

# 基于动态 Kriging 代理模型的起重机结构 可靠性分析方法

范小宁, 吕召国

(太原科技大学 机械工程学院, 山西 太原 030024)

**摘要:** 针对桥式起重机结构可靠性分析计算中多维小失效概率及隐式功能函数, 依靠传统可靠度计算方法难以解决问题, 提出采用动态 Kriging 代理模型结合重要抽样法 (ISM) 的可靠度计算方法。首先通过 2 个学习函数构建隐式功能函数的动态 Kriging 代理模型; 再利用改进一次二阶矩法 (FORM) 结合 Kriging 代理模型求出最可能失效点, 并以此为中心点构造重要抽样密度函数; 最后基于所建立的代理模型通过 ISM 完成可靠度计算。通过引入与学习函数相结合的新增停止准则, 降低有限元调用次数。通过工程案例验证, 所提方法可以较好地平衡模型精度、结果误差与计算成本。

**关键词:** 起重机结构; 动态 Kriging 代理模型; 学习函数; 重要抽样法; 结构可靠性

**中图分类号:** TH 133.33 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-5581(2025)02-0264-06

## Reliability analysis method of crane structure based on dynamic Kriging surrogate model

FAN Xiaoning, LYU Zhaoguo

(School of Mechanical Engineering, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024, Shanxi, China)

**Abstract:** Aiming at the problems of multi-dimensional small failure probability and implicit function in the reliability analysis for bridge crane structure, that is difficult to solve using traditional reliability analysis methods, the one based on dynamic Kriging surrogate model combined with important sampling method is proposed. Firstly, the dynamic Kriging surrogate model of the implicit function is constructed utilizing two learning functions, and then the most probable failure point (MPP) is obtained by using the improved first order second moment method combined with the Kriging surrogate model. Secondly, the importance sampling density function is constructed with the MPP as the central point. Finally, the reliability degree is calculated by the importance sampling method based on the established surrogate model. By introducing a new stop criterion combined with learning function, the number of finite element calls is reduced. Verified by an engineering case, the proposed method can well balance the model accuracy, result error and calculation cost.

**Key words:** crane structure; dynamic kriging surrogate model; learning function; importance sampling method; structural reliability

起重机金属结构是起重机的机械骨架, 其不仅需要承担起升载荷且需要承受自身重量, 还是起重机吊运工作中的核心部件, 其可靠性关系到起重机

整机的安全, 因此相关学者从未间断对其可靠性的研究。Li 等<sup>[1]</sup>基于有限元分析软件, 结合响应面法、人工神经网络建立了集装箱起重机结构的可靠

性分析模型,并基于蒙特卡洛法(Monte Carlo method, MCM)估算该起重机结构的失效概率。

目前结构可靠性研究采用的取样法主要有MCM、重要抽样法(importance sampling method, ISM)<sup>[2]</sup>等。ISM在MCM基础上演变而来,其通过变换抽样中心,使可靠度的计算效率极大的提高。近几年,代理模型结合数值模型来解决隐式功能函数的可靠性问题得到了越来越多的关注。例如, Echard等<sup>[3-4]</sup>基于Kriging代理模型,应用主动学习策略的MCM研究了高维算例的可靠度计算问题,随后Echard又提出了AK(adaptive kriging)-IS可靠度计算方法,用原功能函数结合一次二阶矩法(first order second moment, FOSM)求解最可能失效点(most probable point, MPP)点,然后以MPP点为中心进行重要抽样,结合Kriging代理模型完成可靠度计算。

综上所述,学者对于起重机金属结构可靠性问题已经展开了广泛研究,但针对起重机结构使用有限元仿真分析的隐式功能函数可靠性分析的昂贵计算成本,结合代理模型技术进行起重机结构可靠性分析研究的相关报道相对较少。鉴于此,本文提出结合动态Kriging代理模型技术和ISM的起重机金属结构可靠性分析方法。经实例验证,本文方法可取得满足精度要求的可靠度,节省了计算成本,为基于动态代理模型技术的起重机结构可靠度计算做了开创性工作。

## 1 Kriging代理模型

Kriging代理模型是通过已知采样点的信息来预测未知点响应值的一种插值技术,其不仅可以提供样本点的预测值,还可以提供样本点处预测值的方差估计。其主要由回归方程与随机过程组成,数学表达式为

$$Y(X) = f(X)^T \beta + Z(X) \quad (1)$$

式中: $\beta$ 为回归系数; $f(X)^T \beta$ 为回归模型; $Z(X)$ 为一个随机过程。

协方差可以表示为

$$\text{cov}[Z(x_i), Z(x_j)] = \sigma_z^2 R \quad (2)$$

式中: $\sigma_z^2$ 为由随机过程确定的过程方差; $R$ 为相关函数。

对于样本点 $X = [x_1, x_2, \dots, x_m]$ 及样本点的响应 $Y = [y_1, y_2, \dots, y_m]$ ,则对于给定预测点 $x$ ,可以得到预测点与样本点之间的相关函数矩阵:

$$r(x) = [R(\theta, x_1, x), R(\theta, x_2, x), \dots, R(\theta, x_m, x)] \quad (3)$$

在无偏估计的条件下,预测值均方差为

$$M_{\text{se}}[\hat{Y}(X)] = E\left[(\hat{Y}(X) - Y(X))^2\right] = \sigma_z^2(1 + c^T R c - 2c^T r_x) \quad (4)$$

式中: $\sigma_z^2$ 为随机分布 $Z(X)$ 的方差; $c$ 为加权系数矩阵。则预测模型可表示为

$$\hat{Y}(X) = r_x R^{-1} Y - [F^T R^{-1} r_x - f(X)]^T (F^T R^{-1} F)^{-1} F^T R^{-1} F \quad (5)$$

## 2 重要抽样法

对于已知结构,其极限状态函数为 $g(x)$ ,其中, $x$ 为随机输入变量,其概率密度函数为 $f_X(x)$ ,结构的失效域定义为 $F = \{x | g(x) \leq 0\}$ ,失效概率 $P_f$ 即为输入随机变量落入失效域的概率,可由积分求得,即

$$P_f = P\{x | g(x) \leq 0\} = \int_{x \in F} f_X(x) dx \quad (6)$$

式(6)的积分域很难确定,故采用MCM作为参照解。引入失效域指示函数 $I_F(x)$ :

$$I_F(x) = \begin{cases} 1, & x \in F \\ 0, & x \notin F \end{cases} \quad (7)$$

ISM计算失效概率的估计值 $\hat{P}_f$ 表达式为

$$\hat{P}_f = \int_{x \in F} \frac{f_X(x)}{h_X(x)} h_X(x) dx = E\left[I_F(x) \cdot \frac{f_X(x)}{h_X(x)}\right] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_F(x_i^h) \frac{f_X(x_i^h)}{h_X(x_i^h)} \quad (8)$$

式中: $h_X(x)$ 为重要抽样密度函数; $x_i^h$ 为按密度函数 $h_X(x)$ 抽取的第 $i$ 个样本点。

变异系数 $\epsilon$ 可表示为

$$\epsilon = \frac{\sqrt{\text{Var}[\hat{P}_f]}}{\hat{P}_f} \quad (9)$$

式中: $\text{Var}[\ ]$ 为取方差。

重要抽样密度函数一般选用高斯分布形式,方差为原随机变量方差的1~2倍,关键点即中心点的选取可使用改进的FORM得到。

## 3 学习函数及新增停止准则

应用Kriging代理模型估计失效概率时,训练点的分布对失效概率估计值的精度有重要的影

响。为使训练点更多地集中在失效概率估计感兴趣的区域,需要采用学习函数有“目的”地从备选样本池中选择新的训练点,添加到 Kriging 代理模型的训练点集中。由于  $U$  学习函数和 EFF (expected feasibility function) 学习函数均可以较好地兼顾极限状态面以及预测误差较大处的精度,故本文采用  $U$  学习函数<sup>[3]</sup>以及 EFF 学习函数<sup>[5]</sup>来添加高保真样本点构建动态 Kriging 代理模型。关于  $U$  学习函数和 EFF 学习函数已经有很多文献进行了详细报道,在此不再赘述。

模型的精度越高对计算越有利,但精度越高也就意味有限元调用次数越多,从而造成计算成本增加。若 Kriging 代理模型足够精确,那么增加新的样本点对提高 Kriging 代理模型精度的意义较小<sup>[6]</sup>。因此,如何平衡计算成本与模型精度就成了建立代理模型的一个关键问题。为此,本文在 2 种学习函数原有的停止准则基础上,增加一个新增停止准则,如式(10)所示,即当  $U$  学习函数或 EFF 学习函数满足原有停止准则或新增停止准则时停止循环。

$$Re = \max \left\{ \frac{|\hat{Y}^k(x_{k+1}) - Y(x_{k+1})|}{R_{\text{range}}(Y^k)}, \frac{|\hat{Y}^{k+1}(x_{k+2}) - Y^{k+1}(x_{k+2})|}{R_{\text{range}}(Y^{k+1})}, \frac{|\hat{Y}^{k+2}(x_{k+3}) - Y^{k+2}(x_{k+3})|}{R_{\text{range}}(Y^{k+2})} \right\} \quad (10)$$

式中:  $x_{k+2}$  为新增样本点;  $R_{\text{range}}(Y^k)$  为  $k$  个采样点的响应值最大与最小值之差;  $\hat{Y}^{k+1}(x_{k+2})$  为第  $k+1$  新增样本点的响应值;  $Y(x_{k+1})$  为第  $k+1$  新增样本点的真实值。

因此,根据文献[7],当连续 3 个新增样本点的相对误差小于某个阈值时,停止加点。在本研究中,阈值设为 0.01。

### 4 基于 Kriging 代理模型的可靠度计算流程

基于 Kriging 代理模型的可靠度计算流程如图 1 所示。

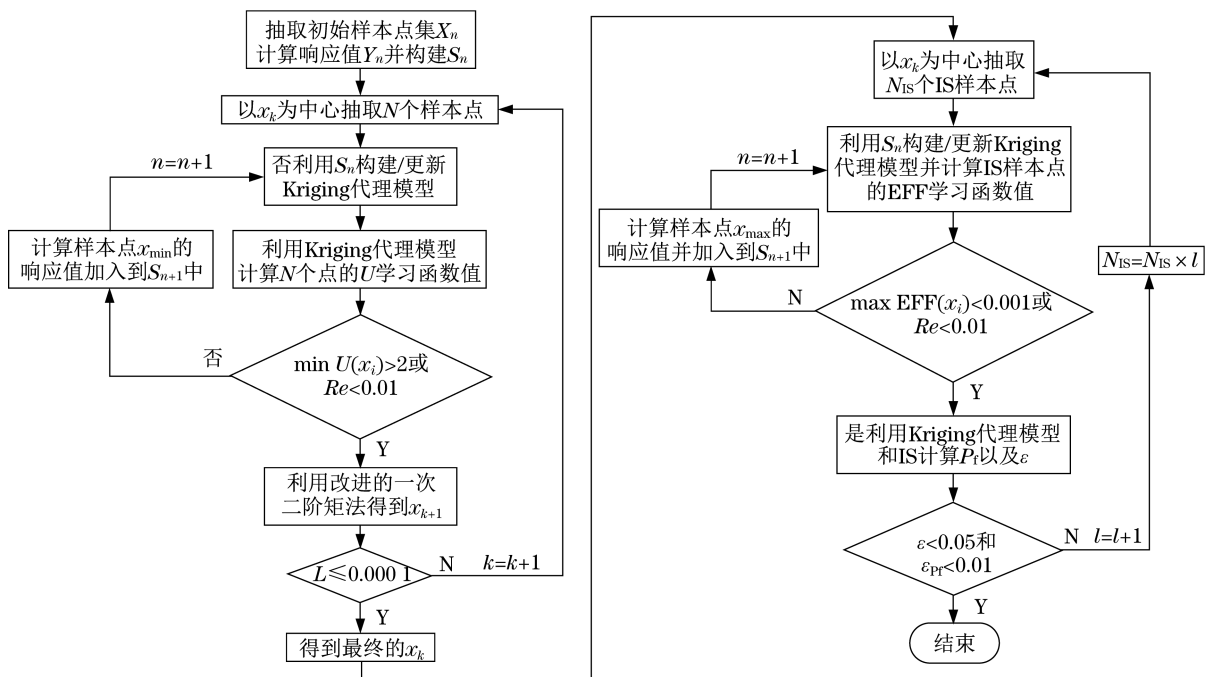


图 1 本文算法流程图

Fig.1 Flow diagram of the proposed algorithm

具体流程如下:

(1) 利用拉丁超立方抽取初始样本点构成初始样本点集  $X_n = [x_1, x_2, \dots, x_m]$ ,  $m$  为初始样本点数,一般取 10 倍的变量数。获取初始样本点的响应值  $Y_n = [g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_m)]$ , 组成输入输出矩阵  $S_n = \{ [x_1, g(x_1)], [x_2, g(x_2)], \dots, [x_m,$

$g(x_m)] \}$ 。取均值点为中心点  $x_k$ , 令学习函数取样迭代次数  $n=0$ , 搜索 MPP 点的迭代次数  $k=0$ 。

(2) 以  $x_k$  为中心抽取  $N$  (此处的  $N$  为 100) 个点作为  $U$  学习函数样本点库, 抽取范围为中心点的  $\pm 5$  倍标准差。

(3) 利用矩阵  $S_n$  构建或更新 Kriging 代理模型。

(4) 计算 $N$ 个点的 $U$ 学习函数值,判断是否满足精度要求,若否,则将 $U$ 学习函数最小值对应的样本点 $x_{\min}$ 及真实值 $g(x_{\min})$ 加入矩阵 $S_n$ 中,即 $S_{n+1}=\{S_n, [x_{\min}, g(x_{\min})]\}$ ,令 $n=n+1$ ,返回步骤3;否

$$L = \frac{\sqrt{(x_1^{k+1})^2 + (x_2^{k+1})^2 + \dots + (x_d^{k+1})^2} - \sqrt{(x_1^k)^2 + (x_2^k)^2 + \dots + (x_d^k)^2}}{\sqrt{(x_1^k)^2 + (x_2^k)^2 + \dots + (x_d^k)^2}} \quad (11)$$

式中: $x_d^k$ 为第 $k$ 次迭代点 $x_{\text{MPP}}$ 的 $d$ 个分量。

(6) 以 $x_{\text{MPP}}$ 点为中心进行重要抽样,抽取样本数为 $N_{\text{IS}}$ ,一般取 $N_{\text{IS}}=1\ 000$ ,取样范围为中心点的 $\pm 5$ 倍标准差,令可靠度计算迭代次数 $l=1$ 。

(7) 利用所构建/更新的Kriging代理模型,计算 $N_{\text{IS}}$ 个点的EFF学习函数值,判断是否满足精度要求,否则将EFF学习函数最大值对应的样本点 $x_{\max}$ 及真实值 $g(x_{\max})$ 加入到矩阵 $S_n$ 中,即 $S_{n+1}=\{S_n, [x_{\max}, g(x_{\max})]\}$ ,令 $n=n+1$ ,重复进行此步骤,否则,进行以下步骤。

(8) 基于Kriging代理模型,利用ISM计算失效概率 $\hat{P}_f$ ,如式(8)所示,及变异系数 $\epsilon$ ,如式(9)所示。

(9) 判断是否满足精度要求,即 $\epsilon < 0.05$ 和式(12) $\epsilon_{\text{Pr}} < 0.01$ ,若否令 $l=l+1, N_{\text{IS}}=N_{\text{IS}} \times l$ ,返回步骤1。若是,获取失效概率 $\hat{P}_f$ 。

$$\epsilon_{\text{Pr}} = \frac{|\hat{P}_f^{l+1} - \hat{P}_f^l|}{\hat{P}_f^l} \quad (12)$$

## 5 基于代理模型的起重机金属结构可靠度计算

某额定起质量20 t、跨度 $L=31.5$  m桥式起重机金属结构参数和随机参数见表1,各变量相互独立,金属结构有限元模型如图2所示。

起重机金属结构的可靠性主要考虑以下4个方面:结构的静强度、静刚度、垂直动刚度和水平动刚度,对应的功能函数为

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \sigma_{\max} - [\sigma] \leq 0 \\ g_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= f_v - [f_v] \leq 0 \\ g_3(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= [f_v] - f_v \leq 0 \\ g_4(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= [f_h] - f_h \leq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

式中: $g_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  ( $i=1, 2, 3, 4$ )分别为该桥机金属结构的静强度、静刚度、垂直动刚度和水平动刚度的功能函数; $\mathbf{X}=[x_1, x_2, \dots, x_{11}]$ 为随机设计变量向量; $\mathbf{Y}=[y_1, y_2, y_3, y_4]$ 为随机参数向量; $\sigma_{\max}$ 为主梁跨中位置的最大组合应力; $f_v$ 为主梁垂直静变形; $f_v$ 和 $f_h$ 分别为主梁的垂直动刚度和水平动刚度; $[\sigma]$ 为许用应力,根据起重机设计规范<sup>[7]</sup>取176 MPa; $[f_v]$ 为垂直

则,进行以下步骤。

(5) 用更新后的Kriging代理模型求MPP点得出新验算点 $x_{k+1}$ ,判断是否满足式(11),若否,令 $k=k+1$ 返回步骤2,若是,获取MPP点 $x_{\text{MPP}}$ 。

表1 随机设计变量和随机参数  
Tab. 1 Design variables and random parameters

设计变量	分布类型	均值	变异系数
主梁高度( $x_1$ ) $H/\text{mm}$	正态分布	1 478.78	0.05
主梁翼缘厚度( $x_2$ ) $T/\text{mm}$	正态分布	6.70	0.05
主梁主腹板厚度( $x_3$ ) $T_1/\text{mm}$	正态分布	6.70	0.05
主梁副腹板厚度( $x_4$ ) $T_2/\text{mm}$	正态分布	6.70	0.05
主梁宽度( $x_5$ ) $B/\text{mm}$	正态分布	559.23	0.05
端梁高度( $x_6$ ) $h/\text{mm}$	正态分布	628.80	0.05
端梁翼缘厚度( $x_7$ ) $t/\text{mm}$	正态分布	7.86	0.05
端梁腹板厚度( $x_8$ ) $t_2/\text{mm}$	正态分布	9.52	0.05
端梁宽度( $x_9$ ) $b/\text{mm}$	正态分布	408	0.05
轮距( $x_{10}$ ) $D/\text{mm}$	正态分布	4 000	0.05
隔板厚度( $x_{11}$ ) $W/\text{mm}$	正态分布	6.70	0.05
起升质量( $y_1$ ) $P_Q/\text{N}$	正态分布	$1.96 \times 10^5$	0.05
小车质量( $y_2$ ) $P_{Gx}/\text{kg}$	正态分布	5 879	0.05
泊松比 $\nu(y_3)$	正态分布	0.358 8	0.05
弹性模量( $y_4$ ) $E/\text{Pa}$	正态分布	$2.12 \times 10^{11}$	0.05

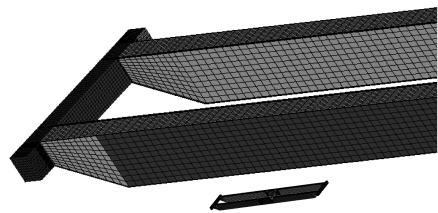


图2 有限元模型

Fig.2 Finite element model

许用静刚度取 $L/700$ ;  $[f_v]$ 和 $[f_h]$ 分别为垂直允许动刚度和取水平允许动刚度,分别取2.0和1.5 Hz。对应4个约束失效概率阈值,分别设为0.001、0.01、0.23和0.23。

为验证本文动态Kriging代理模型结合ISM计算失效概率的有效性,将本文方法与MCM、FORM及ISM结合静态Kriging代理模型方法进行了对比研究。本文方法用U+EFF表示,U+EFF(Re)表示在本文方法的基础上对2个学习函数增加新增停

止准则。应用本文的U+EFF方法和U+EFF(Re)方法,计算该桥架结构4个功能函数在均值点处的可靠度,该均值点是通过可靠性优化设计获得的最优点<sup>[8]</sup>。因篇幅所限,4个功能函数搜索MPP点和计算失效概率迭代曲线仅列出了2个,分别如图3~图6所示,与其他方法的可靠度计算结果分别见表2、表3。Kriging代理模型方法得到的MPP点与真实MPP点之间的误差计算公式为

$$\epsilon_{MPP} = \frac{\sqrt{(x_1^z - x_1^g)^2 + (x_2^z - x_2^g)^2 + \dots + (x_d^z - x_d^g)^2}}{\sqrt{(x_1^z)^2 + (x_2^z)^2 + \dots + (x_d^z)^2}} \quad (14)$$

式中: $x_d^z$ 为真实MPP点的第d个分量; $x_d^g$ 为Kriging代理模型方法得到的估计MPP点的第d个分量。

从2个功能函数的可靠度计算结果可以看出,本文U+EFF和U+EFF(Re)方法在满足可靠度计算精度的情况下,均可取得与MCM方法基本一致的失效概率计算结果,而且也基本满足对4个功能函数可靠度的要求。例如,静刚度算例中,本文U+EFF法和U+EFF(Re)法和MCM法的相对误差分别为0.7128%和0.9644%,可见本文可靠度计算方法可行。

本文U+EFF(Re)方法与静态Kriging+IS方法相比,在调用有限元次数基本相同的情况下,静态

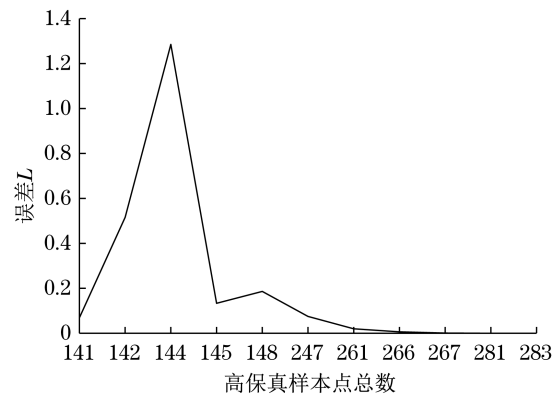


图3 垂直静刚度搜索MPP点迭代曲线

Fig.3 Iterative curve of searching MPP for vertical static stiffness

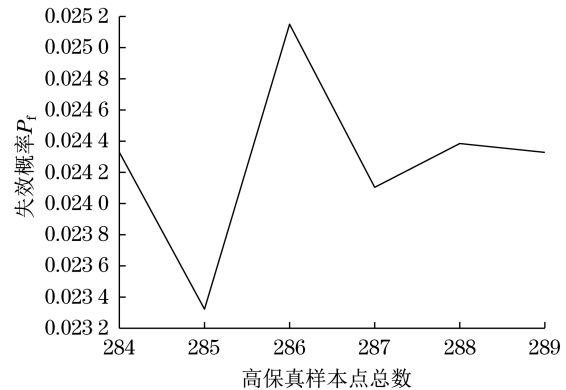


图4 垂直静刚度失效概率迭代曲线

Fig.4 Iterative curve of failure probability for vertical static stiffness

表2 垂直静刚度不同方法可靠度计算结果

Tab.2 The reliability degrees of different methods for vertical static stiffness

方法	MPP点误差/%	调用有限元次数	失效概率	误差/%	变异系数
MC	—	1×10 <sup>6</sup>	2.385×10 <sup>-2</sup>	—	6.398×10 <sup>-3</sup>
FORM	—	18	2.351×10 <sup>-2</sup>	1.426 0	—
IS	—	29 018	2.368×10 <sup>-2</sup>	0.712 8	2.057×10 <sup>-2</sup>
静态Kriging+IS	0.145 2	287	2.191×10 <sup>-2</sup>	8.134 0	2.030×10 <sup>-2</sup>
U+EFF	5.787×10 <sup>-3</sup>	140+184.2	2.402×10 <sup>-2</sup>	0.712 8	2.402×10 <sup>-2</sup>
U+EFF(Re)	5.305×10 <sup>-2</sup>	140+147.2	2.408×10 <sup>-2</sup>	0.964 4	2.088×10 <sup>-2</sup>

表3 垂直动刚度不同方法计算结果

Tab.3 The reliability degrees of different methods for vertical dynamic stiffness

方法	MPP点误差/%	调用有限元次数	失效概率	误差/%	变异系数
MC	—	2×10 <sup>7</sup>	5.003×10 <sup>-5</sup>	—	3.161×10 <sup>-2</sup>
FORM	—	21	5.513×10 <sup>-5</sup>	10.190	—
IS	—	26 521	4.946×10 <sup>-5</sup>	1.139	2.816×10 <sup>-2</sup>
静态Kriging+IS	1.106	335	3.111×10 <sup>-5</sup>	37.820	3.062×10 <sup>-2</sup>
U+EFF	0.130 5	140+294.7	4.918×10 <sup>-5</sup>	1.699	3.558×10 <sup>-2</sup>
U+EFF(Re)	3.611×10 <sup>-2</sup>	140+194.9	5.001×10 <sup>-5</sup>	3.998×10 <sup>-2</sup>	2.653×10 <sup>-2</sup>

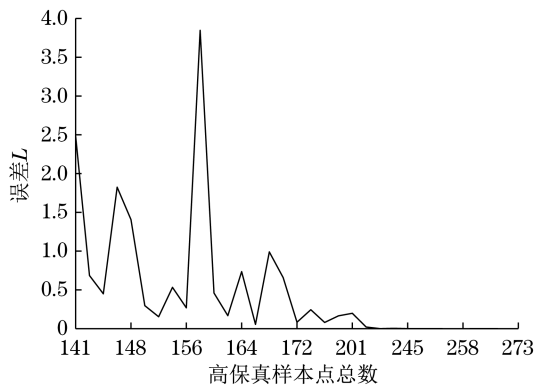


图5 垂直动刚度搜索MPP点迭代曲线

Fig.5 Iterative curve of searching MPP for vertical dynamic stiffness

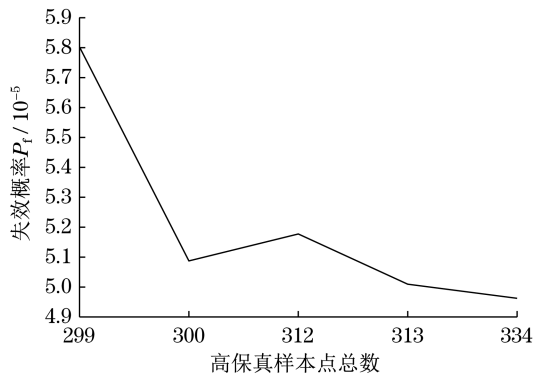


图6 垂直动刚度失效概率迭代曲线

Fig.6 Iterative curve of failure probability for vertical dynamic stiffness

Kriging+IS方法的可靠度计算误差均较大。例如,静刚度的误差达到8.134%,而U+EFF(Re)方法的误差仅为0.964 4%,可见在计算成本相同的情况下,本文U+EFF(Re)方法可以取得更精确的计算结果。这也说明对同样的可靠度计算精度静态,Kriging+IS方法需要付出更多的计算成本。

在2个功能函数的可靠度计算中,FORM方法的计算成本均较低,但其可靠度计算误差较大,不能满足失效概率计算精度的要求。虽然有时U+EFF(Re)方法比U+EFF方法的可靠度计算误差稍大,如表3垂直动刚度U+EFF方法和U+EFF(Re)方法的可靠度计算误差分别为1.699%和 $(3.998 \times 10^{-2})\%$ ,但U+EFF方法平均有限元调用次数为434.7次,U+EFF(Re)方法仅为334.9次,计算成本降低约23%,因此U+EFF(Re)方法在牺牲少量计算误差的情况下可以节省更大的计算成本比较值得。可见本文U+EFF(Re)方法无论是在计算成本、失效概率误差,还是变异系数方面均优于传统

的ISM、FORM、静态Kriging+IS法和U+EFF方法。

## 6 结论

(1) 本文基于动态Kriging代理模型结合ISM抽样的可靠度计算方法,通过学习函数有目的地选择高保真样本点,使搜索MPP点和可靠度计算在代理模型的动态更新中迭代完成,既节省了计算成本,又提高了计算精度,在可接受的计算成本下取得满足可靠度精度要求的计算结果。

(2) 本文U+EFF方法和U+EFF(Re)方法的失效概率计算精度均比较高,不过由于U+EFF(Re)方法中增加了新增停止准则,进一步降低了抽取高保真样本的数量,节省计算成本约20%~46%,说明新增停止准则的有效性。

### 参考文献:

- [1] LI W, QUAN L, HU X, et al. A comprehensive framework for model validation and reliability assessment of container crane structures [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2020, 62(5): 1-16.
- [2] MELCHERS R E. Importance sampling in structural systems [J]. Structural Safety, 1989, 6(1): 3-10.
- [3] ECHARD B, GAYTON N, LEMAIRE M. AK-MCS: an active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo Simulation [J]. Structural Safety, 2011, 33(2): 145-154.
- [4] ECHARD B, GAYTON N, LEMAIRE M. A combined importance sampling and kriging reliability method for small failure probabilities with time-demanding numerical models [J]. Reliability Engineering and System Safety, 2013, 111: 232-240.
- [5] BICHON B J, ELDRED M S, SWILER L P, et al. Efficient global reliability analysis for nonlinear implicit performance functions [J]. AIAA Journal, 2008, 46(10): 2459-2468.
- [6] LEE T H, JUNG J J. A sampling technique enhancing accuracy and efficiency of metamodel-based RBDO: constraint boundary sampling [J]. Computers & Structures, 2008, 46(10): 2459-2468.
- [7] 万力, 徐格宁, 顾迪民, 等. 起重机设计规范: GB/T 3811—2008 [S]. 北京: 中国标准出版社: 2008.
- [8] FAN X, WANG P, HAO F F. Reliability-based design optimization of crane bridges using Kriging-based surrogate models [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2019, 59(3): 993-1005.