的结果。这个结果是古代圆周率计算中最杰出的成绩，仅凭这个结果，祖冲之就有资格进入伟大的古代数学家的名单。可惜的是，我们已经不可能确切地知道祖冲之得到这个结果的数学方法。

对于祖冲之如何得到上述结果这个问题，现代数学史专家已经作出了很多种推测。但是，我觉得我所见到的几种推测都不是很合理，因此我将在本文中给出自己的推测。

首先，刘徽所注的《九章算术》是其后所有中国古代数学家最重要的参考著作，因此我们可以肯定祖冲之计算圆周率时必然会参考刘徽的“割圆术”。刘徽利用圆的内接正 $6 \cdot 2^n$ 边形的边长和面积来估算圆周率的近似值，在计算到圆内接正 192 边形时，通过插值估计，得到圆周率的近似值为 3.141 6。然后，刘徽又用圆内接正 3 072 边形的面积验算，得到相同的结果。

很容易想到，一种改进的做法是在考虑圆的内接正 $6 \cdot 2^n$ 边形的同时，也考虑其外切正 $6 \cdot 2^n$ 边形。计算可知，同时应用内接与外切正多边形，在计算到正 3 072 边形时，可以得知圆周率值介于 3.141 592 1 与 3.141 593 7 之间。简单分析可以发现，同时应用圆的内接与外切正 $6 \cdot 2^n$ 边形的面积估算圆周率的近似值，结果并不比用边长精确。由于以上所列的估计值与祖冲之所得结果相比还有一些差距，我们因此推测：祖冲之并不仅仅是用正多边形的边长或面积来计算圆周率的值。

在使用算筹进行运算的时代，极为繁复的计算是非常非常困难的。刘徽以圆内接正 192 边形为圆周率计算的主要依据，最后计算到圆内接正 3 072 边形，

n	圆内接与外切正多边形边数	圆内接正多边形的半边长	π 的补缀估计
1	6	0.500 000 000 000 000	3.175 426 480 542 94
2	12	0.258 819 045 102 521	3.143 593 539 448 98
3	24	0.130 526 192 220 052	3.141 716 141 808 42
4	48	0.065 403 129 230 143 1	3.141 600 347 848 04
5	96	0.032 719 082 821 776 1	3.141 593 134 112 53
6	192	0.016 361 731 626 486 8	3.141 592 683 616 72
7	384	0.008 181 139 603 937 13	3.141 592 655 466 39
8	768	0.004 090 604 026 234 79	3.141 592 653 707 08
9	1 536	0.002 045 306 291 164 1	3.141 592 653 597 12
10	3 072	0.001 022 653 680 338 3	3.141 592 653 590 25

表 1

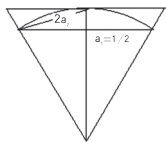
而祖冲之又肯定深受刘徽的影响,因此我们假定:祖冲之很可能用圆内接正 192 边形或者 384 边形做圆周率估算,最多计算到正 3 072 边形。那么,祖冲之应该用什么样的方法,才可以在这个计算范围内得到他那个了不起的结果呢?

刘徽用圆内接正 192 边形的边长来估计圆周率时,使用了一个理论上错误的比例插值估计,但这个插值结果的精确度与使用内接正 3 072 边形面积估计的圆周率相当接近。刘徽指出的这个事实,肯定给予祖冲之很大的启发。因此,我们猜测祖冲之肯定会寻找更好的插值算法。我们推测,祖冲之的插值方法的关键在于“缀”字!祖冲之所著的书名为《缀术》,其中“缀”字有“连缀”、“补缀”之意。祖冲之以“缀”为书名,可能是指其书对《九章算术》的“补缀”之功,对古代数学知识片断的“连缀”之力。但是,祖冲之的数学成就中只有圆周率计算被《隋书》所记载,可见圆周率计算在《缀术》中的重要地位。因此,书名《缀术》很可能也反映了祖氏计算圆周率的方法。我们因此推测,祖冲之把圆的内接与外切正多边形相互损益、补缀,用这个补缀的结果来估算圆周率。

现在的问题是:祖冲之可能怎么使用圆的内接与外切正多边形来补缀出圆面积?从圆弧的“凸”形容易知道,以圆的内接与外切正多边形面积的平均值作圆面积的近似,所得的结果会略小于圆面积的真值。因此,祖冲之可能采用非平均的、偏重于外切正多边形的补缀方式进行计算。具体地说,我们认为祖冲之可能使用 $1/3$ 内接正多边形面积加上 $2/3$ 外切正多边形面积来计算圆面积的近似值。

为什么是 $1/3$ 和 $2/3$,而不是其他(比如 $2/5$ 和 $3/5$)数值?我们没有任何过硬的依据。也许祖冲之有自己的推算和论证,也许只是因为 $1/3$ 和 $2/3$ 是最简单而偏重于外切正多边形的、非平均的补缀方式。值得指出的是, $1/3$ 和 $2/3$ 在古代是 2 个很特殊的分数,它们拥有专门的名称,分别称为“少半”和“太半”。这 2 个分数的特殊性,有可能是祖冲之采用上述这种补缀方式的原因之一。

总之,祖冲之所著的《缀术》在隋唐时已经“学官莫能究其深奥”,“是故废而不理”,更加不幸的是《缀术》早已失传,因此对其算法我们只能猜测。然而,尽管证据不足,我们这里的推测是一种以刘徽的割圆术为基础的、算理与“缀”字的字义相契合的、并且采用古代数学中简单而特殊的分数的算法。因此,猜测祖冲之采取这种算法,是一个合情合理的推断。



无论猜中与否,下面我们就以这种补缀算法来计算圆周率。假设我们(或者祖冲之)从单位圆的内接正 6 边形出发,以上述内接及外切正 $6 \cdot 2^n$ 边形的面积的补缀方法来估算单位圆面积。在左图中,我

们画出单位圆与其内接及外切正 6 边形关系图的六分之一。图中 $a_1=1/2$,内接三角形面积等于 $a_1\sqrt{1-a_1^2}$,而外接三角形的面积则为 $\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1^2}}$ 。以 $1/3$ 内接三角形与 $2/3$ 外切三角形面积之和作为图中扇形面积的近似值,则有:

$$\pi \approx 6 \cdot \frac{1}{3} \left(a_1 \sqrt{1-a_1^2} + 2 \cdot \frac{a_1}{\sqrt{1-a_1^2}} \right) = 2^1 \cdot \frac{a_1(3-a_1^2)}{\sqrt{1-a_1^2}}$$

在上图的基础上作圆的内接正 12 边形,则据勾股定理,有

$$a_2 = \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 + (1 - \sqrt{1-a_1^2})^2}$$

相应地,利用圆的内接及外切正 12 边形面积,以相同的补缀算法计算此单位圆面积的近似值,则有:

$$\pi \approx 6 \cdot 2^1 \cdot \frac{1}{3} \left(a_2 \sqrt{1-a_2^2} + 2 \cdot \frac{a_2}{\sqrt{1-a_2^2}} \right) = 2^2 \cdot \frac{a_2(3-a_2^2)}{\sqrt{1-a_2^2}}$$

总之,完整的算法是:

(1) 令 $a_1=1/2$,以递推公式

$$a_n = \frac{1}{2} \sqrt{a_{n-1}^2 + (1 - \sqrt{1-a_{n-1}^2})^2}$$

计算圆内接正 $6 \cdot 2^n$ 边形的“半边长” a_n ;

(2) 应用“半边长” a_n ,以公式

$$\pi \approx 2^n \cdot \frac{a_n(3-a_n^2)}{\sqrt{1-a_n^2}}$$

计算圆周率的近似值。

将这个算法用计算机编程进行计算,我们得到如表 1 结果。

从表 1 中可以发现,只要计算到正 384 边形,就可以得到圆周率约等于 3.141 592 655。再比较计算正 192 边形及正 768 边形时所得的圆周率值,就不难断定圆周率应该在 3.141 592 6 与 3.141 592 7 之间。由此可见,无论祖冲之是不是采用这种算法,它都是一种能够快速得到圆周率高精度近似值的方法。

那么,读者也许会问:这种方法为什么能够很快得到圆周率的高精度数值?事实上,大学 1 年级所学的一元微积分就可以回答这个问题:应用三角函数的麦克劳林展开式,可以发现这种估计的误差是扇形圆心角的五阶无穷小,而这正是其结果能很快逼近圆周率的根本原因——由于具体内容涉及高等数学,我们就不详细介绍了。

从上面的计算可知,如果祖冲之用上述方法估算圆周率,则他计算到圆内接 192 边形或 384 边形时,就可以得到远比刘徽精确的圆周率估计!猜测虽然仅仅只是猜测,但无论我们是否猜中祖冲之的算法,本篇都是很有趣的:它不仅给出一个合情合理的猜测,而且提出了一种以刘徽割圆术为基础的、计算简单而又逼近速度极快的圆周率估算法。■