

自适应最大混合熵四元数卡尔曼滤波及其应用

王国庆, 赵鑫, 王琴, 杨春雨, 马磊
(中国矿业大学 信息与控制工程学院, 徐州 221116)

摘要: 针对直接定义在四元数空间的卡尔曼滤波算法在非高斯噪声下精度退化的问题, 利用混合相关熵处理非高斯数据的优势, 定义递归结构的四元数混合相关熵代价函数, 通过固定点迭代求解后验估计, 建立最大混合熵四元数卡尔曼滤波算法。在此基础上, 进一步引入变分贝叶斯方法自适应更新主导量测噪声方差矩阵, 形成自适应最大混合熵四元数卡尔曼滤波算法, 提升了复杂场景下的状态估计精度。复杂噪声环境下的目标跟踪实验表明, 所提算法位置估计均方根误差较最大相关熵卡尔曼滤波降低约 53.2%; 复杂非高斯噪声环境下组合导航实验表明, 其姿态角、速度及位置误差较最大相关熵四元数卡尔曼滤波分别降低 70.6%、59.1%和 73.1%, 具有更好的估计精度和自适应能力。

关键词: 最大混合熵; 四元数卡尔曼滤波; 非高斯噪声; 变分贝叶斯; 组合导航

中图分类号: V249.3; U666.1

文献标志码: A

Adaptive maximum mixture correntropy quaternion Kalman filter and its application

WANG Guoqing, ZHAO Xin, WANG Qin, YANG Chunyu, MA Lei

(School of Information and Control Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)

Abstract: To address the accuracy degradation of the Kalman filter (KF) algorithm defined in quaternion space under non-Gaussian noise, the advantages of mixture correntropy is utilized to handle such problem. A recursive quaternion mixture correntropy cost function is defined and the posterior estimation through fixed-point iteration is obtained, resulting in the maximum mixture correntropy quaternion KF (MMCQKF) algorithm. Additionally, the variational Bayesian method is introduced to adaptively update the nominal measurement noise variance matrix, leading to the adaptive MMCQKF, which further improves state estimation accuracy in complex scenarios. Simulation results for target tracking in challenging noise environments show that the root mean square error of position estimation using the proposed algorithm is reduced by approximately 53.2% compared to the maximum correntropy quaternion KF. Furthermore, integrated navigation experiments conducted in complex non-Gaussian noise environments reveal that the error in attitude angle, velocity, and position achieved by the proposed algorithm are reduced by 70.6%, 59.1% and 73.1%, respectively, compared to the maximum correntropy quaternion KF. Experiments demonstrate the significant improvement in estimation accuracy and adaptive capability of the proposed algorithm.

Key words: maximum mixture correntropy; quaternion Kalman filter; non-Gaussian noise; variational Bayesian; integrated navigation

状态估计是组合导航、目标跟踪、系统控制、信息融合等众多应用领域的核心技术^[1,2]。卡尔曼滤波 (Kalman Filter, KF) 为线性高斯系统提供了多种意义

下最优的状态估计解决方案^[3]。经典的卡尔曼滤波是针对定义在实数变量空间的向量进行设计的, 在处理导航定位、姿态估计、目标跟踪等涉及到三维旋转的

收稿日期: 2024-12-14; **修回日期:** 2025-07-11

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62373362, U24A20272, 62273350, 62203448), 中国博士后科学基金 (2025T180480)

作者简介: 王国庆 (1990—), 男, 博士, 副教授, 主要研究方向为智能机器人导航定位及多传感器智能信息融合。

通讯作者: 杨春雨 (1979—), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为工业过程运行控制、物理信息系统和鲁棒控制。

估计问题时容易出现奇异性问题或者存在较多冗余变量。四元数代数在处理此类问题时提供了更为精确且数学上更易处理的解决方案,且其约束条件相对较少,可以有效规避与旋转相关的方向节锁定等问题,在数学、物理及计算机图形学等多个领域得到广泛应用。将 KF 与四元数域表示相结合,可以充分利用 KF 的状态估计方法框架和四元数表征三维空间运动的独特优势,较转化为实数域再进行状态估计能够获得更好的估计精度和数值稳定性^[4]。

针对定义在四元数上的估计问题,目前常用的四元数卡尔曼滤波器利用四变量实有序向量的形式来模拟四元数运算,即采用 $q_a, q_b, q_c, q_d \in \mathbb{R}$ 形式,而非直接采用四元数的自然表示 $q = q_a + iq_b + jq_c + \kappa q_d$ 。从方法论角度而言,直接在四元数域内构建状态估计算法,可以避免在四元数与实数之间频繁转换,也有望降低转换带来的近似误差^[5]。这种四元数表示方法在目标跟踪、航天器跟踪、电网频率估计等众多领域展现出独特的应用价值^[6,7]。

然而,全四元数卡尔曼滤波器(Fully Quaternion Kalman Filter, QKF)在实际应用中面临两大挑战^[5]。首先,此类方法是基于高斯噪声假设按照最小均方误差准则推导得到的。因此,在目标跟踪、协同导航等存在非高斯脉冲噪声干扰的场景中,QKF 算法性能会下降。其次,QKF 的推导过程依赖于高维复数-实数微积分(Hyper-complex Real Calculus, HR)导数,由于该方法未定义乘法和链式法则,导数计算尤为困难。

最大相关熵准则(Maximum Correntropy Criterion, MCC)是近年来提出的一种新的度量,由于其能够捕获更高阶矩信息而在非高斯信号处理中得到广泛应用。Chen 等人^[8]基于最大相关熵代价函数,利用固定点迭代求解方法提出了一种最大相关熵卡尔曼滤波器(Maximum Correntropy Kalman Filter, MCKF),能够显著提高非高斯噪声下状态估计精度。由于 MCKF 的估计精度受其核带宽参数影响,通常只能依赖于经验或试错法进行设定,选取不当会导致估计精度下降。针对此类问题,Chen 等人^[9]提出了混合相关熵的概念,通过采用具有不同核参数的混合熵来替代单一的高斯相关熵,基于最大混合相关熵准则(Maximum Mixture Correntropy Criterion, MMCC)的估计算法进一步提高了复杂时变噪声应用中估计精度。进一步结合 HR 运算,Ogunfunmi 等人^[10]提出了一种四元数最大相关熵算法,提高了算法在非高斯噪声下的鲁棒性。Lin 等人^[11]将 MCKF 扩展到四元数域,提出了最大相关熵四元数卡尔曼滤波(Maximum Correntropy Quaternion Kalman Filter, MCQKF),提高了 QKF 对非高斯噪声

的鲁棒性。与 MCKF 类似,MCQKF 同样面临核带宽选择困难进而影响最终的估计效果^[12]。此外,在实际应用中除异常非高斯噪声干扰外,量测噪声方差信息不精确也会导致主导协方差矩阵难以准确反映真实量测噪声特性,进而影响估计效果^[13,14]。

针对现有方法存在的不足,本文提出了一种自适应混合熵四元数卡尔曼滤波算法。首先,通过定义四元数核的最大混合熵代价函数替代现有四元数核最大熵代价函数,利用四元数迭代求解后验估计,构建了最大混合熵四元数卡尔曼滤波(Maximum Mixture Correntropy Quaternion Kalman Filter, MMCQKF)算法,显著提升了非高斯脉冲噪声环境下的估计精度。其次,引入变分贝叶斯方法自适应更新主导误差协方差矩阵,形成自适应 MMCQKF(Adaptive MMCQKF, AMMCQKF),进一步改善算法估计精度。最后,通过目标跟踪和组合导航实验验证了算法的有效性。

文中上标 $(\cdot)^T$ 表示转置, $(\cdot)^*$ 表示共轭, $(\cdot)^H$ 表示厄米算符。 \otimes 为克罗内克积, \mathbf{I}_n 表示为一个 $n \times n$ 的单位矩阵。

1 预备知识

本节介绍与后文直接相关的四元数代数基础、广义高维复数-实数微积分以及混合相关熵的基本概念。

1.1 四元数代数

四元数变量空间定义为:

$$\mathbb{H} = \{q_a + iq_b + jq_c + \kappa q_d \mid q_a, q_b, q_c, q_d \in \mathbb{R}\} \quad (1)$$

其中,基底为 $\{1, i, j, \kappa\}$, i, j, κ 为三个虚数单位,并满足哈密顿规则。

对于任意四元数 $q \in \mathbb{H}$, 均可以表示为以下标量和矢量结合的结构:

$$q = q_a + iq_b + jq_c + \kappa q_d = S_q + V_q \quad (2)$$

其中, $V_q = \Im(q) = iq_b + jq_c + \kappa q_d$ 为由三个虚部表示的矢量部分, $q_a = S_q = \Re(q)$ 为标量(实)部分。对于一个四元数变量 $q \in \mathbb{H}$, 其共轭为 $q^* = S_q - V_q$, 模为 $\|q\| = \sqrt{\langle q, q \rangle} = \sqrt{qq^*} = \sqrt{q_a^2 + q_b^2 + q_c^2 + q_d^2}$ 。

对于四元数 $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, 其乘积为:

$$q_1 q_2 = S_{q_1} S_{q_2} - V_{q_1} \cdot V_{q_2} + S_{q_2} V_{q_1} + S_{q_1} V_{q_2} + V_{q_1} \times V_{q_2} \quad (3)$$

其中,点号“ \cdot ”表示标量积,叉号“ \times ”表示向量积。由于向量积的存在,四元数积是不可交换的,即 $q_1 q_2 \neq q_2 q_1$ 。

1.2 广义高维复数-实数微积分

解决涉及四元数的优化问题通常需要目标函数的一阶或二阶导数。然而,四元数变量的实函数本质上是非解析的,传统 HR 导数引入四元数对合进行处理。

HR 微积分作为 Wirtinger 微积分的扩展，涵盖了 HR 导数及 HR*导数。

HR 微积分因缺乏乘法和链式法则而计算复杂。广义高维复数-实数微积分 (Generalized HR, GHR) 通过引入高效的乘法和链式法则解决了这一问题。尽管四元数乘法的不可交换性使得 GHR 需要分别定义左导数和右导数，但在 GHR 微积分框架内，四元数变量的实值函数左导数和右导数结果一致，即在基于四元数的优化问题中选择左右导数对最终结果并无影响。因此，本文主要介绍 GHR 框架下右导数的定义及其性质，即如果 $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ 是实可微的，那么函数 f 关于 q^μ 和 $q^{\mu*}$ 的右 GHR 导数为^[15]：

$$\begin{cases} \frac{\partial_r f}{\partial q^\mu} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial f}{\partial q_a} - l^\mu \frac{\partial f}{\partial q_b} - j^\mu \frac{\partial f}{\partial q_c} - \kappa^\mu \frac{\partial f}{\partial q_d} \right) \\ \frac{\partial_r f}{\partial q^{\mu*}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial f}{\partial q_a} + l^\mu \frac{\partial f}{\partial q_b} + j^\mu \frac{\partial f}{\partial q_c} + \kappa^\mu \frac{\partial f}{\partial q_d} \right) \end{cases} \quad (4)$$

其中， $q = q_a + iq_b + jq_c + \kappa q_d$ ， $\partial f / \partial q_i$ 为函数 f 关于 $q_i (i = a, b, c, d)$ 的导数，GHR 导数的概念在其他正交基中同样适用。

若函数 $f, g: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ 均在实域上可微，则其乘积也在实数域上可微。GHR 满足以下乘法法则^[15]：

$$\begin{cases} \frac{\partial (fg)}{\partial q^\mu} = f \frac{\partial g}{\partial q^\mu} + \frac{\partial f}{\partial q^{\mu*}} g \\ \frac{\partial (fg)}{\partial q^{\mu*}} = f \frac{\partial g}{\partial q^{\mu*}} + \frac{\partial f}{\partial q^\mu} g \end{cases} \quad (5)$$

将 GHR 乘法规则推广到四元数矩阵变量，即对于四元数函数矩阵 $H = FG$ ，其中 $H: \mathbb{H}^{N \times S} \rightarrow \mathbb{H}^{M \times P}$ ， $F: \mathbb{H}^{N \times S} \rightarrow \mathbb{H}^{M \times R}$ ， $G: \mathbb{H}^{N \times S} \rightarrow \mathbb{H}^{R \times P}$ ，则有以下关系成立^[15]：

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{Q^\mu} H = (\mathbf{I}_P \otimes F) \mathcal{D}_{Q^\mu} G + \mathcal{D}_{Q^\mu} (FG) \Big|_{G=C} \\ \mathcal{D}_{Q^{\mu*}} H = (\mathbf{I}_P \otimes F) \mathcal{D}_{Q^{\mu*}} G + \mathcal{D}_{Q^{\mu*}} (FG) \Big|_{G=C} \end{cases} \quad (6)$$

其中，雅可比矩阵的转置 $\mathcal{D}_{Q^\mu} H$ 和 $\mathcal{D}_{Q^{\mu*}} H$ 表示梯度， C 为常数矩阵，具体的推导详见文献^[15]。

1.3 四元数混合相关熵

相关熵是两个随机变量间的一种广义相似度量。给定两个四元数变量 $Q_1, Q_2 \in \mathbb{H}$ ，如果已知其联合分布函数 $F_{Q_1, Q_2}(q_1, q_2)$ ，则其相关熵定义为：

$$V^Q(Q_1, Q_2) = E[\mathcal{K}_\sigma(Q_1, Q_2)] = \int \mathcal{K}_\sigma(q_1, q_2) dF_{Q_1, Q_2}(q_1, q_2) \quad (7)$$

其中， $E(\cdot)$ 表示期望运算符， $\mathcal{K}_\sigma(\cdot)$ 表示的平移不变的 Mercer 核函数，本文选用常用的高斯核函数：

$$G_\sigma^Q(Q_1 - Q_2) = \exp\left(-\frac{|Q_1 - Q_2|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (8)$$

可以看到，核带宽 σ 是核函数中的关键参数。若核带宽选择不当，基于相关熵的算法的估计精度将会受到影响。为降低核带宽的影响，混合相关熵采用两个高斯函数的混合（线性凸组合）作为核函数，其定义为：

$$V^Q(Q_1, Q_2) = E[\alpha G_{\sigma_1}^Q(Q_1 - Q_2) + (1 - \alpha) G_{\sigma_2}^Q(Q_1 - Q_2)] \quad (9)$$

其中， σ_1 和 σ_2 是高斯函数 $G_{\sigma_1}^Q(\cdot)$ 和 $G_{\sigma_2}^Q(\cdot)$ 的核带宽， $0 \leq \alpha \leq 1$ 为混合系数。当 $\alpha = 1$ 或者 0 时，混合熵将退化传统的熵 $G_{\sigma_1}^Q(\cdot)$ 或 $G_{\sigma_2}^Q(\cdot)$ 。

实际应用中，通常难以得到 F_{Q_1, Q_2} 的联合分布函数，可以借助样本数据实现熵的估计：

$$\hat{V}^Q(Q_1, Q_2) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\alpha G_{\sigma_1}^Q(e(i)) + (1 - \alpha) G_{\sigma_2}^Q(e(i))) \quad (10)$$

其中， $e(i) = q_1(i) - q_2(i)$ ， $\{q_1(i), q_2(i)\}_{i=1}^N$ 为 F_{Q_1, Q_2} 抽取的 N 个样本。

2 主要结果

现有 MCQKF 算法是基于四元数 MCC 准则推导得到的，在实际复杂时变的非高斯噪声应用中，由于核带宽固定且主导方差缺乏自适应更新的能力会导致现有 MCQKF 估计效果下降。考虑到混合相关熵在处理非高斯噪声信号的优势，本文构建基于递归形式的四元数混合相关熵代价函数，随后借助固定点迭代进行后验估计求解，得到基于混合相关熵的四元数卡尔曼滤波算法 (MMCQKF)。在此基础上，进一步利用变分贝叶斯方法进一步实现主导噪声方差矩阵的自适应更新，提高算法的估计效果。

2.1 MMCQKF 算法

考虑一个变量均为四元数的线性离散系统，其状态空间模型可以表示为：

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i = \Phi_i \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{w}_{i-1} \\ \mathbf{y}_i = \mathbf{H}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{v}_i \end{cases} \quad (11)$$

其中， $\mathbf{x}_i \in \mathbb{H}^n$ 为 n 维四元数状态变量； $\mathbf{y}_i \in \mathbb{H}^m$ 为 m 维四元数量测向量； $\Phi_i \in \mathbb{H}^{n \times n}$ 和 $\mathbf{H}_i \in \mathbb{H}^{m \times n}$ 分别为已知的线性状态转移矩阵和量测矩阵； $\mathbf{w}_{i-1} \in \mathbb{H}^n$ 和 $\mathbf{v}_i \in \mathbb{H}^m$ 分别为相互独立的过程噪声和量测噪声，对应的主导协方差矩阵分别为 \mathbf{Q}_{i-1} 和 \mathbf{R}_i 。

与经典 KF 滤波算法类似，该算法状态估计初始化为 $\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = E[\mathbf{x}_0]$ ，相应协方差为 $\mathbf{P}_{0|0} = \mathbf{P}_0$ ，其中 \mathbf{x}_0 和 \mathbf{P}_0 为已知初始状态的均值和方差矩阵。MMCQKF 算法同样包含时间更新和量测更新两个步骤。

(1) 时间更新：

假设已经得到第 $i-1$ 时刻的状态估计值为 $\hat{\mathbf{x}}_{i-1|i-1}$ ，其估计误差协方差为 $\mathbf{P}_{i-1|i-1}$ ，则与常规 KF 一样，先验

状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_{i|j-1}$ 及其估计误差协方差 $\mathbf{P}_{i|j-1}$ 更新为:

$$\hat{\mathbf{x}}_{i|j-1} = \Phi_i \hat{\mathbf{x}}_{i-1|j-1}, \mathbf{P}_{i|j-1} = \Phi_i \mathbf{P}_{i-1|j-1} \Phi_i^H + \mathbf{Q}_{i-1} \quad (12)$$

(2) 量测更新:

根据一步预测误差的表达式并结合量测更新方程, 可以得到如下关系式成立:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{i|j-1} \\ \mathbf{y}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \mathbf{x}_i + \boldsymbol{\tau}_i \quad (13)$$

其中, 噪声项 $\boldsymbol{\tau}_i$ 为:

$$\boldsymbol{\tau}_i = \begin{bmatrix} -(\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_{i|j-1}) \\ \mathbf{v}_i \end{bmatrix} \quad (14)$$

其对应的主导协方差矩阵为:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{i|j-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{p,i|j-1} \mathbf{B}_{p,i|j-1}^H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{r,i} \mathbf{B}_{r,i}^H \end{pmatrix} = \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^H \quad (15)$$

其中, \mathbf{B}_i 可由 Cholesky 分解获得.

将式(13)的两边左乘 \mathbf{B}_i^{-1} , 可以得到:

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{W}_i \mathbf{x}_i + \boldsymbol{\zeta}_i \quad (16)$$

其中,

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{B}_i^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{i|j-1} \\ \mathbf{y}_i \end{pmatrix}, \mathbf{W}_i = \mathbf{B}_i^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\zeta}_i = \mathbf{B}_i^{-1} \boldsymbol{\tau}_i \quad (17)$$

由于 $E[\boldsymbol{\zeta}_i \boldsymbol{\zeta}_i^T] = \mathbf{I}_{m+n}$, 因此残差 $\boldsymbol{\zeta}_i$ 各元素是相互独立的.

考虑到混合相关熵在处理非高斯噪声时的优势, 在式(10)和式(17)递归形式的误差向量基础上定义如下基于 MMCC 的代价函数:

$$J(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L (\alpha G_{\sigma_1}^Q(\boldsymbol{\zeta}_{i,k}) + (1-\alpha) G_{\sigma_2}^Q(\boldsymbol{\zeta}_{i,k})) \quad (18)$$

其中, $\boldsymbol{\zeta}_{i,k} = t_{i,k} - \mathbf{w}_{i,k} \mathbf{x}_i$ 表示的 $\boldsymbol{\zeta}_i$ 第 k 个分量, $t_{i,k}$ 是 \mathbf{T}_i 的第 k 个元素, $\mathbf{w}_{i,k}$ 是 \mathbf{W}_i 的第 k 行, $L = m+n$ 为 \mathbf{T}_i 的维数.

注 1: 本文代价函数是在现有相关熵代价函数基础上的扩展. 可以证明, 针对线性高斯噪声系统的极大后验估计可以转化为求解二范数形式的代价函数问题, 但是在非高斯噪声场景下其性能退化严重. 现有 MCKF 利用相关熵在非高斯信息处理的的优势, 将二范数形式代价函数替换为单核相关熵的形式, 提高了其估计性能, 但是存在对于核带宽参数选择敏感的问题. 本文进一步提出了在四元数域下的混合相关熵代价函数, 以期能够实现更好的估计性能.

通过求解以上代价函数, 可以得到 MMCC 准则下, 系统状态 \mathbf{x}_i 的最优估计为:

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \arg \max_{\mathbf{x}_i} J(\mathbf{x}_i) = \arg \max_{\mathbf{x}_i} \sum_{k=1}^L (\alpha G_{\sigma_1}^Q(\boldsymbol{\zeta}_{i,k}) + (1-\alpha) G_{\sigma_2}^Q(\boldsymbol{\zeta}_{i,k})) \quad (19)$$

利用定义在四元数上的 GHR 导数链式规则和四

元数矩阵导数规则, 可以得到:

$$\frac{\partial J(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \left(\alpha G_{\sigma_1}^Q(\boldsymbol{\zeta}_{i,k}) \left(-\frac{1}{2\sigma_1^2} \right) \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}_{i,k}^* \boldsymbol{\zeta}_{i,k}}{\partial \mathbf{x}_i} + (1-\alpha) G_{\sigma_2}^Q(\boldsymbol{\zeta}_{i,k}) \left(-\frac{1}{2\sigma_2^2} \right) \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}_{i,k}^* \boldsymbol{\zeta}_{i,k}}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}_{i,k}^* \boldsymbol{\zeta}_{i,k}}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^H &= \mathcal{D}_{\mathbf{x}_i} (t_{i,k} - \mathbf{w}_{i,k} \mathbf{x}_i)^* (t_{i,k} - \mathbf{w}_{i,k} \mathbf{x}_i) = \mathcal{D}_{\mathbf{x}_i} t_{i,k}^* t_{i,k} - \\ &\mathcal{D}_{\mathbf{x}_i} t_{i,k}^* \mathbf{w}_{i,k} \mathbf{x}_i - \mathcal{D}_{\mathbf{x}_i} \mathbf{x}_i^H \mathbf{w}_{i,k}^H t_{i,k} + \mathcal{D}_{\mathbf{x}_i} \mathbf{x}_i^H \mathbf{w}_{i,k}^H \mathbf{w}_{i,k} \mathbf{x}_i = \\ &-t_{i,k}^* \mathbf{w}_{i,k} + \frac{1}{2} (\mathbf{w}_{i,k}^H t_{i,k})^H + \mathbf{x}_i^H \mathbf{w}_{i,k}^H \mathbf{w}_{i,k} - \\ &\frac{1}{2} (\mathbf{w}_{i,k}^H \mathbf{w}_{i,k} \mathbf{x}_i)^H = -\frac{1}{2} t_{i,k}^* \mathbf{w}_{i,k} + \frac{1}{2} \mathbf{x}_i^H \mathbf{w}_{i,k}^H \mathbf{w}_{i,k} \end{aligned} \quad (21)$$

利用式(20)和式(21), 可以将式(18)整理为如下结构:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} &= \rho_1 \sum_{k=1}^{m+n} G_{\sigma_1}^Q(\boldsymbol{\zeta}_{i,k}) \mathbf{w}_{i,k}^H (t_{i,k} - \mathbf{w}_{i,k} \mathbf{x}_i) + \\ &\rho_2 \sum_{k=1}^{m+n} G_{\sigma_2}^Q(\boldsymbol{\zeta}_{i,k}) \mathbf{w}_{i,k}^H (t_{i,k} - \mathbf{w}_{i,k} \mathbf{x}_i) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

其中, $\rho_1 = -\frac{\alpha}{2(m+n)\sigma_1^2}$ 和 $\rho_2 = -\frac{1-\alpha}{2(m+n)\sigma_2^2}$ 为常数.

整理式(22), 可以得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &= (\boldsymbol{\psi}_i \mathbf{w}_{i,k}^H \mathbf{w}_{i,k})^{-1} (\boldsymbol{\psi}_i \mathbf{w}_{i,k}^H t_{i,k}) = \\ &\left(\frac{\alpha}{\sigma_1^2} \mathbf{W}_i^H \boldsymbol{\Omega}_{1,i} \mathbf{W}_i + \frac{1-\alpha}{\sigma_2^2} \mathbf{W}_i^H \boldsymbol{\Omega}_{2,i} \mathbf{W}_i \right)^{-1} \times \\ &\left(\frac{\alpha}{\sigma_1^2} \mathbf{W}_i^H \boldsymbol{\Omega}_{1,i} \mathbf{T}_i + \frac{1-\alpha}{\sigma_2^2} \mathbf{W}_i^H \boldsymbol{\Omega}_{2,i} \mathbf{T}_i \right) = f(\mathbf{x}_i) \end{aligned} \quad (23)$$

其中,

$$\boldsymbol{\psi}_i = \frac{\alpha}{\sigma_1^2} \sum_{k=1}^{m+n} G_{\sigma_1}^Q(\boldsymbol{\zeta}_{i,k}) + \frac{1-\alpha}{\sigma_2^2} \sum_{k=1}^{m+n} G_{\sigma_2}^Q(\boldsymbol{\zeta}_{i,k}) \quad (24)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{1,i} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{p,i}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}_{r,i}^1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Omega}_{2,i} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{p,i}^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}_{r,i}^2 \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Omega}_{p,i}^1 = \text{diag}(G_{\sigma_1}^Q(\boldsymbol{\zeta}_{1,k}), G_{\sigma_1}^Q(\boldsymbol{\zeta}_{2,k}), \dots, G_{\sigma_1}^Q(\boldsymbol{\zeta}_{n,k})) \\ \boldsymbol{\Omega}_{p,i}^2 = \text{diag}(G_{\sigma_2}^Q(\boldsymbol{\zeta}_{1,k}), G_{\sigma_2}^Q(\boldsymbol{\zeta}_{2,k}), \dots, G_{\sigma_2}^Q(\boldsymbol{\zeta}_{n,k})) \\ \boldsymbol{\Omega}_{r,i}^1 = \text{diag}(G_{\sigma_1}^Q(\boldsymbol{\zeta}_{(n+1),k}), G_{\sigma_1}^Q(\boldsymbol{\zeta}_{(n+2),k}), \dots, G_{\sigma_1}^Q(\boldsymbol{\zeta}_{(n+m),k})) \\ \boldsymbol{\Omega}_{r,i}^2 = \text{diag}(G_{\sigma_2}^Q(\boldsymbol{\zeta}_{(n+1),k}), G_{\sigma_2}^Q(\boldsymbol{\zeta}_{(n+2),k}), \dots, G_{\sigma_2}^Q(\boldsymbol{\zeta}_{(n+m),k})) \end{cases} \quad (26)$$

由于 $\boldsymbol{\zeta}_{i,k} = t_{i,k} - \mathbf{w}_{i,k} \mathbf{x}_i$, 因此式(23)最优解实际上是 \mathbf{x}_i 的不动点方程, 具有如下结构:

$$\mathbf{x}_i = f(\mathbf{x}_i) \quad (27)$$

为获得 \mathbf{x}_i 的估计值, 可以用以下四元数不动点迭代算法求解:

$$\hat{\mathbf{x}}_{ij}^{(t+1)} = f(\hat{\mathbf{x}}_{ij}^{(t)}) \quad (28)$$

其中, 上标 t 表示固定点迭代次数, $\mathbf{x}_{ij}^{(t)}$ 表示第 t 次迭代的估计值。

此时, 对应式(23)中的中间变量有:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\sigma_1^2} (\mathbf{W}_i^{(t)})^H \boldsymbol{\Omega}_{1,i} \mathbf{W}_i^{(t)} + \frac{1-\alpha}{\sigma_2^2} (\mathbf{W}_i^{(t)})^H \boldsymbol{\Omega}_{2,i} \mathbf{W}_i^{(t)} = \\ & (\mathbf{B}_{p,i|j-1}^{-1(t)})^H \left(\frac{\alpha}{\sigma_1^2} \boldsymbol{\Omega}_{p,i}^1 + \frac{1-\alpha}{\sigma_2^2} \boldsymbol{\Omega}_{p,i}^2 \right) \mathbf{B}_{p,i|i-1}^{-1(t)} + \\ & (\mathbf{H}_i^{(t)})^H (\mathbf{B}_{r,i}^{-1(t)})^H \left(\frac{\alpha}{\sigma_1^2} \boldsymbol{\Omega}_{r,i}^1 + \frac{1-\alpha}{\sigma_2^2} \boldsymbol{\Omega}_{r,i}^2 \right) \mathbf{B}_{r,i}^{-1(t)} \mathbf{H}_i^{(t)} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\sigma_1^2} (\mathbf{W}_i^{(t)})^H \boldsymbol{\Omega}_{1,i} \mathbf{T}_i^{(t)} + \frac{1-\alpha}{\sigma_2^2} (\mathbf{W}_i^{(t)})^H \boldsymbol{\Omega}_{2,i} \mathbf{T}_i^{(t)} = \\ & (\mathbf{B}_{p,i|j-1}^{-1(t)})^H \left(\frac{\alpha}{\sigma_1^2} \boldsymbol{\Omega}_{p,i}^1 + \frac{1-\alpha}{\sigma_2^2} \boldsymbol{\Omega}_{p,i}^2 \right) \hat{\mathbf{x}}_{ij-1}^{(t)} + \\ & (\mathbf{H}_i^{(t)})^H (\mathbf{B}_{r,i}^{-1(t)})^H \left(\frac{\alpha}{\sigma_1^2} \boldsymbol{\Omega}_{r,i}^1 + \frac{1-\alpha}{\sigma_2^2} \boldsymbol{\Omega}_{r,i}^2 \right) \mathbf{B}_{r,i}^{-1(t)} \mathbf{y}_i \end{aligned} \quad (30)$$

为方便后面运算, 令:

$$\boldsymbol{\Pi}_{p,i|j-1}^{(t)} = \frac{\alpha}{\sigma_1^2} \boldsymbol{\Omega}_{p,i}^1 + \frac{1-\alpha}{\sigma_2^2} \boldsymbol{\Omega}_{p,i}^2 \quad (31)$$

$$\boldsymbol{\Pi}_{r,i}^{(t)} = \frac{\alpha}{\sigma_1^2} \boldsymbol{\Omega}_{r,i}^1 + \frac{1-\alpha}{\sigma_2^2} \boldsymbol{\Omega}_{r,i}^2 \quad (32)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{ij-1}^{(t)} = \mathbf{B}_{p,i|j-1}^{-1(t)} \boldsymbol{\Pi}_{p,i|i-1}^{-1(t)} \mathbf{B}_{p,i|i-1}^H \quad (33)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_i^{(t)} = \mathbf{B}_{r,i} \boldsymbol{\Pi}_{r,i}^{-1(t)} \mathbf{B}_{r,i}^H \quad (34)$$

利用矩阵逆引理, 式(29)可以计算为:

$$\left(\frac{\alpha}{\sigma_1^2} \mathbf{W}_i^H \boldsymbol{\Omega}_{1,i} \mathbf{W}_i + \frac{1-\alpha}{\sigma_2^2} \mathbf{W}_i^H \boldsymbol{\Omega}_{2,i} \mathbf{W}_i \right)^{-1} = \quad (35)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{ij-1}^{(t)} - \hat{\mathbf{P}}_{ij-1}^{(t)} (\mathbf{H}_i^{(t)})^H \left((\mathbf{H}_i^{(t)})^H \hat{\mathbf{P}}_{ij-1}^{(t)} (\mathbf{H}_i^{(t)}) + \bar{\mathbf{R}}_i^{(t)} \right)^{-1} \mathbf{H}_i^{(t)} \hat{\mathbf{P}}_{ij-1}^{(t)}$$

进一步, 由式(17)、式(33)和式(34)可以得到:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\sigma_1^2} \mathbf{W}_i^H \boldsymbol{\Omega}_{1,i} \mathbf{T}_i + \frac{1-\alpha}{\sigma_2^2} \mathbf{W}_i^H \boldsymbol{\Omega}_{2,i} \mathbf{T}_i = \\ & \left(\hat{\mathbf{P}}_{ij-1}^{(t)} \right)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{ij-1}^{(t)} + (\mathbf{H}_i^{(t)})^H \left(\bar{\mathbf{R}}_i^{(t)} \right)^{-1} \mathbf{y}_i \end{aligned} \quad (36)$$

根据式(23)、式(35)和式(36), 可以得到后验状态估计为:

$$\hat{\mathbf{x}}_{c,ij}^{(t+1)} = \hat{\mathbf{x}}_{ij}^{(t+1)} = \hat{\mathbf{x}}_{ij-1}^{(t)} + \mathbf{K}_i^{(t)} \left(\mathbf{y}_i - \mathbf{H}_i^{(t)} \hat{\mathbf{x}}_{ij-1}^{(t)} \right) \quad (37)$$

其中,

$$\mathbf{K}_i^{(t)} = \hat{\mathbf{P}}_{ij-1}^{(t)} (\mathbf{H}_i^{(t)})^H \left((\mathbf{H}_i^{(t)})^H \hat{\mathbf{P}}_{ij-1}^{(t)} (\mathbf{H}_i^{(t)}) + \bar{\mathbf{R}}_i^{(t)} \right)^{-1} \quad (38)$$

最后, 后验协方差矩阵可以表示为:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{c,ij}^{(t+1)} = \mathbf{P}_{ij}^{(t+1)} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_i^{(t)} \mathbf{H}_i^{(t)}) \mathbf{P}_{ij-1}^{(t)} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_i^{(t)} \mathbf{H}_i^{(t)})^H + \\ & \mathbf{K}_i^{(t)} \mathbf{R}_i (\mathbf{K}_i^{(t)})^H \end{aligned} \quad (39)$$

为便于理解, MMCQKF 算法在一个采样周期内

的伪代码在算法 1 中给出。

算法 1 MMCQKF 算法

输入: $\hat{\mathbf{x}}_{i-1|j-1}, \mathbf{P}_{i-1|j-1}, \boldsymbol{\Phi}_{i-1}, \mathbf{H}_i, \mathbf{R}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{Q}_{i-1}, \sigma_1, \sigma_2, t$

时间更新:

根据式(12)利用 $\hat{\mathbf{x}}_{i-1|j-1}$ 和 $\mathbf{P}_{i-1|j-1}$ 计算 $\hat{\mathbf{x}}_{ij-1}$ 和 \mathbf{P}_{ij-1} ;

量测更新:

初始化: $\hat{\mathbf{x}}_{ij}^{(0)} = \hat{\mathbf{x}}_{ij-1}, \mathbf{P}_{ij}^{(0)} = \mathbf{P}_{ij-1}$;

利用四元数 Cholesky 分解得到 $\mathbf{B}_{p,i|j-1}$ 和 $\mathbf{B}_{r,i}$;

根据式(17)计算 \mathbf{T}_i 和 \mathbf{W}_i ;

四元数不动点迭代:

FOR $t=1, \dots, N$

 根据式(25)、式(26)、式(31)和式(32)计算 $\boldsymbol{\Pi}_{p,i|j-1}^{(t)}$

 和 $\boldsymbol{\Pi}_{r,i}^{(t)}$;

 根据式(37)计算 $\hat{\mathbf{x}}_{ij}^{(t+1)}$;

 根据式(39)计算 $\mathbf{P}_{ij}^{(t+1)}$;

END FOR

根据 $\hat{\mathbf{x}}_{ij} = \hat{\mathbf{x}}_{ij}^{(t+1)}, \mathbf{P}_{ij} = \mathbf{P}_{ij}^{(t+1)}$ 更新 $\hat{\mathbf{x}}_{ij}, \mathbf{P}_{ij}$;

输出: $\hat{\mathbf{x}}_{ij}, \mathbf{P}_{ij}$

2.2 AMMCQKF 算法

MMCQKF 算法能够有效抑制偏离主导分布的异常值。然而, 在复杂应用中, 测量环境的多变会导致量测噪声时变, 使得量测噪声主导协方差矩阵难以准确表征真实噪声特性。由于 MMCQKF 对量测噪声方差矩阵的利用能力有限, 可能导致滤波精度下降。为此, 本节采用基于变分贝叶斯的后验量测噪声方差更新方法, 以更准确地反映系统噪声的动态变化, 从而提升滤波精度和稳定性。

利用逆威沙特分布对主导量测噪声协方差矩阵 \mathbf{R}_i 进行建模^[16]:

$$p(\mathbf{R}_i | \mathbf{y}_{1:i-1}) = IW(\mathbf{R}_i; \hat{\mathbf{u}}_{ij-1}, \hat{\mathbf{U}}_{ij-1}) \quad (40)$$

其中, $p(\cdot)$ 表示概率密度函数, $IW(\cdot)$ 表示逆威沙特分布, $\hat{\mathbf{u}}_{ij-1}$ 和 $\hat{\mathbf{U}}_{ij-1}$ 分别为 $p(\mathbf{R}_i | \mathbf{y}_{1:i-1})$ 的自由度参数和逆尺度矩阵, 其均值设置为:

$$\frac{\hat{\mathbf{U}}_{ij-1}}{\hat{\mathbf{u}}_{ij-1} - m - 1} = \mathbf{R}_i \quad (41)$$

式(41)中, $\hat{\mathbf{u}}_{ij-1} = m + \mathcal{G} + 1$, \mathcal{G} 是量测噪声协方差矩阵的调节参数, $\hat{\mathbf{U}}_{ij-1} = \mathcal{G} \mathbf{R}_i$ 。

估计变量 \mathbf{x}_i 和 \mathbf{R}_i 需计算联合后验概率密度函数 $p(\mathbf{x}_i, \mathbf{R}_i | \mathbf{y}_{1:i})$ 。由于解析解不存在, 本文借助变分贝叶斯方法进行隐变量的近似求解。在变分贝叶斯框架下, 联合概率密度函数 $p(\mathbf{x}_i, \mathbf{R}_i | \mathbf{y}_{1:i})$ 可以近似表示为:

$$p(\mathbf{x}_i, \mathbf{R}_i | \mathbf{y}_{1:i}) \approx q(\mathbf{x}_i) q(\mathbf{R}_i) \quad (42)$$

其中, $q(\cdot)$ 表示 $p(\cdot)$ 的近似后验概率密度函数。

根据变分贝叶斯框架, 式(42)最优解可以表示为:

$$\log q(\theta) = E_{\boldsymbol{\Xi}^{-\theta}} [\log p(\boldsymbol{\Xi}, \mathbf{y}_{1:i})] + C_\theta \quad (43)$$

其中, $\log(\cdot)$ 表示对数函数运算, $\boldsymbol{\Xi} = \{\mathbf{x}_i, \mathbf{R}_i\}$, θ 是 $\boldsymbol{\Xi}$ 中的任意元素, $\boldsymbol{\Xi}^{-\theta}$ 是除 θ 之外的所有元素, C_θ 表示变量 θ 的相关的常数。可以通过固定点迭代的方法求解式(43)。

令 $\theta = \mathbf{R}_i$, 通过匹配参数, 可以发现 $q^{(l+1)}(\mathbf{R}_i)$ 后验分布为自由度参数为 $\hat{u}_i^{(l+1)}$ 、逆尺度矩阵为 $\hat{\mathbf{U}}_i^{(l+1)}$ 的逆威沙特分布:

$$q^{(l+1)}(\mathbf{R}_i) = IW(\mathbf{R}_i; \hat{u}_i^{(l+1)}, \hat{\mathbf{U}}_i^{(l+1)}) \quad (44)$$

其中,

$$\hat{u}_i^{(l+1)} = \hat{u}_{i|l-1} + 1 \quad (45)$$

$$\hat{\mathbf{U}}_i^{(l+1)} = \mathbf{B}_i^{(l)} + \hat{\mathbf{U}}_{i|l-1} \quad (46)$$

$$\mathbf{B}_i^{(l)} = (\mathbf{y}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{x}_i^{(l)}) (\mathbf{y}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{x}_i^{(l)})^H + \mathbf{H}_i^{(l)} \mathbf{P}_{i|l} \mathbf{H}_i^{(l)H} \quad (47)$$

在完成第 $l+1$ 次迭代后, 本文对似然概率密度函数进行了相应的调整与完善, 具体定义如下:

$$p^{(l+1)}(\mathbf{x}_i | \mathbf{y}_{1:i-1}) = N(\mathbf{x}_i; \hat{\mathbf{x}}_{i|l-1}, \hat{\mathbf{P}}_{i|l-1}) \quad (48)$$

$$p^{(l+1)}(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_i) = N(\mathbf{y}_i; \mathbf{H}_i \mathbf{x}_i, \hat{\mathbf{R}}_i^{(l+1)}) \quad (49)$$

其中, $N(\cdot; \mu, \Sigma)$ 表示均值为 μ 、协方差为 Σ 的高斯分布。

经过修正的量测噪声协方差矩阵, 具体如下:

$$\hat{\mathbf{R}}_i^{(l+1)} = \{E^{(l+1)}[\mathbf{R}_i^{-1}]\}^{-1} \quad (50)$$

其中, $E^{(l+1)}[\mathbf{R}_i^{-1}] = (\hat{u}_i^{(l+1)} - m - 1)(\hat{\mathbf{U}}_i^{(l+1)})^{-1}$ 。

同上, 令 $\theta = \mathbf{x}_i$, 可得:

$$q^{(l+1)}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{C_i^{(l+1)}} p^{(l+1)}(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_i) p^{(l+1)}(\mathbf{x}_i | \mathbf{y}_{1:i-1}) \quad (51)$$

其中, 常量 $C_i^{(l+1)}$ 为:

$$C_i^{(l+1)} = \int p^{(l+1)}(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_i) p^{(l+1)}(\mathbf{x}_i | \mathbf{y}_{1:i-1}) d\mathbf{x}_i \quad (52)$$

综上, 由 $q^{(l+1)}(\mathbf{x}_i)$ 可以得到高斯分布概率密度函数的更新:

$$q^{(l+1)}(\mathbf{x}_i) = N(\mathbf{x}_i; \hat{\mathbf{x}}_{i|l}^{(l+1)}, \mathbf{P}_{i|l}^{(l+1)}) \quad (53)$$

根据卡尔曼滤波的基本结果, 可以得到:

$$\mathbf{K}_i^{(l+1)} = \mathbf{P}_{i|l-1} \mathbf{H}_i^H (\mathbf{H}_i \mathbf{P}_{i|l-1} \mathbf{H}_i^H + \hat{\mathbf{R}}_i^{(l+1)})^{-1} \quad (54)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{i|l}^{(l+1)} = \hat{\mathbf{x}}_{i|l-1} + \mathbf{K}_i^{(l+1)} (\mathbf{y}_i - \mathbf{H}_i \hat{\mathbf{x}}_{i|l-1}) \quad (55)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{i|l}^{(l+1)} = \mathbf{P}_{i|l-1} - \mathbf{K}_i^{(l+1)} \mathbf{H}_i \mathbf{P}_{i|l-1} \quad (56)$$

固定点迭代 N 次之后, 变分近似的后验概率密度函数为:

$$q(\mathbf{x}_i) \approx q^{(N)}(\mathbf{x}_i) = N(\mathbf{x}_i; \hat{\mathbf{x}}_{i|N}^{(N)}, \mathbf{P}_{i|N}^{(N)}) = N(\mathbf{x}_i; \hat{\mathbf{x}}_{i|N}, \mathbf{P}_{i|N}) \quad (57)$$

$$q(\mathbf{R}_i) \approx q^{(N)}(\mathbf{R}_i) = IW(\mathbf{R}_i; \hat{u}_i^{(N)}, \hat{\mathbf{U}}_i^{(N)}) = IW(\mathbf{R}_i; \hat{u}_{i|N}, \hat{\mathbf{U}}_{i|N}) \quad (58)$$

AMMCQKF 变分贝叶斯后验更新的伪代码在算

法 2 中给出。

算法 2 AMMCQKF 算法

输入: $\hat{\mathbf{x}}_{c,i|l}, \mathbf{P}_{c,i|l}, \mathbf{R}_i, \Phi_i, \mathbf{H}_i, \mathbf{y}_i, \hat{u}_{i-1|l-1}, \hat{\mathbf{U}}_{i-1|l-1}, \mathcal{G}, N$

初始化: $\hat{\mathbf{x}}_{i|l}^{(0)} = \hat{\mathbf{x}}_{c,i|l}, \hat{u}_{i|l-1} = m + \mathcal{G} + 1, \hat{\mathbf{U}}_{i|l-1} = \mathcal{G} \mathbf{R}_i$;

变分贝叶斯迭代:

FOR $l = 0, 1, \dots, N - 1$

 根据式(44)更新 $q^{(l+1)}(\mathbf{R}_i)$;

 根据式(45)~式(47)计算 $\mathbf{B}_i^{(l)}, \hat{u}_i^{(l+1)}$ 和 $\hat{\mathbf{U}}_i^{(l+1)}$;

 根据式(53)更新 $q^{(l+1)}(\mathbf{x}_i)$;

 根据式(50)计算 $\hat{\mathbf{R}}_i^{(l+1)}$;

 根据式(54)~式(56)计算 $\mathbf{K}_i^{(l+1)}, \hat{\mathbf{x}}_{i|l}^{(l+1)}$ 和 $\hat{\mathbf{P}}_{i|l}^{(l+1)}$;

END FOR

$\hat{\mathbf{x}}_{i|N} = \hat{\mathbf{x}}_{i|N}^{(N)}, \mathbf{P}_{i|N} = \mathbf{P}_{i|N}^{(N)}, \hat{u}_{i|N} = \hat{u}_{i|N}^{(N)}, \hat{\mathbf{U}}_{i|N} = \hat{\mathbf{U}}_{i|N}^{(N)}$;

输出: $\hat{\mathbf{x}}_{i|N}, \mathbf{P}_{i|N}, \hat{u}_{i|N}, \hat{\mathbf{U}}_{i|N}$

2.3 AMMCQKF 计算复杂度分析

由于两个四元数变量之间的乘积或加法运算包含多个实值运算(四元数乘法运算等效于 16 次实数乘法和 12 次加减法操作, 而加减法则对应 4 次实数加减操作), 因此四元数算法的计算复杂度分析也不同于实值算法。根据四元数运算复杂度分析方法, 可以得到文献[11]所提出的 MCQKF 算法的计算复杂度为:

$$\begin{aligned} \pi_{\text{MCQKF}} = & (32T + 128)n^3 + (64T + 96)n^2 mn + (32T + 20)n^2 + \\ & (64T + 32)nm^2 + (84T - 4)mn + (34T - 4)n + \\ & 32Tm^3 + 2Tm + TO(n^3) + 2TO(m^3) \end{aligned} \quad (59)$$

其中, $O(m^3)$ 表示计算复杂度与 m 的立方值呈正比, T 为固定点迭代次数。

算法 1 中 MMCQKF 算法在 MCQKF 算法基础上引入混合相关熵概念, 每个迭代需额外计算双核权重及混合系数。AMMCQKF 在 MMCQKF 的基础上, 引入了变分贝叶斯方法来自适应更新量测噪声方差矩阵。根据表 1 该算法各步骤的计算量, 可以得到 AMMCQKF 算法总体的计算复杂度为:

$$\begin{aligned} \pi_{\text{AMMCQKF}} = & (32T + 128)n^3 + (64T + 96)n^2 m + (32T + 20)n^2 + \\ & (64T + 32)nm^2 + (84T - 4)nm + (34T - 4)n + \\ & 64Tm^3 + 4Tm + L(24m^3 + 18m^2 + 6m) + \\ & TO(n^3) + 2TO(m^3) \end{aligned} \quad (60)$$

表 1 AMMCQKF 的计算复杂度

Tab.1 Computational complexity of AMMCQKF

步骤	计算复杂度
状态预测相关运算	$(32T + 128)n^3 + (32T + 20)n^2 + TO(n^3)$
固定点迭代量测更新	$(64T + 96)n^2 m + (64T + 32)nm^2 + (84T - 4)nm + TO(m^3)$
变分贝叶斯迭代	$L(24m^3 + 18m^2 + 6m)$
状态与协方差更新	$(34T - 4)n + 64Tm^3 + 4Tm + TO(m^3)$

可以看出, 尽管 AMMCQKF 算法的计算复杂度相较于传统 MCQKF 算法略有提升, 但仍处于同一量

级。本文方法通过引入混合熵准则与自适应噪声估计方法，以较小的计算代价显著增强了非高斯噪声环境下状态估计的精度与鲁棒性。

3 算法仿真

本文采用目标跟踪和组合导航两个典型应用场景，对所提出的 AMMCQKF 算法与同类算法的估计性能进行比较。评价指标选用均方根误差 (Root-Mean-Square Error, RMSE) 和平均均方根误差 (Average RMSE, ARMSE) [17,18]。

3.1 目标跟踪

二维场景目标跟踪问题中状态方程和量测方程分别为：

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{w}_{i-1} \\ y_i = [1 \quad 1] \mathbf{x}_i + v_i \end{cases} \quad (61)$$

其中， $\theta = \pi/18$ ， $\mathbf{x}_i = (x_{1,i} \quad x_{2,i})^T \in \mathbb{R}^2$ 为系统状态， $\mathbf{w}_{i-1} = (w_{1,i-1} \quad w_{2,i-1})^T \in \mathbb{R}^2$ 为过程噪声， y_i 为量测值， $v_i \in \mathbb{R}$ 为量测噪声。

在仿真中，状态估计初始化为 $\hat{\mathbf{x}}_{00} = [0.1 \quad 0.1]^T$ ，初始状态为 $\mathbf{x}_0 = (1+l+j+\kappa \quad 1+l+j+\kappa)^T$ ，每种算法的初始误差协方差为 $\mathbf{P}_{00} = \text{diag}(0.1^2 \quad 0.1^2)$ 。对比算法为文献[5]的 QKF、文献[11]的 MCQKF、2.1 节的 MMCQKF 以及 2.2 节的 AMMCQKF。

本节仿真中 AMMCQKF 的初始核带宽设置为 $\sigma_1 = 3$ 和 $\sigma_2 = 5$ ，调节参数设置为 $g = 3$ ，混合系数设置为 $\alpha = 0.6$ ；MCQKF 的核带宽设置为 $\sigma_3 = 2$ ；MMCQKF1 的核带宽设置为 $\sigma_4 = 2$ 和 $\sigma_5 = 3$ ；MMCQKF2 核带宽设置为 $\sigma_6 = 6$ 和 $\sigma_7 = 8$ ；MMCQKF3 核带宽设置为 $\sigma_8 = 8$ 和 $\sigma_9 = 10$ 。

情况 1：混和高斯分布的过程噪声和量测噪声

本文考虑四元数过程噪声和量测噪声服从厚尾非高斯噪声分布，即对于 $\delta = 1, 2$ 有：

$$\begin{aligned} w_{\delta(i-1)} &= w_{\delta(i-1)}^a + w_{\delta(i-1)}^b l + w_{\delta(i-1)}^c j + w_{\delta(i-1)}^d \kappa \\ w_{\delta(i-1)}^l &\sim 0.9N(0, 0.01) + 0.1N(0, 1), l \in \{a, b, c, d\} \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} v_i &= v_i^a + v_i^b l + v_i^c j + v_i^d \kappa \\ v_i^l &\sim 0.9N(0, 0.01) + 0.1N(0, 100), l \in \{a, b, c, d\} \end{aligned} \quad (63)$$

图 1 和图 2 展示了情况 1 下各滤波算法的位置 RMSE，表 2 列出相应的 ARMSE。结果表明，当噪声偏离高斯分布时，QKF 算法的估计精度显著下降。基于相关熵策略的估计算法性能均有提升，其中 MMCQKF 的估计精度优于现有 MCQKF，而 AMMCQKF 进一步提高了估计效果。根据 ARMSE 计算结果，AMMCQKF 的位置估计误差较 MCQKF 降低

了 53.2%。

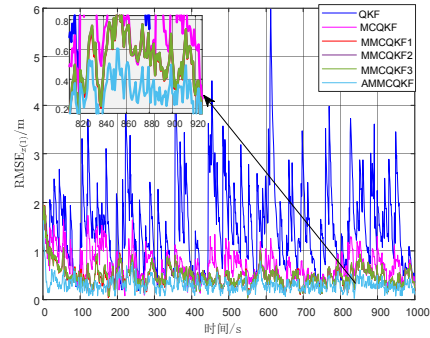


图 1 情况 1 下不同算法第一个状态变量的均方根误差
Fig.1 RMSE of the first state variable for different algorithms

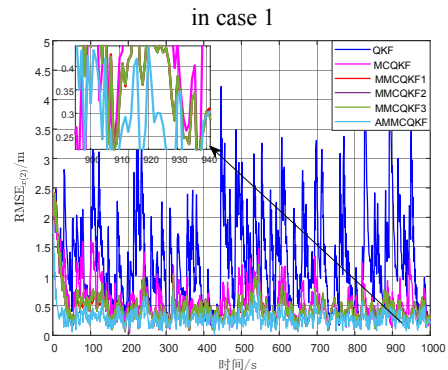


图 2 情况 1 下不同算法第二个状态变量的均方根误差
Fig.2 RMSE of the second state variable for different algorithms in case 1

表 2 情况 1 下不同算法的 ARMSE

Tab.2 ARMSE of different algorithms in case 1

算法名称	ARMSE _{x(1)}	ARMSE _{x(2)}
QKF	2.11340	1.90190
MCQKF	0.68195	0.65864
MMCQKF1	0.40919	0.36012
MMCQKF2	0.43233	0.41094
MMCQKF3	0.55647	0.53255
AMMCQKF	0.32133	0.30568

情况 2：高斯混合+冲击量测噪声

为进一步评估算法性能，在高斯混合噪声环境下，随机选取采样时刻叠加冲击噪声。冲击噪声幅值在 0 至 10 范围内随机选取，其余参数设置与情况 1 相同。

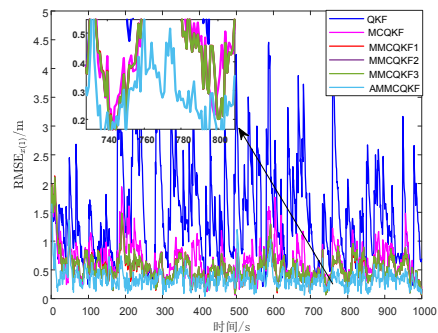


图 3 情况 2 下不同算法第一个状态变量的均方根误差
Fig.3 RMSE of the first state variable for different algorithms in case 2

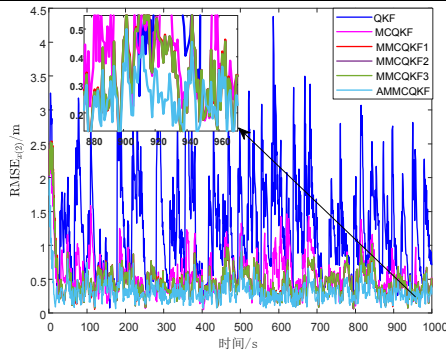


图 4 情况 2 下不同算法第二个状态变量的均方根误差
Fig.4 RMSE of the second state variable for different algorithms in case 2

表 3 情况 2 下不同算法的 ARMSE
Tab.3 ARMSE of different algorithms in case 2

算法名称	ARMSE _{x(1)}	ARMSE _{x(2)}
QKF	2.45340	2.01240
MCQKF	0.76325	0.71140
MMCQKF1	0.48258	0.47236
MMCQKF2	0.51350	0.48533
MMCQKF3	0.61320	0.59640
AMMCQKF	0.38710	0.33320

最后, 重点分析混合系数 α 对 AMMCQKF 算法估计性能的影响。固定其他参数, 只改变混合系数, 相关的仿真结果见图 5 和图 6。

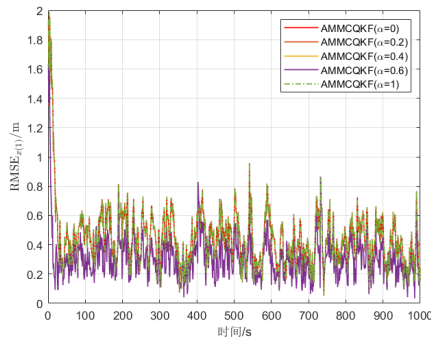


图 5 α 取不同数值时第一个状态变量的均方根误差
Fig.5 RMSE of the first state variable for different α

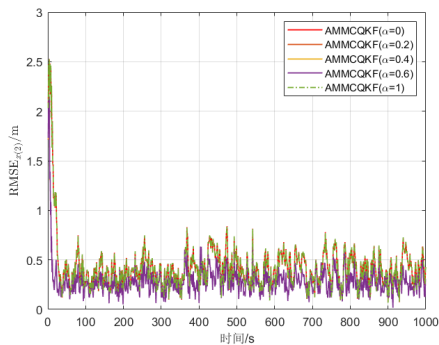


图 6 α 取不同数值时第二个状态变量的均方根误差
Fig.6 RMSE of the second state variable for different α

可以看到, 当混合系数 $\alpha \neq 0, 1$ 时, 单一核带宽的相关熵的算法估计性能会出现一定程度下降。当 $\alpha \in (0, 1)$ 时, 混合系数对所提算法的估计性能影响较

小。因此, 在没有任何先验知识的情况下, 可以简单地将混合系数设为靠近中间的数值, 如 $\alpha = 0.6$ 。

3.2 组合导航

进一步在基于松组合的 INS/GNSS 组合导航应用中验证所提算法的估计效果。本节实验将所提算法与 QKF、MCQKF 及 MMCQKF 算法进行对比。实验中, AMMCQKF 的初始核带宽为 $\sigma_1 = 13$ 和 $\sigma_2 = 15$, 调节参数为 $\vartheta = 3$, 混合系数为 $\alpha = 0.6$; MCQKF 的核带宽设置为 $\sigma_3 = 13$; MMCQKF 的核带宽设置为 $\sigma_4 = 13$ 和 $\sigma_5 = 15$ 。

选定北东地坐标系作为导航坐标系, 理想四元数姿态微分方程满足:

$$\dot{q}_b^n = \frac{1}{2} q_b^n \omega_{nb}^b = \frac{1}{2} q_b^n (\omega_{ib}^b - q_b^n \omega_{in}^n q_b^n) \quad (64)$$

其中, q_b^n 是载体坐标系 b 相对于导航坐标系 n 的理想姿态四元数; ω_{nb}^b 是 b 坐标系相对于 n 坐标系的理想角速度在 b 系下的投影, 且 $\omega_{nb}^b = \omega_{ib}^b - \omega_{in}^b$; ω_{ib}^b 是载体坐标系 b 相对于惯性坐标系 i 的理想角速度在坐标系 b 下的投影; ω_{in}^n 是导航坐标系 n 相对于惯性坐标系 i 的理想角速度在坐标系 n 下的投影。

根据惯导系统解算原理, 与式(64)类似, 可以得到实际姿态四元数微分方程:

$$\dot{q}_b^n = \frac{1}{2} q_b^n \tilde{\omega}_{nb}^b = \frac{1}{2} q_b^n (\tilde{\omega}_{ib}^b - q_b^n \tilde{\omega}_{in}^n q_b^n) \quad (65)$$

其中, q_b^n 是 b 系相对于 n 系的真实姿态四元数, $\tilde{\omega}_{ib}^b$ 是 b 系相对于 i 系的真实角速度在 b 系下的投影, $\tilde{\omega}_{in}^n$ 是 n 系相对于 i 系的真实角速度在 n 系下的投影。

由式(64)和式(65)可得, 姿态四元数的微分方程为:

$$\begin{aligned} \delta \dot{q}_b^n &= \frac{1}{2} q_b^n (\tilde{\omega}_{ib}^b - \omega_{ib}^b) q_b^n - \frac{1}{2} \tilde{\omega}_{in}^n q_b^n + \frac{1}{2} q_b^n \omega_{in}^n = \\ & \frac{1}{2} q_b^n \delta \omega_{ib}^b q_b^n - \frac{1}{2} \tilde{\omega}_{in}^n q_b^n + \frac{1}{2} q_b^n \omega_{in}^n \end{aligned} \quad (66)$$

定义速度误差为 $\delta \dot{V}^n = \dot{\tilde{V}}^n - \dot{V}^n$, 理想速度 V^n 可以由式(67)获得:

$$\dot{V}^n = f^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times V^n + g^n \quad (67)$$

其中, f^n 是理想加速度计的输出, ω_{ie}^n 是 e 系相对于 i 系的角速度在 n 系下的投影; ω_{en}^n 是 n 系相对于 e 系的角速度在 n 系下的投影, g^n 是 n 系下的重力矢量, V^n 是惯导系统的解算速度。

忽略二阶误差, 可以得到:

$$\begin{aligned} \delta \dot{V}^n &= \tilde{f}^n - f^n - (2\tilde{\omega}_{ie}^n + \tilde{\omega}_{en}^n) \times \delta V^n - \\ & (2\delta \omega_{ie}^n + \delta \omega_{en}^n) \times V^n + \delta g^n = \\ & q_b^n q_b^n f^b q_b^n q_b^n - q_b^n f^b q_b^n - (2\tilde{\omega}_{ie}^n + \tilde{\omega}_{en}^n) \times \delta V^n - \\ & (2\delta \omega_{ie}^n + \delta \omega_{en}^n) \times V^n + q_b^n q_b^n \nabla^b q_b^n q_b^n + \delta g^n \end{aligned} \quad (68)$$

其中, \tilde{f}^n 是导航坐标系 n 下加速度计的实际输出, $\tilde{f}^n = q_b^n (\mathbf{f}^b + \delta \mathbf{f}^b) q_n^b$, $\delta \mathbf{f}^b$ 是 INS 加速度计的输出偏差; $\tilde{\omega}_{ie}^n$ 、 $\tilde{\omega}_{en}^n$ 为相应位置坐标系下的角速度投影, $\delta \omega_{ie}^n$ 、 $\delta \omega_{en}^n$ 为不同角速度的误差量, $\delta \mathbf{g}^n$ 为重力向量误差, q_n^n 为理想系 n 相对于真实 n 系的姿态四元数, ∇^b 为加速度计误差。

状态向量为惯导系统导航参数误差, 则组合导航系统的状态方程为^[18]:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k|k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (69)$$

其中,

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} \varphi_N l + \varphi_E j + \varphi_D \kappa \\ \delta v_N l + \delta v_E j + \delta v_D \kappa \\ \delta p_N l + \delta p_E j + \delta p_D \kappa \\ \varepsilon_x l + \varepsilon_y j + \varepsilon_z \kappa \\ \nabla_x l + \nabla_y j + \nabla_z \kappa \end{pmatrix} \quad (70)$$

式(69)和式(70)中, \mathbf{x}_k 为 k 时刻状态向量, $\mathbf{F}_{k|k-1}$ 为 $k-1$ 时刻到 k 时刻的状态转移矩阵 (状态转移矩阵完整推导详见文献[18]), \mathbf{w}_{k-1} 为过程噪声, $\{\varphi_N, \varphi_E, \varphi_D\}$ 为 INS 姿态角误差, $\{\delta v_N, \delta v_E, \delta v_D\}$ 为 INS 速度误差, $\{\delta p_N, \delta p_E, \delta p_D\}$ 为 INS 位置误差, $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z\}$ 为陀螺仪零偏, $\{\nabla_x, \nabla_y, \nabla_z\}$ 为加速度计零偏。

测量方程可以表示为^[19]:

$$\mathbf{Z}_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (71)$$

其中, \mathbf{Z}_k 为量测向量, 是 GNSS 和 INS 位置及速度输出的差值, \mathbf{v}_k 为量测噪声。

本实验基于 Groves 团队^[20]开发的高精度惯性导航工具箱构建仿真场景。设定车辆在 60 s 内以恒定速度 20 m/s 沿平面运动, 运动轨迹包含两次相反方向的 90° 转弯, 最终生成包含复杂机动特征的惯性导航数据集。实验参数设置如表 4 所示。

表 4 实验参数设置
Tab.4 Experimental parameter settings

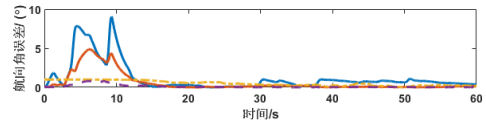
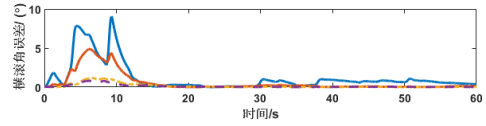
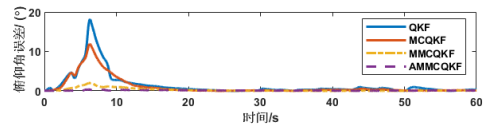
类型	仿真参数	参数值
传感器误差	陀螺仪零偏	0.01 (°) / h
	陀螺仪随机噪声	0.01 (°) / \sqrt{h}
	加速度计零偏	100 μg
初始误差	加速度计随机噪声	100 $\mu\text{g} / \sqrt{\text{Hz}}$
	姿态误差	(0.05°, 0.04°, 1°)
初始误差	速度误差	(0.013 m/s, 0.362 m/s, 0.024 m/s)
	位置误差	(0.027 m, 2.41 m, 12.99 m)

组合导航实验考虑了四元数量测噪声 $\mathbf{v}_k = (v_{1k} \ v_{2k})^T \in \mathbb{H}^2$ 为厚尾非高斯噪声的情况, 对于 $l=1, 2$ 有:

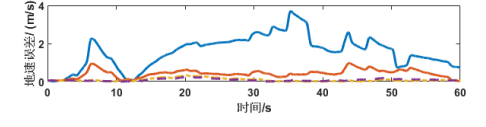
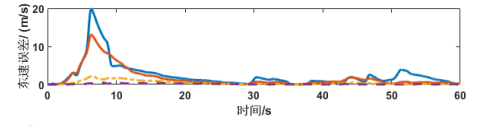
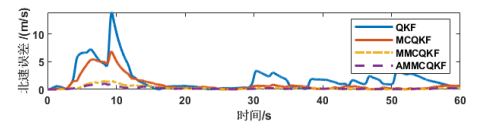
$$\begin{aligned} v_{lk} &= v_{lk}^a + v_{lk}^b l + v_{lk}^c j + v_{lk}^d \kappa \\ v_{lk}^l &\sim 0.9N(0, \mathbf{R}) + 0.1N(0, 100\mathbf{R}), l \in \{a, b, c, d\} \end{aligned} \quad (72)$$

其中, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} p_{sd}^2 & 0 \\ 0 & v_{sd}^2 \end{pmatrix}$, 位置量测噪声标准差 $p_{sd} = 2.5 \text{ m}$, 速度量测噪声标准差 $v_{sd} = 2.5 \text{ m/s}$ 。

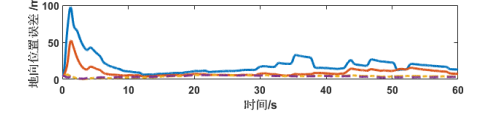
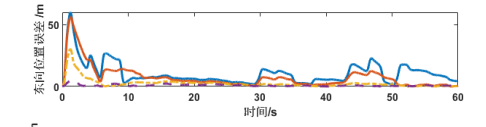
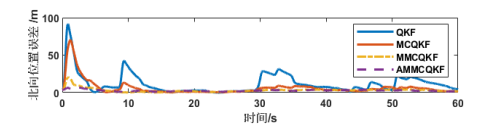
图 7 展示了在厚尾非高斯噪声情况下, 不同滤波算法的姿态误差、速度误差和位置误差的 RMSE, 相应的 ARMSE 见表 5。结果表明, AMMCQKF 的北向姿态、北向速度及东向位置误差较 MCQKF 分别降低 70.6%、59.1%和 73.1%。该结果 AMMCQKF 能有效提升组合导航系统在复杂非高斯噪声干扰下的精度。



(a) 姿态误差的均方根误差
(a) RMSE of attitude error



(b) 速度误差的均方根误差
(b) RMSE of velocity error



(c) 位置误差的均方根误差

(c) Root Mean Square Error of Position Error

图 7 组合导航中不同滤波算法的均方根误差
Fig.7 RMSE of errors for different filters in integrated navigation

表 5 组合导航模型中不同滤波算法的 ARMSE
Tab.5 ARMSE of different filtering algorithms in integrated navigation model

参数	QKF	MCQKF	MMCQKF	AMMCQKF
φ_N	0.0234	0.0051	0.0029	0.0015
φ_E	0.0155	0.0025	0.0021	0.0017
φ_D	0.0466	0.0155	0.0112	0.0089
δv_N	1.6766	0.3418	0.2855	0.1399
δv_E	1.7584	0.5356	0.4823	0.1779
δv_D	0.6396	0.1856	0.1532	0.0595
δp_N	15.8753	5.0554	4.6864	3.5485
δp_E	16.9832	4.6864	4.2101	1.2632
δp_D	12.8548	5.4535	4.9952	4.1491

4 结论

针对非高斯噪声下的四元数线性系统状态估计算法精度不高的问题, 本文基于混合相关熵特性构建递归形式的四元数混合相关熵代价函数, 在 GHR 积分框架下通过固定点迭代推导出四元数混合相关熵卡尔曼滤波算法。在此基础上, 采用变分贝叶斯方法自适应更新主导量测噪声方差矩阵, 进一步改善算法估计精度。目标跟踪和组合导航实验表明, 本文所提出的估计算法相比 QKF 和 MCQKF 具有更优的估计性能和自适应能力。

参考文献 (References):

- [1] Wang D, Wang B, Huang H, et al. Robust filter method for SINS/DVL/USBL tight integrated navigation system[J]. IEEE Sensors Journal, 2023, 23(10): 10912-10923.
- [2] 王国庆, 赵鑫, 杨春雨, 等. 煤矿地下空间定位技术研究进展[J]. 工程科学学报, 2024, 46(10): 1713-1727.
Wang G, Zhao X, Yang C, et al. Recent advances in research on underground space positioning technology for coal mining[J]. Chinese Journal of Engineering, 2024, 46(10): 1713-1727.
- [3] 杨秀建, 敖鹏, 沈世全, 等. 面向复杂环境的 UWB/LiDAR/IMU 组合定位方法[J]. 中国惯性技术学报, 2024, 32(07): 654-662.
Yang X, Ao P, Shen S, et al. UWB/LiDAR/IMU combined localization method for complex environment[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2024, 32(07): 654-662.
- [4] 王国庆, 杨春雨, 马磊. 基于多变量 Laplace 分布的非线性系统分布式鲁棒状态估计[J]. 电子学报, 2022, 50(11): 2610-2618.
Wang G, Yang C, Ma L. Distributed robust state estimation of nonlinear systems based on multivariable Laplace distribution[J]. Acta Electronica Sinica, 2022, 50(11): 2610-2618.
- [5] Lin D, Zhang Q, Chen X, et al. Quaternion Kalman filter for false data injection attacks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2023, 71(3): 1501-1505.
- [6] Wang G, Zhu Z, Yang C, et al. Distributed multi-kernel maximum correntropy state-constrained Kalman filter under deception attacks[J]. IEEE Transactions on Network Science and Engineering, 2024, 12(1): 533-546.
- [7] Wang G, Zhu Z, Yang C, et al. Multiple dimensional correntropy Kalman filter[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2025, 32: 1011-1015.
- [8] Chen B, Liu X, Zhao H, et al. Maximum correntropy Kalman filter[J]. Automatica, 2017, 76: 70-77.
- [9] Chen B, Wang X, Lu N, et al. Mixture correntropy for robust learning[J]. Pattern Recognition, 2018, 79(9): 318-327.
- [10] Ogunfunmi T, Paul T. The quaternion maximum correntropy algorithm[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2015, 62(6): 598-602.
- [11] Lin D, Zhang Q, Chen X, et al. Maximum correntropy quaternion Kalman filter[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2023, 71: 2792-2803.
- [12] 李昕, 孟硕林, 黄观文, 等. 基于 SE(3)-EKF 的旋翼无人机 GNSS/SINS 空中快速对准方法[J]. 中国惯性技术学报, 2023, 31(11): 1076-1082.
Li X, Meng S, Huang G, et al. Rapid in-flight alignment method for rotor UAV with GNSS/SINS based on SE(3)-EKF[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2023, 31(11): 1076-1082.
- [13] Wang G, Zhao J, Yang C, et al. Robust Kalman filter for systems with colored heavy-tailed process and measurement noises[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2023, 70(11): 4256-4260.
- [14] Wang G, Yang C, Ma L, et al. Centralized and distributed robust state estimation over sensor networks using elliptical distribution[J]. IEEE Internet of Things Journal, 2022, 9(21): 21825-21837.
- [15] Mandic D P, Jahanchahi C, Took C C. A quaternion gradient operator and its applications[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2011, 18(1): 47-50.
- [16] Youn W, Huang Y, Myung H. Outlier-robust student's-t-based IMM-VB localization for manned aircraft using TDOA measurements[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2020, 25(3): 1646-1658.
- [17] Wang G, Li N, Zhang Y. Distributed maximum correntropy linear and nonlinear filters for systems with non-Gaussian noises[J]. Signal Processing, 2021, 182(3): 107937.
- [18] Elsergany A M, Abdel-Hafez M F, Jaradat M A. Novel augmented quaternion UKF for enhanced loosely coupled GPS/INS integration[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2024, 32(6): 2321-2331.
- [19] 贾继超, 祁帅, 夏家和, 等. 基于双惯导协同的误差参数估计与融合算法[J]. 中国惯性技术学报, 2024, 32(04): 319-325.
Jia J, Qi S, Xia J, et al. Error parameter estimation and fusion algorithm based on dual inertial navigation coordination[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2024, 32(04): 319-325.
- [20] Knuth T, Groves P. IMU based context detection of changes in the terrain topography[C]//2023 IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium (PLANS). USA, 2023: 680-690.