

高过载下 MEMS 环形陀螺的响应建模与失效分析

魏雯强¹, 王瑾¹, 蔡麒¹, 田慧敏¹, 黄泓侨¹, 曹慧亮²

(1. 中北大学 仪器与电子学院, 太原 030051;

2. 北京理工大学 集成电路与电子学院, 北京 100081)

摘要: 针对一种 MEMS 环形陀螺在高过载下出现冲击失效现象, 对其进行了结构动力学响应建模与失效机理分析。基于准静态、振动和弹性波理论建立了陀螺结构对环境冲击的动力学响应模型。在所建立的 MEMS 环形陀螺动力学冲击响应模型基础上, 分析了 MEMS 环形陀螺的吸合和断裂失效机理, 推导得到发生吸合失效发生时的平衡位移和断裂失效发生时的敏感位置, 并获得了失效发生时的冲击表达式。通过高过载实验获得了 MEMS 环形陀螺临界失效时所加载的冲击幅值和脉宽。利用拉曼光谱仪对高过载作用后的 MEMS 环形陀螺的表面应力进行测试, 应力敏感位置与理论推导一致。

关键词: MEMS 环形陀螺; 高过载; 动力学响应; 失效机理; 冲击实验

中图分类号: V249.3

文献标志码: A

Response modeling and failure analysis of MEMS ring gyroscopes under high overload

WEI Wenqiang¹, WANG Jin¹, CAI Qi¹, TIAN Huimin¹, HUANG Hongqiao¹, CAO Huiliang²

(1. School of Instrument and Electronics, North University of China, Taiyuan 030051, China;

2. School of Integrated Circuits and Electronics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: Regarding the shock failure of a micro-electro-mechanical system (MEMS) vibrating ring gyroscope (VRG) under high overload, structural dynamic response modeling and failure mechanism analysis are conducted. Based on vibration and elastic wave theories, a dynamic response model of gyroscopic structures to high-g shocks is established. Based on the established dynamic impact response model of the MEMS ring gyroscope, the adhesion and fracture failure mechanisms of the MEMS ring gyroscope are analyzed. The equilibrium displacement for adhesion failure and the sensitive location for fracture failure are derived, and the impact expression at the point of failure is obtained. Through high overload experiments, the impact amplitude and pulse width at the critical failure of the MEMS ring gyroscope are determined. Raman spectroscopy is used to test the surface stress of the MEMS ring gyroscope after high overload application, and the stress-sensitive locations are found to be consistent with theoretical derivations.

Key words: MEMS VRG; high overload; dynamic response; failure mechanism; shock experiment

MEMS 陀螺仪作为角速率传感器, 以其低成本和高可靠性等优点, 被广泛应用于智能炮弹、无人机系统、汽车工程和地质勘探等军用、民用领域^[1-5], 且不可避免地在高过载环境下使用^[6-8]。MEMS 环形陀螺 (Vibratory Rate Gyroscope, VRG) 被公认为是

高性能的 MEMS 陀螺, 具有对称结构和与工作模式分离的惯性模态, 能够很好地抵抗环境冲击和不良振动^[9-11]。

MEMS 环形陀螺基于哥氏原理, 结构中的谐振环提供检测角速率的哥氏质量。在高过载下, 谐振环

收稿日期: 2024-05-30; **修回日期:** 2025-07-04

基金项目: 国家自然科学基金 (U2230206); 国家重点研发计划 (2022YFB3205000)

作者简介: 魏雯强 (1997—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为 MEMS 陀螺。

通讯作者: 曹慧亮 (1986—), 男, 教授, 博士生导师, 从事 MEMS 惯性器件研究。

产生位移响应, 支撑梁作为谐振环与锚点的连接结构存在应力分布。由于谐振环在平面内的位移会改变接口电容的输出信号, 之前的研究研究工作将关注重点放置在平面内振动造成的影响。Sieberer S 等人研究了高过载下 MEMS 环形陀螺的冲击响应受非线性静电力的影响^[12], MEMS 环形陀螺的振动模式在冲击和静电力的耦合作用下发生模式耦合。Chouvion B 等人研究了 MEMS 环形陀螺振动参数在高过载下发生变化的动态特性^[13]。在高过载冲击作用下, MEMS 环形陀螺将出现吸合和断裂失效。在高冲击作用下, 活动机构产生较大摆幅, 在静电力作用下致使电容机构贴合^[14], 最终使陀螺失效。断裂失效通常出现在应力较为集中的地方^[15], 如锚点和支撑梁附近, 此状态无法逆转。本文的关注重点是空间维度下 MEMS 环形陀螺对高过载的冲击响应, 并基于振动和弹性波理论建立了 MEMS 环形陀螺在对应类型冲击作用下的动力学响应模型。基于已建立的 MEMS 环形陀螺冲击动力学响应模型, 计算得到了 MEMS 环形陀螺发生吸合时的惯性位移; 获得了结构中冲击应力敏感位置, 以及敏感位置处应力对冲击载荷的映射表达式。此外, 本文通过冲击实验, 验证了结构的应力敏感位置, 获得了 MEMS 环形陀螺发生临界失效时的冲击幅值和脉宽。

1 高过载下 MEMS 环形陀螺的冲击响应建模

1.1 MEMS 环形陀螺结构与冲击作用原理

本文的研究对象为 MEMS 环形陀螺^[16], 其结构如图 1 所示, 主要由谐振环、谐振环内外两侧对称设置的 8 组独立电极、八根 S 形支撑梁和锚点。尺寸参数特征见表 1。

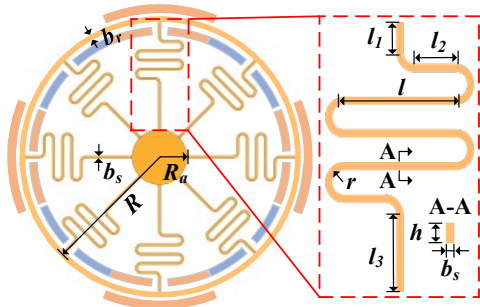


图 1 MEMS 环形陀螺结构示意图和尺寸参数

Fig.1 Structure diagram and size parameters

表 1 MEMS 环形陀螺结构尺寸参数数值

Tab.1 Size parameters value of MEMS VRG

参数	特征	数值/ μm	参数	特征	数值/ μm
R	谐振环半径	3000	b_r	谐振环宽度	50
b_s	支撑梁宽度	30	h	结构厚度	150
r	曲梁半径	100	l_1	直梁长度	300
l_2	直梁长度	400	l_3	直梁长度	1500

高过载环境对传感器的冲击形式主要有两种: 惯性力的作用和应力波的传播。根据 Srikar 和 Senturia 提出的理论, MEMS 机械结构对冲击的响应由特定参数及其相互关系决定^[17], 即微机械结构的固有振动周期 τ_v 、冲击脉冲持续时间 τ 和应力波传递时间 τ_w (应力波到达传播边界的时间):

$$\begin{aligned} \tau_v &= 1/\lambda_{inertia} = 2\pi/\omega_{inertia} \\ \tau_w &= (l_1 + 2l_2 + l_3 + 3l + 5\pi r)\sqrt{\rho/E} \end{aligned} \quad (1)$$

式(1)中 $\lambda_{inertia}$ 和 $\omega_{inertia}$ 分别为 MEMS 环形陀螺惯性模式的频率和圆频率, $(l_1 + 2l_2 + l_3 + 3l + 5\pi r)$ 为应力波的传播距离。

高过载环境对传感器的冲击 $a(t)$ 可用半正弦脉冲表示^[18]:

$$a(t) = \begin{cases} A \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right), & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases} \quad (2)$$

如图 2 所示, 对冲击载荷的类型作如下定义和划分^[19]: 当 $\tau < 2/\lambda_w$ 时, 为应力波冲击, 记为 $a_w(t)$; 当 $2/\lambda_w \leq \tau < 5/\lambda_v$ 时, 为振动冲击, 记为 $a_v(t)$; 当 $\tau \geq 5/\lambda_v$ 时, 为准静态冲击, 记为 $a_{q,s}(t)$ 。由于准静态冲击和振动冲击的作用效果为谐振环产生惯性位移, 故统称为惯性冲击。

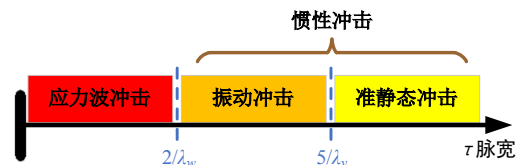


图 2 不同载荷冲击及相关时间尺度示意图

Fig.2 Schematic diagram of diverse loading shocks and associated time scales

1.2 MEMS 环形陀螺的惯性冲击响应

惯性冲击作用下, 谐振环上某一点的位移可分解为径向、周向和平面外三个方向的分量。记冲击在平面内的分量为 $a_{in}(t)$, 与驱动轴夹角为 φ ; 记冲击在平面外的分量为 $a_{out}(t)$ 。平面内惯性位移可由极坐标系描述, 坐标系起始轴与驱动轴重合。在角位置为 θ 处的惯性位移可分解为径向位移 $u(\theta)$ 、切向位移 $v(\theta)$ 和面外位移 $w(\theta)$ ^[15]:

$$\begin{aligned} u(\theta) &= q(t)\cos(\theta - \varphi) \\ v(\theta) &= q(t)\sin(\theta - \varphi) \\ w(\theta) &= p(t) \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)中 $q(t)$ 和 $p(t)$ 为 MEMS 陀螺平面内、外惯性模式的广义位移。在惯性模式中, 谐振环不发生弯

曲, 故不提供应变能而只提供动能:

$$T_{ring} = \frac{1}{2} \rho b_r h \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] d\theta \quad (4)$$

单根 S 形支撑梁的刚度可分解为沿环径向 k_r 、周向 k_θ 和平面外方向 k_{out} , 根据能量法^[16]可获得其关于尺寸的表达式:

$$k_r = \frac{Ehb_s^3}{32(l+r)^3 + 48\pi r(l+r)^2 + 192r^2(l+r) + (42\pi - 56)r^3}$$

$$k_\theta = \frac{Ehb_s^3}{\left\{ \begin{aligned} &1992r^3 + 4l_1^3 + 4l_3^3 + 12l_3^2l_1 + (60\pi + 12l_3 + 96l)l_1^2 + \\ &(2598\pi + 1200l_3 + 360l_1 + 2976l - 240)r^2 + \\ &\left[(696\pi + 240l_3 + 960l)l_1 + 72l_1^2 + 120l_3^2 \right] r \end{aligned} \right\}} \quad (5)$$

$$k_{out} = \frac{Eh^3b_s}{\left\{ \begin{aligned} &-608r^3 + (1296l + 2106\pi - 192l_1 + 1200l_3 - 264)r^2 + \\ &\left[-24l_1^2 + (456l + 600\pi + 240l_3)l_1 + 120l_3^2 + 108l \right] r + \\ &\left[4l_1^3 + (48l + 60\pi + 12l_3)l_1^2 + 12l_1l_3^2 + 4l_3^3 + 4l^3 + 13.5\pi l^2 \right] \end{aligned} \right\}}$$

式(5)中 E 为结构材料的弹性模量。

S 形支撑梁与锚点连接端可认为是固定端, 与谐振环连接端可认为是自由端, 与谐振环在该处的位移相同。支撑梁的质量远小于谐振环, 故不提供动能, 其在惯性模态中提供的应变能为^[16]:

$$U_{beam} = 2 \left[(k_r + k_\theta) q^2 + 2k_{out} p^2 \right] \quad (6)$$

谐振环与内、外电极构成电容, 由于电极之间的间隙很小, 可以认为是一个连续的环形电极^[20]。直流电势 v_{dc} 施加在所有的内、外电极上, 相反的交流电势 v_{ac} , 施加在驱动轴两端的内、外电极上, 电势能为:

$$E_p = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 h R v_{dc}^2}{d} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=0,2,4} \left(\frac{u}{d} \right)^k \right] d\theta + \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 h R v_{ac} v_{dc}}{d} \int_{\left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8} \right]} \left[\sum_{k=1,3,5} \left(\frac{u}{d} \right)^k \right] d\theta \quad (7)$$

式(7)中的第一项提供驱动力, 第二项提供静电势。

将式(4)~式(7)代入拉格朗日方程, 可得惯性模态的动力学响应方程:

$$\ddot{q} + \frac{c_q}{m_r} \dot{q} + \frac{4(k_r + k_\theta) + k_e}{m_r} q = a_{in}(t)$$

$$\ddot{p} + \frac{c_p}{m_r} \dot{p} + \frac{8k_{out}}{m_r} p = a_{out}(t) \quad (8)$$

式(8)中 $m_r = 2\pi\rho R b_r h$ 为环的质量, ρ 为结构材料密度, c_q 和 c_p 为面内惯性模态和面外惯性模态的阻

尼。由上式可得平面内、外惯性模态频率 ω_q 和 ω_p :

$$\omega_q = \sqrt{\frac{4(k_r + k_\theta) + k_e}{m_r}} \quad (9)$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{8k_{out}}{m_r}}$$

如前文所述, 当冲击脉宽 τ 满足 $\tau \geq 5/\lambda_v$ 时为准静态冲击。基于准静态理论, 冲击可视为恒定加速度作用, 惯性位移的响应为:

$$q(t) = \frac{|a_{in}(t)| m_r}{4(k_r + k_\theta) + k_e}$$

$$p(t) = \frac{|a_{out}(t)| m_r}{8k_{out}} \quad (10)$$

当冲击脉宽 τ 满足 $2/\lambda_w \leq \tau < 5/\lambda_v$ 为振动冲击, 根据杜哈美积分可得陀螺敏感结构对冲击的惯性位移响应^[16]:

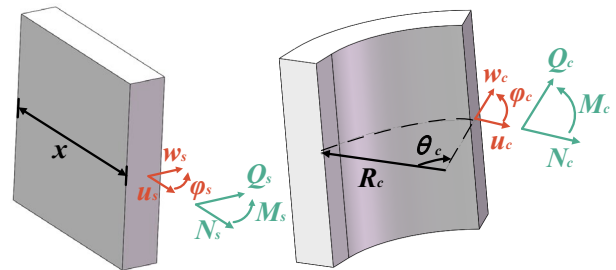
$$q(t) = \frac{1}{\omega_q \sqrt{1 - \xi_q^2}} \int_0^t e^{-\xi_q \omega_q (t-\tau)} a_{in}(\tau) \sin \left[\omega_q \sqrt{1 - \xi_q^2} (t-\tau) \right] d\tau$$

$$p(t) = \frac{1}{\omega_p \sqrt{1 - \xi_p^2}} \int_0^t e^{-\xi_p \omega_p (t-\tau)} a_{out}(\tau) \sin \left[\omega_p \sqrt{1 - \xi_p^2} (t-\tau) \right] d\tau \quad (11)$$

式(11)中 $\xi_q = c_q/(m_r \omega_q)$ 和 $\xi_p = c_p/(m_r \omega_p)$ 为模态的阻尼比。

1.3 MEMS 环形陀螺的应力波冲击响应

MEMS 环形陀螺对应力波冲击的响应分析对象为结构中的 S 型支撑梁。支撑梁由直梁和曲梁连接而成。应力波在两者中的传播特性不同。由于平面内曲梁的存在, 应力波在平面内传播时存在拉伸、剪切和弯曲波相互耦合, 故优先分析应力波在支撑梁平面内的传播特性。



(a) Straight beam (b) Curved beam

图 3 应力波在支撑梁中的两种传播模式

Fig.3 Two propagation modes of elastic wave in supporting beams

如图 3(a)所示, u_s 、 w_s 和 ϕ_s 分别为直梁中心线上质点 (距离梁起始位置线长度为 x 处) 的轴向拉伸位移、在平面内的横向剪切位移和截面转动角度, 并构

成位移矩阵 $D_s=[u_s, w_s, \phi_s]$; N_s 、 Q_s 和 M_s 分别为质点所在截面的轴力、剪切力和弯矩, 并构成内力矩阵 $F_s=[N_s, Q_s, M_s]$ 。基于 Timoshenko 理论^[21]有:

$$F_s = H_s D_s = \begin{bmatrix} \frac{KEA}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{KEA}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & EI \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & EA \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} D_s \quad (12)$$

式(12)中 H_s 为直梁中位移到内力的传递矩阵, K 为 Timoshenko 修正系数, $A=b_s h$ 和 $I=(b_s)^3 h$ 分别为截面的面积和惯性矩。

整个截面处的动力学方程为:

$$H_s D_s = \left[\rho \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} \quad \rho \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \quad \rho I_{in} \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial t^2} \right]^T \quad (13)$$

设式(13)有谐波解 $D_s=[W_s, \Phi_s, U_s] \exp[i(\omega t+kx)]$, W_s , Φ_s 和 U_s 为各谐波的幅值, ω 为频率, k 为波数, i 为虚数单位。

将谐波解代入式(12)、式(13)可得直梁中拉伸波数 k_{s1} 和剪切波波数 k_{s2} 、 k_{s3} 的表达式:

$$k_{s1} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

$$k_{s2, s3} = \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{2E} + \frac{\rho \omega^2 (1+\nu)}{KE} - \frac{Kb_s h}{2I(1+\nu)} \pm \frac{\sqrt{\Delta_s}}{2KEI(1+\nu)}} \quad (14)$$

$$\Delta_s = \rho^2 \omega^4 I^2 (1+\nu)^2 (K-2-2\nu)^2 - 2K^3 \rho \omega^2 EIA(1+\nu) + K^4 E^2 A^2$$

位移矩阵 D_s 可表示为如下形式:

$$D_s = D_s^+ + D_s^- = \Psi_s^+(x) P_s^+(t) + \Psi_s^-(x) P_s^-(t) \quad (15)$$

式(15)中 $P_s(t)=\exp(i\omega t)[P_{s1}, P_{s2}, P_{s3}]$ 为直梁中基波幅值矩阵; +/-表示应力波的传播方向; $\Psi_s(x)$ 为位移转化矩阵, 且有 $\Psi_s^+(x_0+x)=\Psi_s^-(x_0-x)$ 。

由式(12)~式(15)可解得 $\Psi_s^+(x)$ 为:

$$\Psi_s^+(x) = \begin{bmatrix} \exp(ik_{s1}x) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(ik_{s2}x) & \exp(ik_{s3}x) \\ 0 & \alpha_{s2} \exp(ik_{s2}x) & \alpha_{s3} \exp(ik_{s3}x) \end{bmatrix} \quad (16)$$

式(16)中 $\alpha_{sj}=[(k_{sj})^2-2\rho\omega^2(1+\nu)]/(ik_{sj}KE)$ 且 $j=2,3$ 。

$$\xi_j = \exp\left[\frac{2\pi i}{3}(-1)^{(j-1)}\right] \sqrt[3]{-\frac{m}{2} + \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{3}\right)^3}} + \exp\left[-\frac{2\pi i}{3}(-1)^{(j-1)}\right] \sqrt[3]{-\frac{m}{2} - \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{3}\right)^3}} \quad j=1,2,3 \quad (21)$$

$$m = \frac{2}{27} o_1^3 - \frac{1}{3} o_1 o_2 + o_3 \quad n = -\frac{1}{3} o_1^2 + o_2 \quad (22)$$

直梁上平面内一点的位移和内力为:

$$F_s(x) = H_s \Psi_s^+(x) P_s^+(t) + H_s \Psi_s^-(x) P_s^-(t) \quad (17)$$

对于直梁在平面外的位移和内力, 将式(17)中的 $I=(b_s)^3 h$ 替代为 $I_{out}=(b_s)^3 h$ 。

如图 3(b)所示, u_c 、 w_c 和 ϕ_c 分别为曲梁中心线上质点(距离梁起始位置角度为 θ_c 处)的切向拉伸位移、径向剪切位移和截面转动角度, 并构成位移矩阵 $D_c=[u_c, w_c, \phi_c]$; N_s 、 Q_s 和 M_s 分别为质点所在截面的轴力、剪切力和弯矩, 并构成内力矩阵 $F_s=[N_s, Q_s, M_s]$ 。基于 Timoshenko 理论, 曲梁中位移到内力的传递矩阵:

$$H_c = \begin{bmatrix} \frac{KEA}{2(1+\nu)R_c} \left(1 + \frac{k_r^2}{R_c^2}\right) \frac{\partial}{\partial \theta_c} & -\frac{EAK_r^2}{R_c^2} & \frac{EA}{R_c} \left(1 + \frac{k_r^2}{R_c^2}\right) \\ -\frac{KEA}{2(1+\nu)} \left(1 + \frac{k_r^2}{R_c^2}\right) & -\frac{EAK_r^2}{R_c} \frac{\partial}{\partial \theta_c} & \frac{EAK_r^2}{R_c^2} \frac{\partial}{\partial \theta_c} \\ -\frac{KEA}{2(1+\nu)R_c} \left(1 + \frac{k_r^2}{R_c^2}\right) & -\frac{EAK_r^2}{R_c^2} \frac{\partial}{\partial \theta_c} & \frac{EA}{R_c} \left(1 + \frac{k_r^2}{R_c^2}\right) \frac{\partial}{\partial \theta_c} \end{bmatrix}^T \quad (18)$$

式(18)中 $k_r=(I_{in}/A)^{1/2}$ 为曲梁截面的回转半径。

整个截面处的动力学方程为:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta_c} & 0 & -1 \\ -R & \frac{\partial}{\partial \theta_c} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial \theta_c} \end{bmatrix} H_c D_c = \begin{bmatrix} \rho AR_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ -\rho AR_c k_r^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \rho Ak_r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ -\rho Ak_r^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \rho AR_c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

设式(19)有谐波解 $D_c=[W_c, \Phi_c, U_c] \exp[i(\omega t+k\theta_c)]$, W_c , Φ_c 和 U_c 为各谐波的幅值。

将谐波解代入式(19)可得曲梁中拉伸波波数 k_{c1} 、剪切波波数 k_{c2} 、弯曲波波数 k_{c3} 的表达式:

$$k_{c1} = \sqrt{\xi_{mid} - o_1}$$

$$k_{c2} = \sqrt{\xi_{min} - o_1} \quad (20)$$

$$k_{c3} = \sqrt{\xi_{max} - o_1}$$

式(20)中 ξ_{max} , ξ_{min} , ξ_{mid} 为 ξ_i 实数最大、最小和中间值, 具体表达式为:

记波矢量 $S_b^+(t)$ 、 $S_b^-(t)$ 、 $C_{r1}^+(t)$ 和 $C_{r2}^+(t)$ 有以下关系:

$$\begin{aligned} S_b^-(t) &= R_{r,b} S_b^+(t) \\ C_{r1}^+(t) &= T_{b,r1} S_b^+(t) \\ C_{r2}^+(t) &= T_{b,r2} S_b^+(t) \end{aligned} \quad (30)$$

由式(17)和式(27)的推论可得:

$$R_{r,b} = \left[\eta_b^+ - 2\psi_b^+ \eta_r^+ (\psi_r^+)^{-1} \right] \left[2\psi_b^- \eta_r^+ (\psi_r^+)^{-1} - \eta_b^- \right]^{-1} \quad (31)$$

$$T_{b,r} = T_{b,r1} = T_{b,r2} = \left(R_{r,b} \psi_b^- + \psi_b^+ \right) (\psi_r^+)^{-1}$$

若定义应力波加速度沿支撑梁径向、切向和平面外方向分解为 $a_{w,r}(t)$ 、 $a_{w,\theta}(t)$ 和 $a_{w,out}(t)$, 由式(2)和式(16)从锚点进入梁结构的各初始谐波分量 $s_{a1}^+(t)$ 、 $s_{a2}^+(t)$ 和 $s_{a3}^+(t)$ 为:

$$S_a^+(t) = \begin{bmatrix} s_{a1}^+(t) \\ s_{a2}^+(t) \\ s_{a3}^+(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{w,r}(t)\rho}{Ek_{a1}^2} \\ \frac{2(1+\nu)a_{w,\theta}(t)}{k_{a2}^2\kappa E + i\alpha_{a2}k_{a2}\kappa E} \\ \frac{2(1+\nu)a_{w,\theta}(t)}{k_{a3}^2\kappa E + i\alpha_{a2}k_{a3}\kappa E} \end{bmatrix} \quad (32)$$

式(32)中 k_{a1} 、 k_{a2} 和 k_{a3} 由式(14)中的 b_s 替代为 $b_a=(3l_4-b_s)$ 得到, $\alpha_{aj}=[(k_{aj})^2-2\rho\omega^2(1+\nu)]/(ik_{aj}\kappa E)$ 。

由式(17)、式(27)、式(28)和式(31)可得应力波到达谐振环时产生的平面内位移 D_{final} 与内力 F_{final} :

$$\begin{aligned} D_{final} &= M\psi_s^+(l_1+l_3+6l)\psi_c^+(5\pi)T_{b,r}S_a^+(t) \\ F_{final} &= H_c D_{final} \end{aligned} \quad (33)$$

将式(33)中的 $I=(b_s)^3h$ 替代为 $I_{out}=(b_s)^3h$ 即可得到应力波到达谐振环时的平面外位移与内力。

2 高过载下 MEMS 环形陀螺的失效分析

2.1 MEMS 环形陀螺的吸合失效

高过载冲击环境冲击作用下, 陀螺中可活动的谐振环由于受冲击作用产生较大位移。电极电容间静电力随极板间距呈非线性增长, 当静电力大于支撑梁提供的弹性回复力时, 谐振环将持续位移并最终与电极板发生吸合失效。极板与谐振环间的总静电力 F_e 可由式(7)得到:

$$F_e = \frac{\partial E_p}{\partial q_1} = \frac{\pi\epsilon_0 h R_r}{d^3} (V_{in}^2 + V_{out}^2) \left(q_1 + \frac{3}{2} q_1^3 \right) \quad (34)$$

由式(6)可得机械结构提供的回复力 F_k 为:

$$F_k = 4(k_r + k_\theta)q \quad (35)$$

令总静电力 F_e 与机械回复力 F_k 相等, 即可得到平衡位移 q_e 为:

$$q_e = \sqrt[3]{\frac{4}{3} \left[\frac{4(k_r + k_\theta)d^3}{\pi\epsilon_0 h R_r (V_{in}^2 + V_{out}^2)} - 1 \right]} \quad (36)$$

当 MEMS 环形陀螺对冲击作用的惯性位移响应 q 大于平衡位移 q_e 时, 总静电力 F_e 将大于机械回复力 F_k , 发生吸合失效。

2.2 MEMS 环形陀螺的断裂失效

MEMS 环形陀螺的机械结构由单晶硅制成, 具有高硬度但脆性的材料属性, 当受冲击产生的结构应力超过许用应力时将出现裂纹直至断裂, 将影响 MEMS 环形陀螺的性能。一般认为单晶硅的断裂应力为 790 MPa^[24]。

由式(5)和式(10)可知, 在惯性冲击下各支撑梁自由端在:

$$\begin{aligned} F_{r,j} &= k_r q \cos\left(\varphi + \frac{j\pi}{4}\right) \\ F_{\theta,j} &= k_\theta q \sin\left(\varphi + \frac{j\pi}{4}\right) \\ F_{out,j} &= k_{out} p \end{aligned} \quad (37)$$

由于支撑梁靠近锚点段受到自由端等效作用力的弯矩更大, 故选取如图 5 所示的支撑梁段进行应力分析。定义外力在截面 l (距离锚点的路径) 处的距离矢量 $D(l)$, 其在各段中的表达式如表 2 所示。

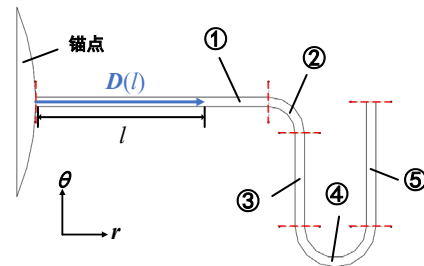


图 5 支撑梁分段

Fig.5 Sections of supporting beam

表 2 支撑梁上的距离矢量 $D(l)$

Tab.2 Distance vector $D(l)$ of the selected support beam

$D(l)$ (r 和 θ 为单位向量)
$(l_1+10r+l_3-l)r$
$(l_1+10r+r\sin\psi_1)r+r\sin\psi_1\theta, \psi_1=(l-l_3)/2\pi r$
$(l_1+9r)r+(r+l-l_3-\pi r/2)\theta$
$(l_1+8r+r\cos\psi_2)r+(r+l_2+r\sin\psi_2)\theta, \psi_2=(l-l_2-l_3-\pi r/2)/2\pi r$
$(l_1+7r)r+(l-l_2-l_3-3\pi r/2)\theta$

可计算得到各等效作用力在 l 截面上产生的最大应力为:

$$\sigma_{j,in}(l) = \frac{[F_{r,j}\bar{D}(l)\bar{\theta} + F_{\theta,j}(l)\bar{D}(l)r]b}{2I} \quad (38)$$

$$\sigma_{j,out}(l) = \frac{F_{out,j}|\bar{D}(l)|h}{2I_{out}}$$

平面内冲击造成的应力峰值出现在梁 $j=2,7$ 上的支撑梁和锚点间的连接处, 平面外冲击造成的应力峰值出现在各支撑梁与锚点的连接处, 对于惯性冲击, 最大应力的表达式为:

$$\sigma_{in,max} = \frac{3k_{\theta}q(l_1+l_2+10r)\cos\varphi}{b_s^2h} \quad (39)$$

$$\sigma_{out,max} = \frac{3k_{out}p(l_1+l_2+10r)}{b_s h^2}$$

对于应力波冲击造成的结构应力, 面外方向无敏感位置, 面内应力敏感位置在支撑梁和锚点、谐振环的连接界面处。由上一节的推导可知在这两个位置的内力矩阵 F_w 为:

$$F_{w,1} = H_s M S_a^+(t) \quad (40)$$

$$F_{w,2} = H_c D_{final} \psi_s^+(l_1+l_3+6l)\psi_c^+(5\pi)T_{b,r} S_a^+(t)$$

应力与内力满足以下关系:

$$\begin{bmatrix} \sigma_w \\ \tau_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/bh & 0 & 12/b^3h \\ 0 & 1/bh & 0 \end{bmatrix} \cdot F_w \quad (41)$$

式(41)中 $\sigma_{w,1}$ 和 $\tau_{w,1}$ 分别为的正应力和剪应力。

3 高过载冲击实验

由式(1)得弹性波传递时间 $\tau_w \approx 24.31 \mu s$ 。通过扫描 MEMS 环形陀螺的频率, 确定平面内惯性模态频率为 6284 Hz, 所对应的时间尺度为 159.13 μs 。通过有限元仿真, 平面外的惯性模态频率为 7278 Hz, 所对应的时间尺度为 137.40 μs 。

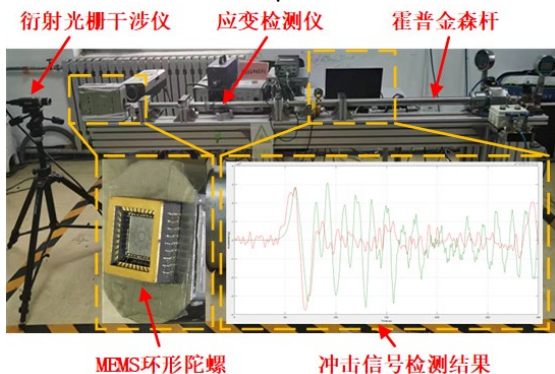


图 6 霍普金森杆冲击实验
Fig.6 Hopkinson bar shock experiment

如图 6 所示, 使用霍普金森杆对 MEMS 环形陀螺进行冲击实验。陀螺仪固定在透射杆尾端。通过衍

射光栅干涉仪和应变检测仪采集冲击的幅值和脉宽。霍普金森杆能产生加速度幅值在 10,000~300,000 g (g 为重力加速度) 之间, 脉冲宽度在 20~50 μs 之间的冲击。当冲击的脉宽小于 24 μs 或在 24 μs 左右时为应力波冲击, 脉宽大于 24 μs 时为振动冲击。

发生失效时的加载冲击幅值和脉宽见表 3。表 3 中对惯性冲击与应力波冲击的区分, 仅针对该 MEMS 环形陀螺的机械结构, 且依据第 1.1 节提出的概念进行。通过在 MEMS 环形陀螺上加载具有相似幅度和脉宽的冲击, 验证失效临界条件的重复性。

表 3 MEMS 环形陀螺发生失效时冲击的幅值和脉宽
Tab.3 Amplitude and pulse width of shock that lead to failure of MEMS VRG

失效	冲击类型	幅值/g	脉宽/ μs
吸合	平面内惯性冲击	44,176.81	50.6
	平面内惯性冲击	115,799.57	49.8
断裂	平面外惯性冲击	92,368.61	50.3
	应力波冲击	172,084.69	23.4

对上电后的 MEMS 环形陀螺上加载加速度幅值为 44,176.81 g、脉宽为 50.6 μs 的平面内振动冲击时, 出现吸合失效。如图 7 所示, MEMS 环形陀螺的谐振环对振动冲击产生惯性位移响应, 贴合在外电极上, 支撑梁在谐振环的带动下产生恒定静态位移。

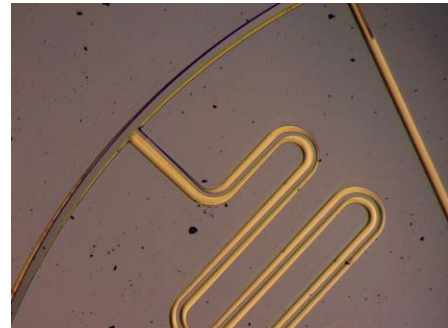


图 7 MEMS 环形陀螺在惯性冲击下的吸合失效
Fig.7 Pull-in failure of MEMS VRG under inertial shock

对未上电的 MEMS 环形陀螺上加载加速度幅值为 115,799.57 g、脉宽为 49.8 μs 的平面内振动冲击时, 支撑梁和锚点连接处发生断裂, 如图 8 所示。当加载加速度幅值为 92,368.61 g、脉宽为 50.3 μs 的平面外振动冲击时, 支撑梁锚点连接处发生断裂, 如图 9 所示。由于冲击脉冲宽度接近于 MEMS 环形陀螺的面外模态频率所对应的时间尺度, 因此造成失效的幅值要比面内振动引起失效的幅值小。对未上电的 MEMS 环形陀螺上加载加速度幅值为 172,084.69 μs 、脉宽为 23.4 μs 的应力波冲击时, 支撑梁和锚点、谐振环连接处发生断裂, 如图 10 所示。在不同条件冲击下, MEMS 环形陀螺发生断裂的位置和理论推导的应力敏感位置相一致。

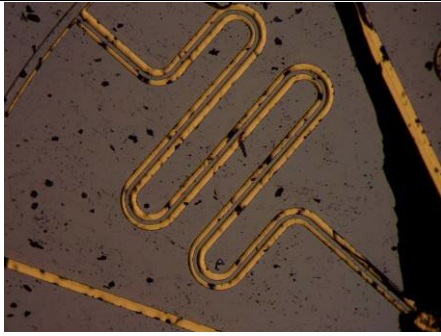


图 8 MEMS 环形陀螺在面内惯性冲击下的断裂失效

Fig.8 Fracture failure of MEMS VRG under inertial shock in plane

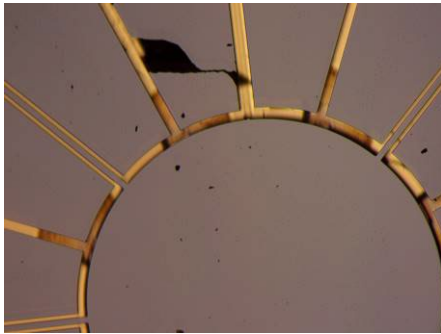


图 9 MEMS 环形陀螺在面外惯性冲击下的断裂失效

Fig.9 Fracture failure of MEMS VRG under inertial shock out of plane

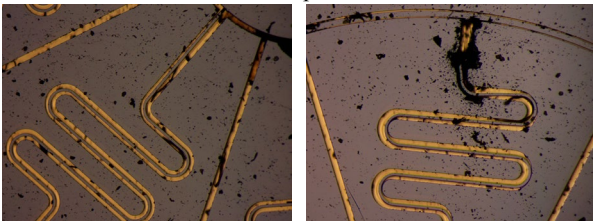


图 10 MEMS 环形陀螺在应力波冲击下的断裂失效

Fig.10 Fracture failure of MEMS VRG under stress wave shock

拉曼光谱可用于 MEMS 环形陀螺机械结构的应力分析^[25]。如图 11 所示，在 MEMS 环形陀螺结构的支撑梁上选取六个测量点。在 MEMS 环形陀螺上加载平面内和平面外冲击，加速度幅值约为 40,000 g，脉冲宽度约为 30 μs。拉曼光谱应力测试结果如图 12 所示，应力敏感位置为测试点 3 和 4，与理论分析一致。

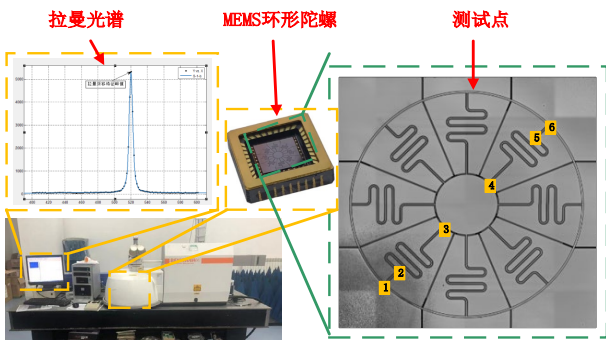
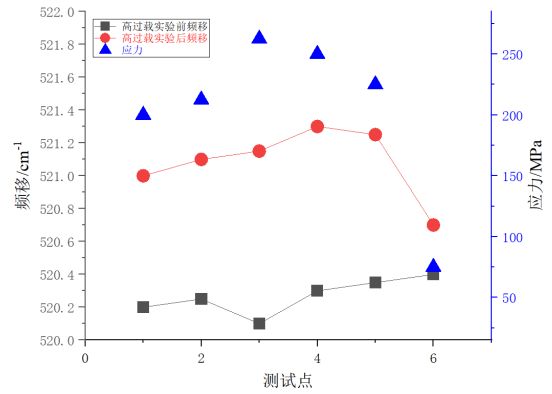


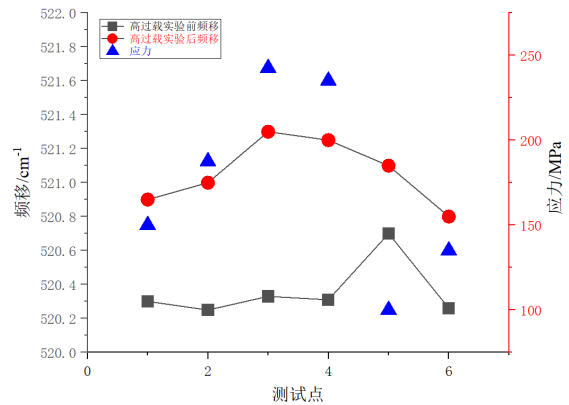
图 11 拉曼光谱应力测试系统

Fig.11 Raman spectroscopy stress testing system



(a) 平面内冲击结果

(a) Result of in-plane shock



(b) 平面外冲击结果

(b) Result of out-of-plane shock

图 12 拉曼光谱应力测量结果

Fig.12 Raman spectroscopy stress testing results

3 结论

本文以具有 S 形支撑梁的 MEMS 环形陀螺为研究对象，基于准静态、振动和弹性波理论，建立了 MEMS 环形陀螺敏感结构在高过载冲击下的动力学响应模型。在此基础上，针对 MEMS 器件在高过载环境中的典型失效模式，分析了 MEMS 环形陀螺的失效机理。计算了发生吸合失效时的惯性位移表达式。推导了惯性响应和应力波响应时 MEMS 环形陀螺支撑梁结构中的应力敏感位置。对冲击下分层失效的物理过程进行建模，给出了层间截面中应力表达式。通过冲击实验获得了 MEMS 环形陀螺失效的临界冲击幅值和脉宽。本文为优化和提高 MEMS 环形陀螺抗冲击能力提供了动力学建模和失效分析基础。

参考文献 (References):

[1] 魏雯强, 鲁征浩, 陈方, 等. 芯片级多轴集成微陀螺方案对比与发展趋势分析[J]. 中国惯性技术学报, 2023, 31(9): 932-939,954.
Wei W, Lu Z, Shen C, et al. Comparison and development trend analysis of chip level multi axis integrated MEMS gyroscope[J] Journal of Chinese Inertial Technology, 2023, 31(9): 932-939,954.

- [2] Chen Z, Yan K, Wang X, et al. MEMS gyroscopes in different operation modes: A review[J]. *Measurement*, 2025, 249: 116996.
- [3] Huang W, Yan X, Zhang S, et al. MEMS and MOEMS gyroscopes: A review[J]. *Photonic Sensors*, 2023, 13: 230419.
- [4] 李雪峰, 甘罗, 周琦. 石英 MEMS 陀螺检测电极分布参数优化[J]. *中国惯性技术学报*, 2024, 32(06): 592-597.
Li X, Gan L, Zhou Q. Optimization of sensing electrode distribution parameters of quartz MEMS gyroscope[J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2024, 32(06): 592-597.
- [5] Qin S, Gai H, Chen Y. Status and Deveopment of High-performance MEMS Gyroscope[C]//2024 IEEE 6th Advanced Information Management, Communicates, Electronic and Automation Control Conference (IMCEC). China, May 24-26, 2024: 870-876.
- [6] 曹慧亮, 郭天琪, 申冲. 抗过载环形 MEMS 固体波动陀螺设计加工与测试[J]. *仪器仪表学报*, 2022, 43(5): 1-7.
Cao H, Guo T, Shen C. Design, fabrication and test of high overload resistance MEMS silicon-based ring wave gyroscope[J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2022, 43(5): 1-7.
- [7] Xu Y, Liu S, He C, et al. Reliability of MEMS inertial devices in mechanical and thermal environments: A review[J]. *Heliyon*, 2024, 10(5): e27481.
- [8] Wang C, Wu K, Wang X, et al. A MEMS disk gyroscope with high fabrication precision, high quality factor (>810k) and high overload characteristic (>15000g)[J]. *Journal of Physics: Conference Series*, 2024, 2740: 012062.
- [9] Gill W A, Howard I, Mazhar I, et al. Design and modelling of MEMS vibrating internal ring gyroscopes for harsh environments[J]. *Sensors*, 2024, 24(7): 5854.
- [10] 裴永乐, 徐亮, 黄伟, 等. 非均质环形谐振子结构性能分析方法[J]. *中国惯性技术学报*, 2024, 32(08): 821-827.
Pei Y, Xu L, Huang W, et al. An analysis method for structures of ring-shaped resonators with heterogeneous materials[J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2024, 32(08): 821-827.
- [11] Gill W A, Howard I, Mazhar, I, et al. A review of MEMS vibrating gyroscopes and their reliability issues in harsh environments[J]. *Sensors*, 2022, 22(19): 7405.
- [12] Sieberer S, McWilliam S, Popov A A. Nonlinear electrostatic effects in MEMS ring-based rate sensors under shock excitation[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2019, 157: 485-497.
- [13] Chouvion B, McWilliam S, Popov A A. Effect of nonlinear electrostatic forces on the dynamic behaviour of a capacitive ring-based coriolis vibrating gyroscope under severe shock[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, 106: 395-412.
- [14] 王炳雷, 周慎杰, 赵俊峰, 等. 静电激励 MEMS 微结构吸合电压尺寸效应研究[J]. *固体力学学报*, 2011, 32(6): 541-548.
Wang B, Zhou S, Zhao J, et al. Size-dependent pull-in voltage of electrostatically actuated MEMS[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2011, 32(6): 541-548.
- [15] Yang C, Liu Q, Li T. The reliability model of microelectromechanical system based on fracture mechanism[C]//9th IEEE International Conference on Reliability, Maintainability and Safety (ICRMS). China, June 12-15, 2011: 378-382.
- [16] Kou Z, Liu J, Cao H, et al. A novel MEMS S-springs vibrating ring gyroscope with atmosphere package[J]. *AIP Advances*, 2017, 7(12): 125301.
- [17] Peng T, You Z. Reliability of MEMS in shock environments: 2000-2020[J]. *Micromachines*, 2021, 12(11): 1275.
- [18] Qin Z, Gao Y, Ding X, et al. Design and optimization of a vibrating ring gyroscope with high shock resistance by Differential Evolution[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2021, 21(15): 16510-16518.
- [19] Wang J, Cai Q, Wei W, et al. Failure mechanism analysis and experiment of MEMS VRG under high-g shock[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2024, 24(11): 17507-17519.
- [20] Gill W A, Howard I, Mazhar I, et al. A comprehensive design analysis of MEMS vibrating ring gyroscopes[J]. *Mechanical Engineering*, 2023, 7: 106.
- [21] Alotta G, Russillo A F, Failla G. Elastic wave propagation in periodic stress-driven nonlocal Timoshenko beams[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2025, 306: 113103.
- [22] Ren X, Hou S, Han X. Stress wave scaling theory of bar with variable cross-section[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2025, 41: 424509.
- [23] Chen F, Zong Z, Stovas A, et al. Wave reflection and transmission coefficients for layered transversely isotropic media with vertical symmetry axis under initial stress[J]. *Geophysical Journal International*, 2022, 233(3): 1580-1595.
- [24] Guo T, Wei W, Cai Q, et al. Design and fabrication of a novel wheel-ring triaxial gyroscope[J]. *Sensors*, 2022, 22(24): 9978.
- [25] Wei W, Chen F, Tian H, et al. A new single chip high-overload tri-axial MEMS gyroscope with multi-wheel-ring for Z-axis input range enhancement[C]//2025 IEEE 38th International Conference on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS). Taiwan, January 19-23, 2025: 916-919.