

基于高斯展开法的钢轨-双声学黑洞 压电梁俘能特性研究

杨舟^{1,2}, 冯青松¹, 邓杰³, 张凌¹, 贺辉²

(1. 华东交通大学山区土木工程安全与韧性全国重点实验室, 江西 南昌 330013;

2. 湖南工学院土木与建筑工程学院, 湖南 衡阳 421002; 3. 西北工业大学海洋声学信息感知重点实验室, 陕西 西安 710129)

摘要: 声学黑洞效应通过减缓结构中弹性波的传播并抑制边界反射, 为振动能量回收提供了思路。设计了一种用于铁路轨道系统的双声学黑洞压电梁俘能装置, 基于能量泛函变分原理与高斯展开法构建了钢轨-俘能装置的力-电耦合半解析模型, 并经有限元模拟验证。结合列车荷载条件, 系统分析了能量回收特性及其关键影响因素, 包括黑洞几何参数和端部附加质量。结果表明: 在 0~1500 Hz 频率范围内形成四个主要能量回收频带, 最大输出电压为 4.83 V, 回收效率达 2.23%。当压电片长度与结构弯曲波半波长匹配时回收性能最优, 增强黑洞效应或合理配置附加质量可显著提升能量回收效率。

关键词: 能量回收; 高斯展开法; 铁路轨道; 双声学黑洞压电梁; 动态轮轨力

中图分类号: O321; U211.3 文献标志码: A 文章编号: 1004-4523(2025)05-1002-14

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2025.05.012

Power capture characteristics of rail-double acoustic black hole piezoelectric beam based on Gaussian expansion method

YANG Zhou^{1,2}, FENG Qingsong¹, DENG Jie³, ZHANG Ling¹, HE Hui²

(1.State Key Laboratory of Safety and Resilience of Civil Engineering in Mountain Area, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China; 2.School of Civil and Architectural Engineering, Hunan Institute of Technology, Hengyang 421002, China; 3.Key Laboratory of Ocean Acoustic and Sensing, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

Abstract: The acoustic black hole (ABH) effect, which decelerates the propagation of elastic waves and suppresses boundary reflections, presents a novel mechanism for vibration energy harvesting. A dual-ABH piezoelectric beam energy harvester has been designed for application in railway track systems. A semi-analytical electromechanical coupling model was developed using the energy functional variational principle and Gaussian expansion method. Validation was conducted through finite element simulations. Under train-induced loading, energy harvesting behavior was investigated with respect to ABH geometric parameters and terminal mass. Four principal energy harvesting bands were identified within the 0~1500 Hz range, yielding a peak output voltage of 4.83 V and a maximum efficiency of 2.23%. Optimal energy conversion was achieved when the piezoelectric patch length equaled half the bending wave wavelength of the host structure. Efficiency was further improved by strengthening the ABH effect or through appropriate tuning of the terminal mass.

Keywords: energy harvesting; Gaussian expansion method; railway tracks; double acoustic black hole piezoelectric beam; dynamic wheel-rail force

随着轨道交通的迅速发展, 各类铁路监测设备和传感器的需求日益增加, 与之匹配的电力供应需求也随之增大。目前铁路监测设备和传感器的供电方式主要有有线和无线供电两种^[1]。有线供电建设周期长、成本高, 而无线供电主要通过外接移动电源的方式提供电力, 电池能量耗尽后更换困

难、维护成本高。因而探寻一种低成本、少维护的供能方式是未来轨道技术发展的必然趋势。而列车通过时引起的轨道振动作为一种可持续的能量源, 若能实现高效回收和利用, 可有效解决铁路监测设备的供能问题。

近年来, 振动能量俘获技术因其在实现环保、节

收稿日期: 2023-05-15; 修订日期: 2023-07-21

基金项目: 国家自然科学基金委员会-中国国家铁路集团有限公司铁路基础研究联合基金项目(U2468226); 国家自然科学基金资助项目(52468063, 52178423, 52408327); 湖南省自然科学基金资助项目(2024JJ6198)

能以及实时监测系统自供电等方面的潜力,受到了研究人员的广泛关注^[2-5]。在轨道系统振动能量回收技术方面,国内外学者也展开了相关研究,提出了滚珠丝杆式电磁能量采集器^[6]、适用于铁路隧道结构的压电阵列俘能器^[7]、适用于地铁低频振动能量收集的悬臂式 MFC 俘能装置^[8]、基于钢轨吸振器的多模态压电电磁复合式俘能器^[9]、适用于铁路减速顶的高效动能采集器^[10]以及具有宽频调谐、高效俘能特性的新型压电悬臂梁结构等^[11]。由于轨道随机振动具有宽频激励、瞬时及非周期等特点,因此找到一种具有放大振幅和振动周期相对固定的俘能材料载体更有利于轨道振动能量的回收^[12]。具有能量聚集效应的声学黑洞结构为轨道振动能量回收提供了一种思路。声学黑洞效应是通过对结构厚度进行幂律剪裁或者对材料特性参数修改梯度的方式使得弯曲波速度急剧减小而无法发生反射,从而实现振动能量在尖端位置的聚集^[13-15]。与传统的能量回收装置不同,利用声学黑洞进行能量回收改变了传统的设计理念和结构控制方法,通过对结构的优化设计等对能量高度集中和高效回收^[16-20]。

鉴于此,利用声学黑洞的能量聚集特性,设计了一种双声学黑洞压电梁俘能装置,用于铁路轨道的振动能量回收。基于能量泛函变分原理,采用高斯展开法建立了钢轨-双声学黑洞压电梁力-电耦合半解析模型,并利用有限元模拟对本文方法进行了验证。进一步考虑了列车荷载的作用,计算了多车轮作用下的动态轮轨力,分析了动态轮轨力作用下钢轨的振动能量回收特性以及双声学黑洞压电梁的工作原理。最后详细讨论了声学黑洞半径、残余厚度、黑洞阶次以及声学黑洞梁尖端处附加额外质量对输出电压和回收效率的影响。

1 理论分析

1.1 钢轨-双声学黑洞压电梁耦合模型

设计的双声学黑洞压电梁结构如图 1(a) 所示,其中梁的两端体现声学黑洞特征,声学黑洞梁长度为 L_a ,声学黑洞半径为 r_a ,残余厚度为 h_0 ,均质厚度为 h_u ,将系统的坐标原点 O_a 设在梁的中点,左右两个黑洞厚度的变化规律为 $h_a(x) = (h_u - h_0)r_a^{-m}(x \pm L_a/2)^m$,其中 m 表示声学黑洞阶次。压电片安装在声学黑洞梁的两端,长度和厚度分别为 L_{p1} 、 L_{p2} 和 h_{p1} 、 h_{p2} ,负载分别为 R_1 和 R_2 。

如图 1(b) 所示,将轨道结构简化为单层弹性点支承梁模型。进一步考虑钢轨和双声学黑洞压电梁的耦合,双声学黑洞压电梁安装在相邻扣件间钢轨

的跨中位置,定义三组线弹簧(垂向位移弹簧 k_v 、纵向位移弹簧 k_l 和转角弹簧 k_r)用于模拟钢轨与双声学黑洞压电梁之间的耦合边界条件,如图 1(b)、(c) 所示。图中, L_r 表示相邻扣件间钢轨的长度, k_r 表示扣件垂向静刚度。在分析中,钢轨考虑为 Timoshenko 梁,扣件简化为弹簧单元,双声学黑洞压电梁考虑为复合 Euler-Bernoulli 梁。

基于能量泛函变分原理,本文采用高斯展开法建立钢轨-双声学黑洞压电梁力-电耦合半解析模型。钢轨和双声学黑洞压电梁位移场可以表示为基函数 $\alpha_i(x)$ 、 $\beta_j(x)$ 和未知的权重系数 $a_{j,i}(t)$; $j=1,2,3,4,5$ 的组合:

$$\begin{cases} w_r(x,t) = \sum_i^N a_{1,i}(t) \alpha_i(x) = \mathbf{a}_1^T \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{a}_1 \\ \Theta_r(x,t) = \sum_i^N a_{2,i}(t) \alpha_i(x) = \mathbf{a}_2^T \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{a}_2 \\ u_r(x,t) = \sum_i^N a_{3,i}(t) \alpha_i(x) = \mathbf{a}_3^T \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{a}_3 \\ w_a(x,t) = \sum_i^N a_{4,i}(t) \beta_i(x) = \mathbf{a}_4^T \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{a}_4 \\ u_a(x,t) = \sum_i^N a_{5,i}(t) \beta_i(x) = \mathbf{a}_5^T \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{a}_5 \end{cases} \quad (1)$$

式中, $w_r(x,t)$ 、 $\Theta_r(x,t)$ 和 $u_r(x,t)$ 分别表示钢轨的垂向位移、截面转角和纵向位移函数; $w_a(x,t)$ 和 $u_a(x,t)$ 分别表示声学黑洞梁的弯曲振动和纵向振动位移函数; N 表示参与结构位移场表征的位移函数项数; $\boldsymbol{\alpha}$ 表示未知系数列向量; $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 分别表示用于表征钢轨和双声学黑洞压电梁位移场的基函数组成的列向量。

高斯展开法核心在于选取具有局域化特性的高斯小波函数为位移型函数,不同于传统的改进傅里叶级数^[21]、切比雪夫级数^[22-23]等(适用于描述连续性较好的结构),选取具有局域化特性的位移函数能够确保准确捕捉到声学黑洞结构厚度变化区域的特征,进而提高计算效率^[24-25]。将式(1)中的基函数 $\alpha_i(x)$ 和 $\beta_j(x)$ 定义为如下形式:

$$\begin{cases} \alpha_i(x) = 2^{p/2} \exp\left[-(2^p x - q)^2 / 2\right] \\ \beta_j(x) = 2^{k/2} \exp\left[-(2^k x - s)^2 / 2\right] \end{cases} \quad (2)$$

式中, p 、 k 和 q 、 s 分别表示伸缩因子和平移因子。

关于如何正确选择式(2)中的伸缩因子和平移因子的特定细节,可以参考文献[26]。此外,为获取待定系数向量,需要建立耦合系统的拉格朗日量,并推导出钢轨-双 ABH 压电梁的运动方程。

首先考虑钢轨和 ABH 梁的耦合边界势能,根据图 1(b)~(c),耦合边界弹性势能可表示为:

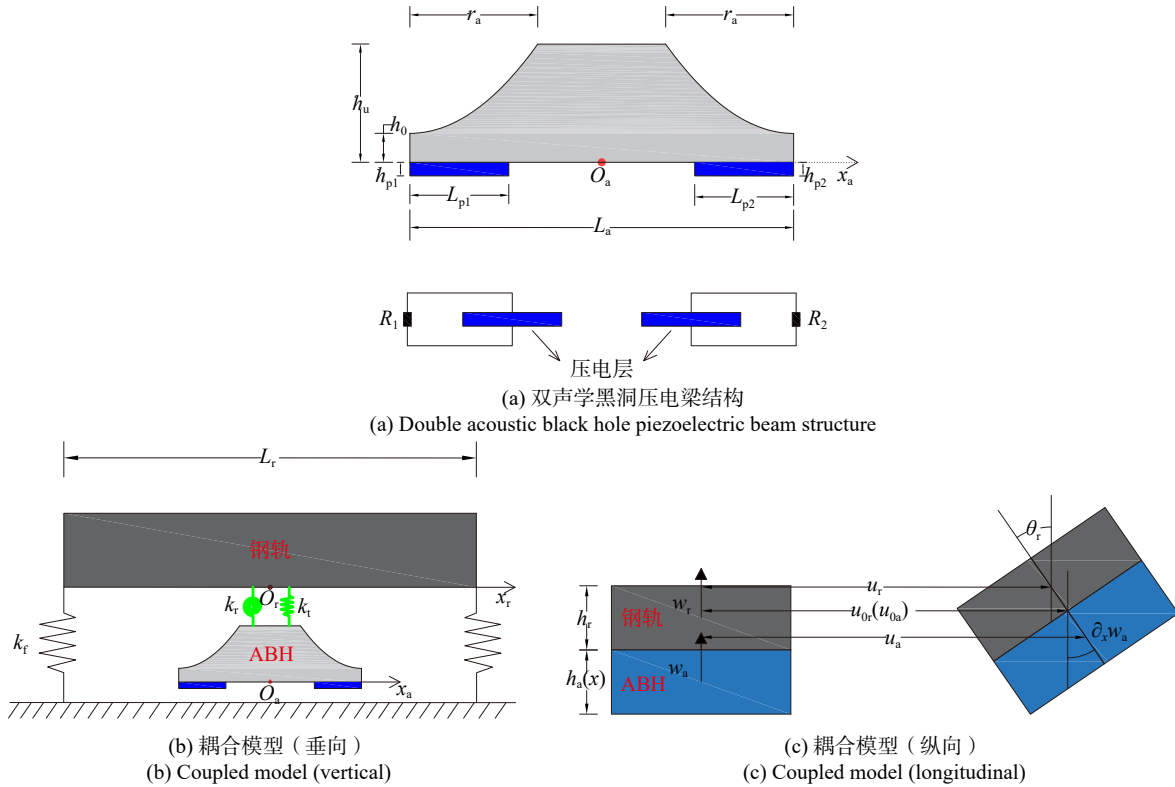


图 1 钢轨-双声学黑洞压电梁耦合模型

Fig. 1 Coupled model of rail-double acoustic black hole piezoelectric beam

$$\begin{aligned}
 U_{\text{edge}} = & \frac{1}{2} k_t \int_{-\frac{L_a}{2} + r_a}^{\frac{L_a}{2} - r_a} [w_r(x) - w_a(x)]^2 dx + \\
 & \frac{1}{2} k_r \int_{-\frac{L_a}{2} + r_a}^{\frac{L_a}{2} - r_a} \left[\theta_r(x) - \frac{\partial w_a}{\partial x} \right]^2 dx + \\
 & \frac{1}{2} k_l \int_{-\frac{L_a}{2} + r_a}^{\frac{L_a}{2} - r_a} \left[u_r(x) + \frac{1}{2} h_r \theta_r(x) - u_a(x) + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2} h_a(x) \frac{\partial w_a}{\partial x} \right]^2 dx = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K}_{\text{edge}} \mathbf{a} \quad (3)
 \end{aligned}$$

式中, $\mathbf{a}^T = [a_1^T \ a_2^T \ a_3^T \ a_4^T \ a_5^T]$; \mathbf{K}_{edge} 表示耦合边界弹性势能刚度矩阵。

系统的动能包括钢轨、ABH 梁及两部分压电层的动能, 即 $K = K_r + K_a + K_{p1} + K_{p2}$, 具体各部分的动能可表示为:

$$\begin{cases}
 K_r = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L_r}{2}}^{\frac{L_r}{2}} \rho_r A_r (\dot{w}_r^2 + \dot{u}_r^2) \dot{w}_r^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-\frac{L_r}{2}}^{\frac{L_r}{2}} \rho_r I_r \dot{\theta}_r^2 dx = \\
 \quad \frac{1}{2} \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{M}_r \dot{\mathbf{a}} \\
 K_a = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L_a}{2}}^{\frac{L_a}{2}} \rho_a b h_a(x) (\dot{w}_a^2 + \dot{u}_a^2) dx = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{M}_a \dot{\mathbf{a}} \\
 K_{p1} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L_a}{2}}^{-\frac{L_a}{2} + L_{p1}} \rho_p b h_{p1} \dot{w}_a^2 dx = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{M}_{p1} \dot{\mathbf{a}} \\
 K_{p2} = \frac{1}{2} \int_{\frac{L_a}{2} - L_{p2}}^{\frac{L_a}{2}} \rho_p b h_{p2} \dot{w}_a^2 dx = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{M}_{p2} \dot{\mathbf{a}}
 \end{cases} \quad (4)$$

式中, K_r 、 K_a 及 K_{p1} 、 K_{p2} 分别表示钢轨、ABH 梁及两部分压电层的动能; ρ_r 、 A_r 和 I_r 分别表示钢轨的材料密度、截面面积和惯性矩; ρ_a 、 ρ_p 和 b 分别表示声学

黑洞梁、压电层的材料密度和宽度; \mathbf{M}_r 、 \mathbf{M}_a 及 \mathbf{M}_{p1} 、 \mathbf{M}_{p2} 分别表示钢轨、ABH 梁及两部分压电层的质量矩阵; $\dot{\mathbf{a}}^T = [\dot{a}_1^T \ \dot{a}_2^T \ \dot{a}_3^T \ \dot{a}_4^T \ \dot{a}_5^T]$ 。

同样地, 系统的势能也包括四个部分, 即 $U = U_r + U_a + U_{p1} + U_{p2}$, 其中钢轨和声学黑洞梁的势能可表示为:

$$\begin{cases}
 U_r = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L_r}{2}}^{\frac{L_r}{2}} E_r I_r \left(\frac{\partial \theta_r}{\partial x} \right)^2 + \kappa_r G_r A_r \left(\frac{\partial w_r}{\partial x} - \theta_r \right)^2 + \\
 \quad E_r A_r \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K}_r \mathbf{a} \\
 U_a = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L_a}{2}}^{\frac{L_a}{2}} E_a I_a(x) \left(\frac{\partial^2 w_a}{\partial x^2} \right)^2 + \\
 \quad E_a b h_a(x) \left(\frac{\partial u_a}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K}_a \mathbf{a}
 \end{cases} \quad (5)$$

式中, E_r 、 κ_r 和 G_r 分别表示钢轨的弹性模量、剪切系数和剪切刚度; $I_a(x) = b h_a^3(x)/12$ 为声学黑洞梁的局域化惯性矩; E_a 表示声学黑洞梁的弹性模量; \mathbf{K}_r 和 \mathbf{K}_a 分别表示钢轨和 ABH 梁的刚度矩阵。

在计算中, 钢轨与压电片自身阻尼的影响以复化弹性模量的形式考虑, 而扣件阻尼的影响以复化扣件刚度的形式考虑, 即 $E_r = E_r(1 + i\eta_r)$, $E_a = E_a(1 + i\eta_a)$, $k_f = k_f(1 + i\eta_f)$; 其中, η_r 表示钢轨的损耗因子, η_a 表示压电片的损耗因子, η_f 表示扣件的损耗因子。

对于压电层的势能, 需要考虑薄梁的线性电弹性本构^[20]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_p \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_p^E & -e_{zx} \\ e_{zx} & \varepsilon_{zz}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_p \\ E \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中, σ_p 、 γ_p 、 D 和 E 分别表示压电层的应力、应变、电位移和电场强度; c_p^E 、 e_{zx} 和 ε_{zz}^s 分别表示压电层的弹性刚度、压电常数和介电常数。

根据式(6), 声学黑洞梁左端压电层的势能可表示为:

$$\begin{aligned} U_{p1} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_{p1}} \sigma_p \gamma_p d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{p1}} (c_p^E \gamma_p - e_{zx} E) \gamma_p d\Omega = \\ & \frac{1}{2} \int_{-\frac{L_a}{2}}^{-\frac{L_a}{2}+L_{p1}} c_p^E I_{p1}(x) \left(\frac{\partial^2 w_a}{\partial x^2} \right)^2 dx - \\ & \frac{1}{2} V_{p1} \int_{-\frac{L_a}{2}}^{-\frac{L_a}{2}+L_{p1}} \frac{e_{zx} b [h_a(x) + h_{p1}]}{2} \frac{\partial^2 w_a}{\partial x^2} dx = \\ & \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K}_{p1} \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \boldsymbol{\theta}_1 V_{p1} \end{aligned} \quad (7)$$

式中, $I_{p1}(x) = \frac{1}{12} b h_{p1}^3 + h_{p1} \left[\frac{h_a(x)}{2} + \frac{h_{p1}}{2} \right]^2$ 表示声学黑洞梁左端压电层的局域化惯性矩; \mathbf{K}_{p1} 表示左端压电层的刚度矩阵; $\boldsymbol{\theta}_1$ 表示力-电耦合向量; V_{p1} 表示左端压电层产生的电压; Ω 表示积分的空间域, 包含 x 、 y 、 z 三轴坐标, 即 $dx dy dz$; Ω_{p1} 表示在左端压电层的三维空间域进行积分。

同理, 可以得到声学黑洞梁右端压电层的势能:

$$U_{p2} = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K}_{p2} \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \boldsymbol{\theta}_2 V_{p2} \quad (8)$$

式中, \mathbf{K}_{p2} 表示右端压电层的刚度矩阵; $\boldsymbol{\theta}_2$ 表示力-电耦合向量; V_{p2} 表示右端压电层产生的电压。

进一步地, 考虑压电片内储存的电能, 根据式(6), 声学黑洞梁左端压电层内储存的电能可表示为:

$$\begin{aligned} W_{p1} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_{p1}} E D d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{p1}} (e_{zx} \gamma_p + \varepsilon_{zz}^s E) E d\Omega = \\ & \frac{1}{2} V_{p1} \int_{-\frac{L_a}{2}}^{-\frac{L_a}{2}+L_{p1}} \frac{e_{zx} b [h_a(x) + h_{p1}]}{2} \left(\frac{\partial^2 w_a}{\partial x^2} \right)^2 dx + \\ & \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{zz}^s \frac{b L_{p1}}{h_{p1}} \right) V_{p1}^2 = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \boldsymbol{\theta}_1 V_{p1} + \frac{1}{2} C_{p1} V_{p1}^2 \end{aligned} \quad (9)$$

式中, C_{p1} 表示左端压电层的电容。

同理, 可以得到声学黑洞梁右端压电层内储存的电能:

$$W_{p2} = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \boldsymbol{\theta}_2 V_{p2} + \frac{1}{2} C_{p2} V_{p2}^2 \quad (10)$$

式中, C_{p2} 表示右端压电层的电容。

此外, 外力 $f(t)$ 作用在钢轨上输入的机械功和电荷 q_1 、 q_2 做的电力功的总和为:

$$W_f = f(t) w_r(0) + V_{p1} q_1 + V_{p2} q_2 = \mathbf{a}^T \mathbf{f} + V_{p1} q_1 + V_{p2} q_2 \quad (11)$$

式中, \mathbf{f} 表示外荷载列向量。

最后考虑扣件的弹性势能, 可表示为:

$$\begin{aligned} U_f &= \frac{1}{2} k_{fv} [w_r^2(-L_r/2) + w_r^2(L_r/2)] + \\ & \frac{1}{2} k_{fh} [u_r^2(-L_r/2) + u_r^2(L_r/2)] = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K}_f \mathbf{a} \end{aligned} \quad (12)$$

式中, k_{fv} 和 k_{fh} 分别表示扣件的垂向和纵向静刚度; \mathbf{K}_f 表示扣件弹簧的刚度矩阵。

综上, 钢轨-双声学黑洞压电梁耦合系统的拉格朗日量可表示为:

$$\begin{aligned} L &= E - U - U_{edge} - U_f + W_{p1} + W_{p2} + W_f = \\ & \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{a}} - \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \boldsymbol{\theta}_1 V_{p1} + \mathbf{a}^T \boldsymbol{\theta}_2 V_{p2} + \\ & \frac{1}{2} C_{p1} V_{p1}^2 + \frac{1}{2} C_{p2} V_{p2}^2 + \mathbf{a}^T \mathbf{f} + V_{p1} q_1 + V_{p2} q_2 \end{aligned} \quad (13)$$

式中, L 表示拉格朗日算子; 总质量矩阵 $\mathbf{M} = \mathbf{M}_r + \mathbf{M}_a + \mathbf{M}_{p1} + \mathbf{M}_{p2}$; 总刚度矩阵 $\mathbf{K} = \mathbf{K}_r + \mathbf{K}_a + \mathbf{K}_{p1} + \mathbf{K}_{p2} + \mathbf{K}_{edge} + \mathbf{K}_f$ 。进一步定义 $\mathbf{f} = \hat{\mathbf{F}} e^{i\omega t}$, $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{A}} e^{i\omega t}$, $V_{p1} = \hat{V}_{p1} e^{i\omega t}$, $V_{p2} = \hat{V}_{p2} e^{i\omega t}$, 其中, ω 表示圆频率, $\hat{\mathbf{A}}$ 表示未知系数幅值列向量, 变量上方加“ $\hat{\cdot}$ ”表示幅值, 并结合 Euler-Lagrange 方程^[20]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial [\dot{\mathbf{a}}^T, \dot{V}_{p1}, \dot{V}_{p2}] } \right) - \frac{\partial L}{\partial [\mathbf{a}^T, V_{p1}, V_{p2}] } = 0 \quad (14)$$

将式(13)处理为:

$$\begin{cases} (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \hat{\mathbf{A}} - \boldsymbol{\theta}_1 \hat{V}_{p1} - \boldsymbol{\theta}_2 \hat{V}_{p2} = \hat{\mathbf{F}} \\ i\omega \boldsymbol{\theta}_1^T + \left(i\omega C_{p1} + \frac{1}{R_1} \right) \hat{V}_{p1} = 0 \\ i\omega \boldsymbol{\theta}_2^T + \left(i\omega C_{p2} + \frac{1}{R_2} \right) \hat{V}_{p2} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

将式(15)进一步处理为矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} & -\boldsymbol{\theta}_1 & -\boldsymbol{\theta}_2 \\ i\omega \boldsymbol{\theta}_1^T & i\omega C_{p1} + \frac{1}{R_1} & 0 \\ i\omega \boldsymbol{\theta}_2^T & 0 & i\omega C_{p2} + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} \\ \hat{V}_{p1} \\ \hat{V}_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

通过求解式(16)即可得到两端压电片的输出电压幅值 \hat{V}_{p1} 、 \hat{V}_{p2} 以及待定系数向量 $\hat{\mathbf{A}}$, 将待定系数向量 $\hat{\mathbf{A}}$ 代入式(1)中能进一步得到钢轨和双声学黑洞压电梁的振动位移响应。

1.2 动态轮轨力计算模型

钢轨振动由列车荷载激发, 在分析钢轨的振动能量回收特性时需要考虑动态轮轨力的作用。在轨道交通中, 车辆运行速度远小于钢轨中振动波的传播速度, 故在频域内计算轮轨相互作用力时可采用移动不平顺模型^[27-29], 轮轨相互作用力可由下式计算^[30]:

$$F_w = -\frac{R}{\alpha_w + \alpha_c + \alpha_r} \quad (17)$$

式中, α_w 、 α_c 和 α_r 分别表示车轮、轮轨接触弹簧和钢轨的动柔度; $\alpha_c = 1/k_h$, 其中 k_h 表示线性轮轨接触刚度; R 表示轨道不平顺幅值。可以看出, 求解动态轮轨相互作用力的关键是获取式(17)中的三个动柔度。

进一步建立频域内车辆-轨道-双声学黑洞压电梁垂向耦合动力分析模型, 如图2所示。图2中,

k_1 和 c_1 分别表示车辆一系悬挂的刚度和阻尼, k_2 和 c_2 分别表示车辆二系悬挂的刚度和阻尼, M_c 、 M_b 和 M_w 分别表示车体、转向架和车轮的轴重。其中, 单节车辆模型考虑为含车体沉浮和点头 (z_c, θ_c)、转向架的沉浮和点头 ($z_{t1}, \theta_{t1}, z_{t2}, \theta_{t2}$) 以及四个车轮沉浮 ($z_{w1}, z_{w2}, z_{w3}, z_{w4}$) 共 10 个自由度的纵向半车模型。通过逐一对各刚体运用 D'Alembert 原理, 可得车辆系统的动力学方程为:

$$M_v \ddot{Z}_v + C_v \dot{Z}_v + K_v Z_v = F_v e^{i\omega t} \quad (18)$$

式中, M_v 、 C_v 和 K_v 分别表示车辆系统的质量、阻尼和刚度矩阵, 具体形式可参考文献 [31], F_v 表示车辆

系统的外荷载矩阵。定义 $Z_v = \hat{Z}_v e^{i\omega t}$, 代入式 (18) 求解即能得到车轮的动柔度, 表示为:

$$\alpha_w = (i\omega C_v + K_v - \omega^2 M_v)^{-1} \cdot F_v \quad (19)$$

在多车轮作用下计算钢轨动柔度时, 基于叠加原理, 采用主动轮与被动轮的分类方法加以考虑 [27-29]。当轮轨相互作用点距离动柔度考察点大于 10 m 时, 可忽略该轮轨相互作用点处的轮轨作用力对考察点处动柔度的影响 [27-29]。因此, 本文仅考虑相邻车厢间距离较近的 4 个轮对之间的相互影响, 即图 2 中序号 1~4 对应的 4 个车轮。

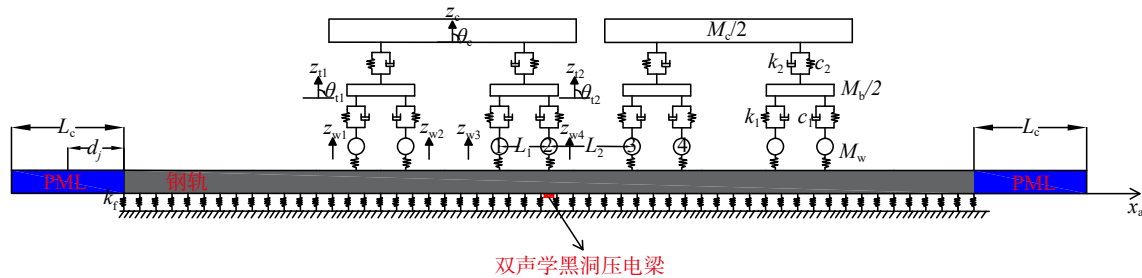


图 2 车辆-轨道-双声学黑洞压电梁垂向耦合动力分析模型

Fig. 2 Vertical coupling dynamic analysis model of vehicle-track-acoustic black hole piezoelectric beam

在本文利用高斯展开法建立的钢轨-双黑洞压电梁模型中, 扣件反力的影响已经考虑为弹簧弹性势能附加到耦合系统的能量泛函中, 因而在后续计算钢轨动柔度时只需要考虑车轮的叠加效应。以车轮 2 为主动轮为例, 根据叠加原理, 2 号车轮处的钢轨动柔度 α_{r2} 可表示为:

$$\alpha_{r2} = \alpha(x_2, x_2) + P_{w1}\alpha(x_2, x_1) + P_{w3}\alpha(x_2, x_3) + P_{w4}\alpha(x_2, x_4) \quad (20)$$

式中, $\alpha(x_i, x_j)$ 表示力作用在 x_j 时, x_i 处的动柔度, 可通过 1.1 节中的方法计算得到; $P_{wj} = k_w u_r(x_j)$ 表示被动轮处的轮轨接触力, 其中, $u_r(x_j)$ 表示第 j 个被动轮处的钢轨位移, $k_w = 1/(\alpha_w + \alpha_c)$ 表示轮轨接触刚度。

参照式 (20) 的形式, 可以写出其余三个被动轮处的钢轨位移, 整理为矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} 1 - k_w \alpha(x_1, x_1) & 0 & -k_w \alpha(x_1, x_3) & -k_w \alpha(x_1, x_4) \\ -k_w \alpha(x_2, x_1) & 1 & -k_w \alpha(x_2, x_3) & -k_w \alpha(x_2, x_4) \\ -k_w \alpha(x_3, x_1) & 0 & 1 - k_w \alpha(x_3, x_3) & -k_w \alpha(x_3, x_4) \\ -k_w \alpha(x_4, x_1) & 0 & k_w \alpha(x_4, x_3) & 1 - k_w \alpha(x_4, x_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r(x_1) \\ \alpha_{r2} \\ u_r(x_3) \\ u_r(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(x_1, x_2) \\ \alpha(x_2, x_2) \\ \alpha(x_3, x_2) \\ \alpha(x_4, x_2) \end{bmatrix} \quad (21)$$

通过求解式 (21) 能得到主动轮 2 处的钢轨动柔度 α_{r2} , 结合式 (19) 计算得到的车轮动柔度 α_w 以及轮轨接触弹簧动柔度 $\alpha_c = 1/k_h$, 一并代入式 (17) 中就能计算出车轮 2 处的动态轮轨力。同理, 可以计算出

车轮 1、3、4 为主动轮时, 3 个轮子的动态轮轨力。

此外, 为了模拟无限长轨道结构, 尽可能消除在钢轨两端边界处反射波的影响, 引入完美匹配层 (PML) [32-33]。在图 2 中, 于钢轨两侧扩展了 2 个额外的 PML 区域。在本文中, 通过修改复杨氏模量的损耗因子来实现 PML 的效果。在 PML 区域中, 考虑 $E_r^* = E_r [1 + i(\eta_r + \eta_{pml})]$, 其中 η_{pml} 表示局部损耗因子, 具体表示为:

$$\eta_{pml} = \eta_{\max} \left(\frac{d_j}{L_c} \right)^c \quad (22)$$

式中, d_j 表示 PML 层内任意一点到钢轨边界的距离; L_c 表示 PML 的长度, 并且在 $d=L_c$ 时取到最大损耗因子 η_{\max} ; c 表示平滑系数。

2 模型验证

本节将验证第 1 节中钢轨-双声学黑洞压电梁力-电耦合模型及动态轮轨力计算模型的准确性。

2.1 钢轨-双声学黑洞压电梁力-电耦合模型验证

利用有限元软件 Comsol Multiphysics 建立图 1(b) 所示的钢轨-双声学黑洞压电梁有限元模型, 如图 3 所示。使用三维固体力学模块和静电模块计算钢轨-双声学黑洞压电梁的变形和应变引起的电荷。在电路模块考虑电阻的能量采集。所有模块都由

Comsol Multiphysics 的多物理场-压电效应进行耦合驱动。将有限元模型划分为有限个通过节点连接的单元,单元类型为 Langrage-quadratic, 网格类型为自由四面体网格,为满足计算精度需求,将其划分为 813677 个域单元、177440 个边界单元以及 12101 个边单元,求解总自由度为 4986384,相对容差设置为 0.001。钢轨、双声学黑洞梁及压电层的几何和材料参数如表 1 所示。定义回收功率:

$$P = \frac{\widehat{V}_{p1} \widehat{V}_{p1}^*}{R_1^2} + \frac{\widehat{V}_{p2} \widehat{V}_{p2}^*}{R_2^2} \quad (23)$$

式中,上标“*”表示共轭算子。

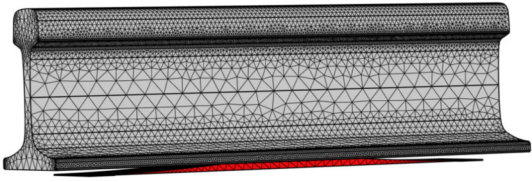


图3 钢轨-双声学黑洞压电梁有限元模型

Fig. 3 Finite element model of rail-double acoustic black hole piezoelectric beam

表1 钢轨、双声学黑洞梁及压电层的几何和材料参数

Tab. 1 Geometrical parameters and material parameters of the rail, double acoustic black hole beam and piezoelectric layer

钢轨		ABH		压电层	
参数	取值	参数	取值	参数	取值
E_r	210 GPa	E_a	210 GPa	c_p	127.21 GPa
A_r	$7.74 \times 10^{-3} \text{ m}^2$	h_u	0.008 m	h_p	0.0004 m
I_r	$3.21 \times 10^{-5} \text{ m}^4$	b	0.1 m	b	0.1 m
ρ_r	7850 kg/m ³	ρ_a	7850 kg/m ³	ρ_p	7500 kg/m ³
κ_r	0.4	r_a	0.1667 m	e_{zx}	-6.62281 C/m ²
G_r	77 GPa	h_0	0.0008 m	ϵ_{zz}	$1.2693 \times 10^{-8} \text{ F/m}$
k_{fv}	$60 \times 10^6 \text{ N/m}$	L_a	0.5 m	L_p	0.03 m
k_{th}	$25 \times 10^6 \text{ N/m}$	η_a	0.01	k_t	10^{12} N/m^2
η_r	0.01	m	2	k_r	10^{12} N/rad
η_f	0.25	-	-	k_l	10^{12} N/m^2
L_r	0.6 m	-	-	-	-

图 4 对比了利用高斯展开法和有限元法计算得到的钢轨-双声学黑洞压电梁的回收效率。此外,为了进一步证明本文方法的准确性,利用高斯展开法和有限元法对比了几个频率下的双声学黑洞压电梁的受迫振型,如图 5 所示。

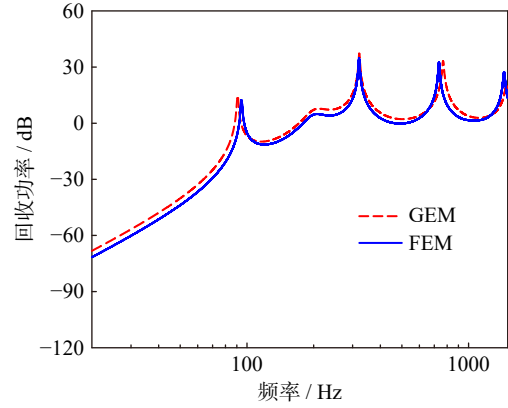


图4 利用高斯展开法和有限元法计算得到的回收功率对比(参考功率 $P_{ref}=10^{-12} \text{ W}$)

Fig. 4 Comparison of recovered power calculated by GEM and FEM (the power reference value $P_{ref}=10^{-12} \text{ W}$)

由图 4 可以看出,由于建模维度的差异(理论为一维,有限元建模为三维),两种方法的计算结果存在少量差异,但整体吻合度较好。此外,图 5 中两种方法计算得到的受迫振型也基本一致。图 4 和 5 的结果也表明了本文方法具有很好的准确性。

2.2 双声学黑洞压电梁能量回收的增强作用

上文中提到,声学黑洞结构的一个重要特征是通过幂率剪裁厚度来实现能量集中。因此本节将会对声学黑洞的能量集中效应进行分析验证,并证明双声学黑洞压电梁对于能量回收的增强作用。

定义能量比 $\Gamma = 10 \lg(\langle \dot{u}_{abh}^2 \rangle / \langle \dot{u}_{uni}^2 \rangle)$, 其中, $\langle \dot{u}_{abh}^2 \rangle$ 表示双声学黑洞梁的厚度突变部分的均方速度, $\langle \dot{u}_{uni}^2 \rangle$ 表示厚度均匀部分的均方速度,能量比越大,表示能量集中效应越明显。通过对比一根均质梁与双声学

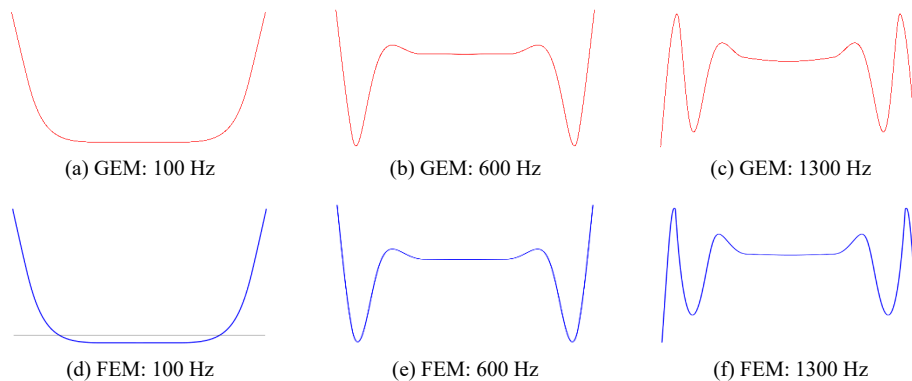


图5 利用高斯展开法和有限元法计算得到的受迫振型对比

Fig. 5 Comparison of forced mode shapes calculated by GEM and FEM

黑洞梁的 Γ 值,可以表征双声学黑洞梁的能量集中效应,如图6(a)所示。

由图6(a)可以看出,与均匀梁相比,双声学黑洞梁的能量比在四个频段都有明显提升,这表明其对

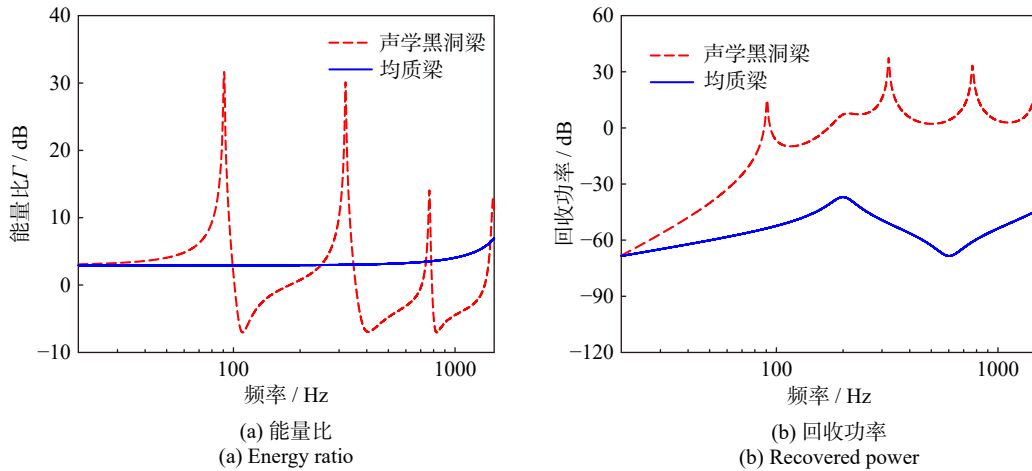


图6 声学黑洞梁与均匀梁的能量比和回收功率对比

Fig. 6 Comparison of energy ratio and recovered power of the acoustic black hole beam and the uniform beam

2.3 附加双声学黑洞压电梁对钢轨动力响应的影响

为进一步探讨在钢轨上附加双声学黑洞压电梁对其工作状态的影响,计算分析了单位谐荷载作用下(作用于图2的钢轨跨中位置),有/无附加双ABH压电梁的钢轨动柔度对比结果如图7所示。在对比分析中,钢轨长度为50个扣件间距。

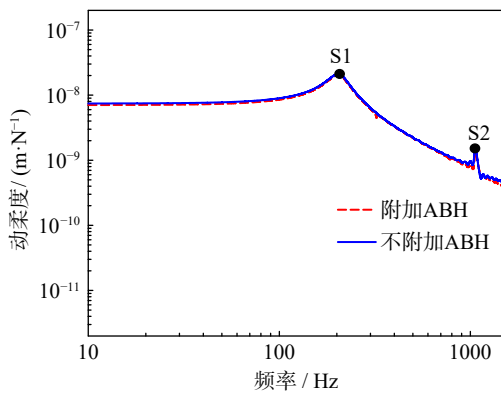


图7 附加ABH压电梁对钢轨动柔度的影响

Fig. 7 Influence of additional ABH piezoelectric beam on the dynamic flexibility of rail

由于图2中仅在一个扣件间距内的钢轨布置双声学黑洞压电梁,而双声学黑洞压电梁的质量 $m_a + m_p = \rho_a b \int_{-\frac{L_a}{2}}^{\frac{L_a}{2}} h_a(x) dx + \rho_p b L_p h_p \approx 1.9$ kg,而钢轨的质量为 $m_r = \rho_r A_r \cdot 50 L_r \approx 1824$ kg,两者相比双声学黑洞压电梁的质量几乎可以忽略不计,因而其对钢轨工作状态的影响也很小。这一结论在图7中得到了体现:在0~1500 Hz范围内,不附加ABH的钢轨垂向振动产生两个峰值(S1对应钢轨-扣件系统的一阶共振频率,S2对应钢轨的一阶“pinned-pinned”共振频

率);而附加ABH后,对两个峰值的位置和大小几乎没有影响,两条曲线也基本重合。这也进一步表明了,在钢轨上安装双声学黑洞压电梁不会影响钢轨的刚度和工作状态。

2.4 动态轮轨力计算模型验证

第1.2节中提到,求解动态轮轨相互作用力的关键是获取式(17)中的三个动柔度,而其中钢轨动柔度的计算占主导地位。为了证明本文轮轨力计算模型的准确性,与文献[29]中钢轨动柔度计算结果进行了对比,如图8所示。

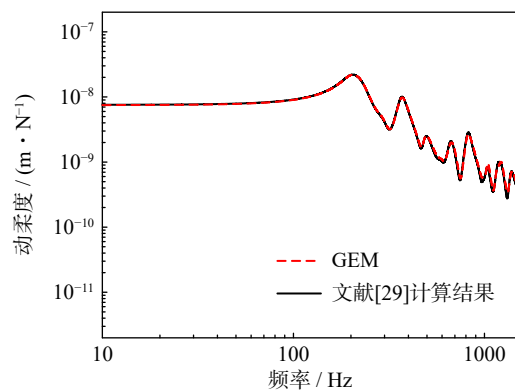


图8 钢轨动柔度

Fig. 8 Dynamic flexibility of rail

由图8可以看出,本文计算得到的考虑多轮叠加效应后的钢轨动柔度与文献[29]一致,证明了本文轮轨力计算模型的准确性。进一步计算了图2中主动轮1~4处的动态轮轨力,如图9(a)所示。此外,为更好地对动态轮轨力幅值曲线进行说明,图9(b)

给出了四个车轮接触点位置钢轨动柔度、车轮动柔度以及轮轨接触弹簧动柔度曲线。在计算中, 车辆为地铁列车 A 型车, 计算参数如表 2 所示。车速为

70 km/h; 轨道不平顺采用美国五级谱; 钢轨长度为 $50 \times L_r = 30 \text{ m}$; 线性轮轨接触刚度 $k_h = 1.4 \times 10^9 \text{ N/m}$; PML 层的相关参数为: $L_c = 4 \text{ m}$, $\eta_{\max} = 10$, $c = 2$ 。

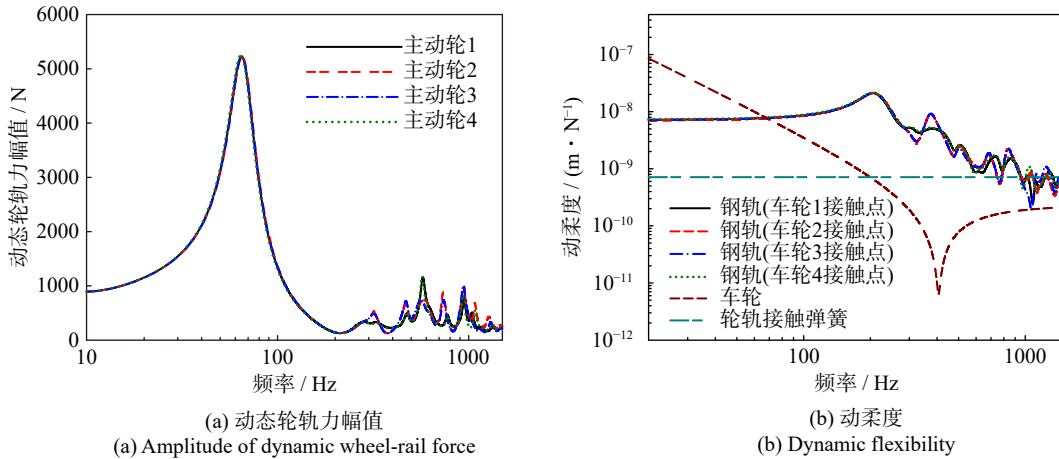


图 9 各主动轮处的动态轮轨力幅值及动柔度曲线

Fig. 9 Amplitude of dynamic wheel-rail force at each active wheel and dynamic flexibility curves

表 2 地铁列车 A 型车计算参数^[34]

Tab. 2 Calculation parameters of subway A-type vehicle^[34]

部件	参数	取值
车体	一半车体质量	19250 kg
	点头惯量	$2.5 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
	一半转向架质量	1490 kg
转向架	点头惯量	$3.6 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
	相邻车厢转向架之间的距离 L_2	3.3 m
车轮	单轮质量	675 kg
	轴距 L_1	2 m
二系悬挂	垂向刚度	$2.5 \times 10^6 \text{ N/m}$
	垂向阻尼	$2.0 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{s/m}$
一系悬挂	垂向刚度	$2.1 \times 10^6 \text{ N/m}$
	垂向阻尼	$4.9 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{s/m}$

由图 9(b) 可以看出, 在 0~100 Hz 范围内, 三个动柔度曲线中由车轮动柔度占主导, 且四个车轮接触点处钢轨动柔度曲线基本一致, 因此在该频率范围内四个车轮的动态轮轨力幅值曲线基本一致; 而在 250 Hz 后, 钢轨动柔度占主导, 且四个车轮接触点处钢轨动柔度曲线产生明显差异, 因此对应的轮轨力幅值产生明显差别。

3 动态轮轨力作用下的钢轨振动能量回收特性

3.1 双声学黑洞压电梁能量回收特性及工作机理

考虑四个车轮同时作用, 式 (11) 中外荷载做功调整为:

$$W_f = V_{p1}q_1 + V_{p2}q_2 + \sum_{i=1}^4 a^T F_i \alpha(x_i) \quad (24)$$

式中, x_i 表示图 2 中车轮 1~4 的位置坐标; F_i 表示车轮 1~4 处的动态轮轨力幅值。

定义回收效率:

$$\eta_H = P/P_f, \quad P_f = \sum_{i=1}^4 \omega F W_f(x_i) \quad (25)$$

式中, P_f 表示输入钢轨的轮轨力做功。

计算得到两部分压电层的输出电压和钢轨振动能量回收效率, 如图 10 所示。将输出电压大于 0.1 V 对应的频率点视为能量回收的有效工作频率, 表 3 列出了 0~1500 Hz 范围内钢轨振动能量回收有效工作频段。

结合图 10 和表 3 可以发现, 在动态轮轨力作用下, 0~1500 Hz 范围内共产生了 4 个振动能量回收的有效工作频段。且随着分析频率的增大, 振动能量的回收效果也逐步增强, 在有效工作频段 III 内振动回收效果达到最佳, 最大输出电压为 4.83 V, 回收效率为 2.23%。分析频率继续增大, 振动能量的回收效率呈现弱化的效果。为了揭示此现象的机理, 计算并绘制了声学黑洞梁左端压电层的振幅随频率的变化关系图, 如图 11 所示。为方便比较, 对振幅数据进行了归一化处理。

当弯曲波传递到压电片区域时, 弯曲应力使得压电片上下两面内产生匀强电场。随着频率的增大, 压电片的变形越剧烈, 上下两端的电势差整体趋势在增大, 输出的电压值也逐步增大。当频率达到 767 Hz 时, 压电片的长度刚好等于一个半波长(图 11 中红色曲线), 压电片上下两端的电势差达到最大, 输出电压达到最大值(对应图 10(a) 中的有效工作频段 III 的峰值)。当频率继续增大, 由图 11 可以看出,

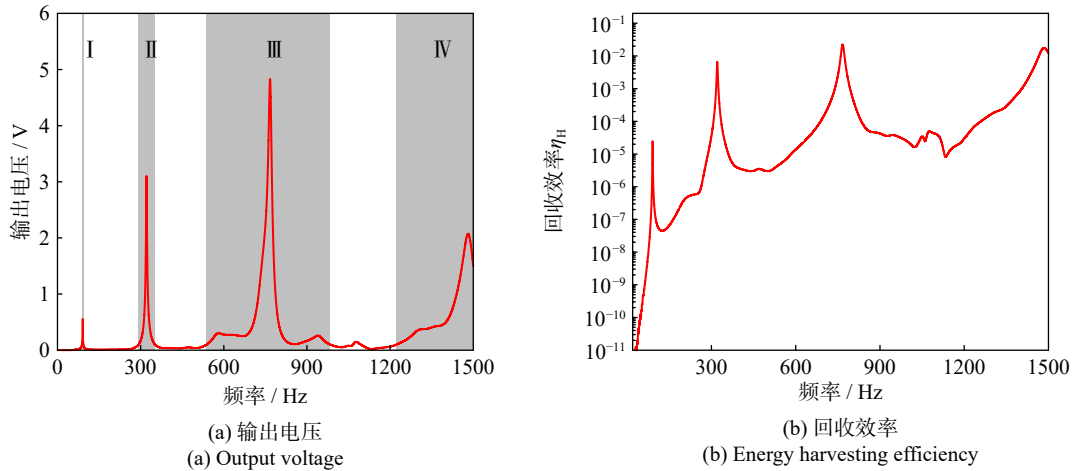


图 10 动态轮轨力作用下双声学黑洞梁的输出电压和能量回收效率

Fig. 10 Output voltage and energy harvesting efficiency of double acoustic black hole beam under dynamic wheel-rail force

表 3 钢轨振动能量回收有效工作频段
Tab. 3 Effective operational frequency band of rail vibration energy harvesting

有效工作频段/Hz	最大输出电压/V	输出电压均值/V	最大回收效率/%
I: 88~94	0.55	0.27	0.00246
II: 292~352	3.09	0.91	0.65
III: 538~984	4.83	1.02	2.23
IV: 1223~1500	2.07	0.88	1.76

压电片内除了正向弯曲还逐渐产生背向弯曲, 由于正向弯曲产生的电场与背向弯曲产生的电场方向相反, 能量回收效率受到抑制。因而, 相较于第三阶有效工作频段, 第四阶的能量回收效果有所弱化。

3.2 声学黑洞参数的影响

为获得更好的能量回收效果, 本节详细分析了黑洞半径、残余厚度和黑洞阶次对输出电压和回收效率的影响。首先考虑黑洞半径 r_a 的影响, 对比了

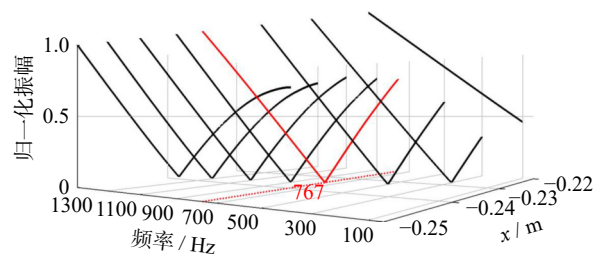


图 11 声学黑洞梁左端压电片内归一化振幅随频率的变化
Fig. 11 Change relationship of the normalized amplitude of the piezoelectric patch at the left end of the acoustic black hole beam with frequency

不同声学黑洞半径下钢轨振动能量的回收特性, 如图 12 所示。

随着声学黑洞半径的增大, 黑洞效应逐步增强, 能量集中效果也越明显。因而, 从图 12 中可以看到, 黑洞半径越大, 共振峰值频率越多, 能量回收的有效工作频段数也越多。因此, 在实际应用中应当适当采取较大的黑洞半径, 以获得更好的振动能量回收效果。

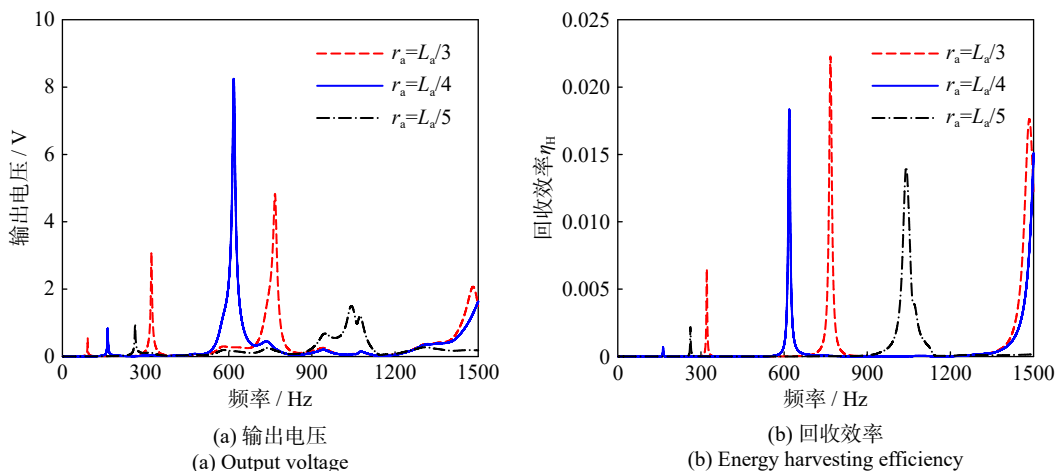


图 12 声学黑洞半径的影响

Fig. 12 Influence of radius of acoustic black hole

进一步考虑声学黑洞阶次 m 对能量回收特性的影响。黑洞阶次控制着厚度变化的速率, m 的取值范围一般为 [2, 3], 本文中考虑了 $m=4$ 的情况, 如图 13 所示。由于过大的阶次将使得黑洞边缘处的光滑性

下降, 影响黑洞效应在低频的表现。因而从图 13 中可以看到, 随着 m 的增大, 在 300 Hz 的范围内, 无论是输出电压还是回收效率, 都有明显的下降。为了获得更好的能量回收效果, 阶次 m 的值应当适当减小。

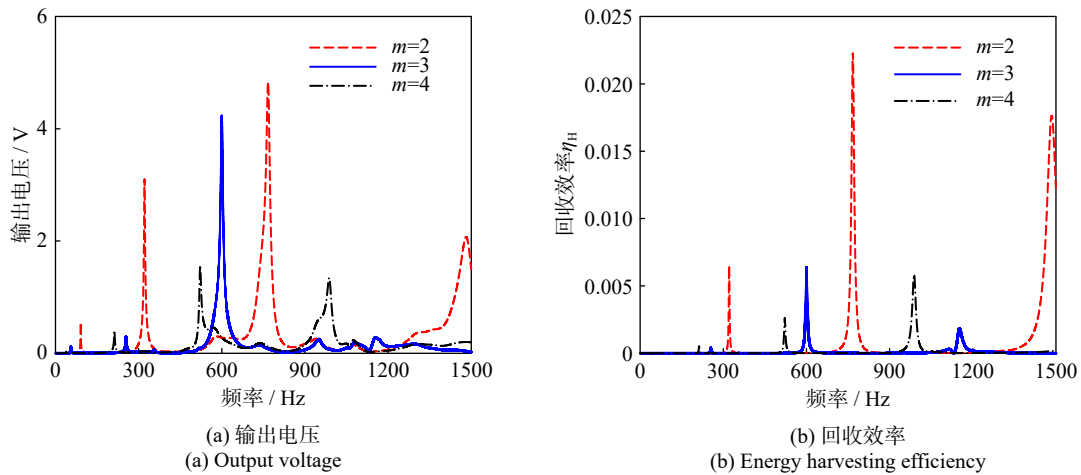


图 13 声学黑洞阶次的影响

Fig. 13 Influence of order of acoustic black hole

最后考虑声学黑洞残余厚度 h_0 对能量回收特性的影响, 如图 14 所示。随着残余厚度 h_0 逐步减小, 声学黑洞梁尖端处的能量聚集效果越显著。因此, 从图 14 中可以看出, 当残余厚度 h_0 由 $h_v/5$ 减小到 $h_v/10$ 时, 输出电压幅值和回收效率都有明显的增大。由于压电片本身具有一定刚度, 当黑洞尖端的

刚度值小于压电片的刚度时, 再继续减小残余厚度 h_0 将不会带来任何可预测的有益效果, 因为冲击到压电片边界的弯曲波将会被大幅反射回去。因此, 在图 14 中, 当残余厚度 h_0 由 $h_v/10$ 继续减小到 $h_v/20$ 时, 输出电压幅值和回收效率没有出现明显的增强效果, 甚至产生了抑制作用。

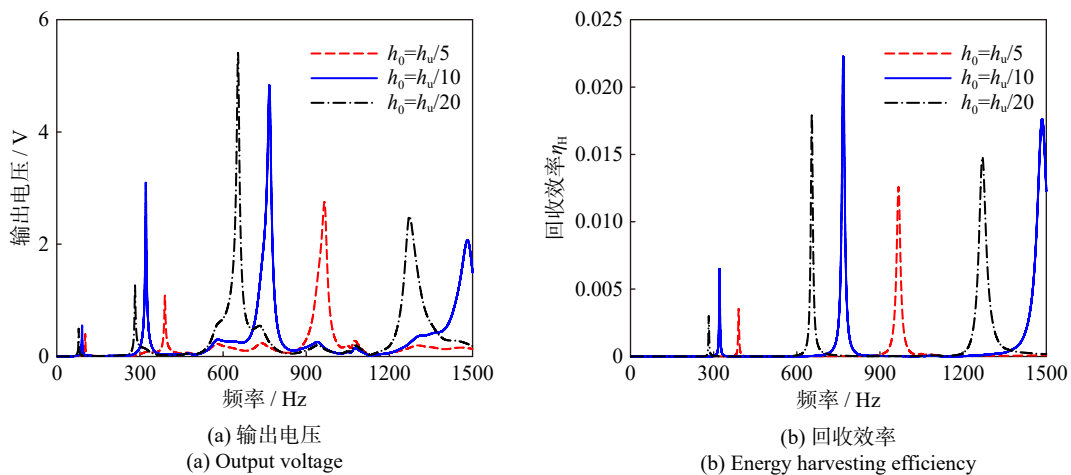


图 14 声学黑洞残余厚度的影响

Fig. 14 Influence of residual thickness of acoustic black hole

3.3 压电片厚度和电阻值的影响

本节分析了压电片厚度和电阻值对输出电压和回收效率的影响, 结果分别如图 15 和 16 所示。由图 15 和 16 可以看出, 减小压电片的厚度或增大电阻值都对输出电压有明显的增益效果; 在对回收效率的影响方面, 减小压电片厚度更有利于低频振动能量回收, 对高频振动能量回收会起到抑制作用, 而增

大电阻值对于低频和低频振动能量回收都能起到一定的促进作用。

3.4 尖端质量块对能量回收的促进作用

本节将进一步探讨在双声学黑洞梁的左右两侧尖端位置附加质量块对能量回收特性的影响。得益于本文方法的优势, 质量块可以以额外动能项的形式附加到耦合系统的拉格朗日能量泛函中, 质量块

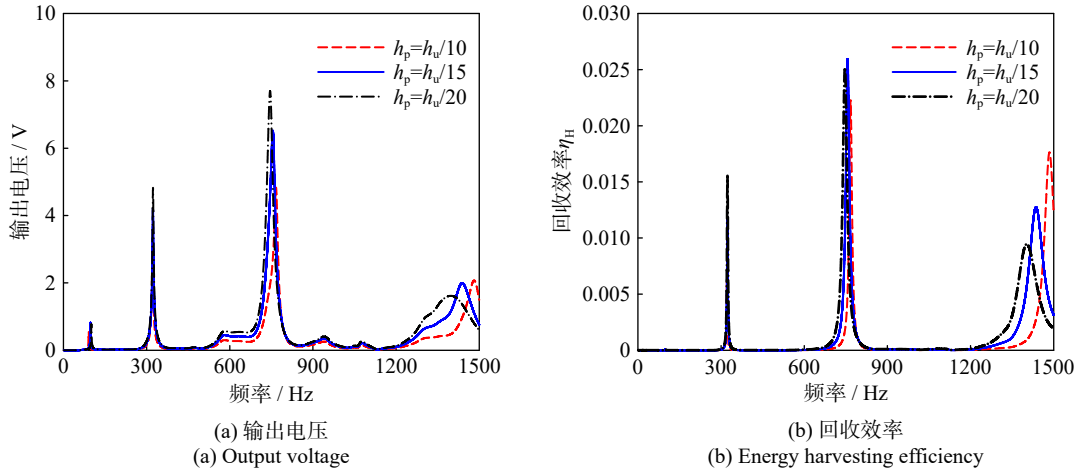


图 15 压电片厚度的影响

Fig. 15 Influence of thickness of piezoelectric patch

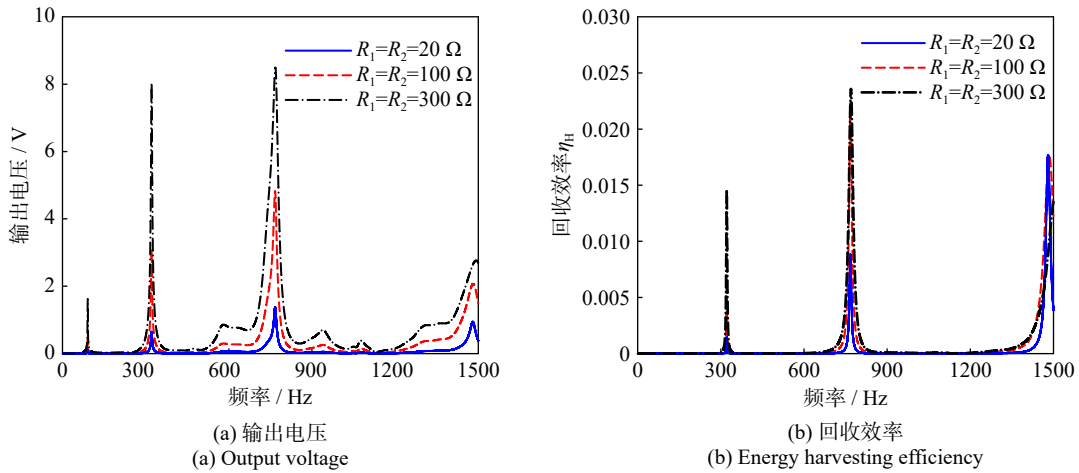


图 16 电阻值的影响

Fig. 16 Influence of resistance value

对应的动能项可表示为:

$$K_m = \frac{1}{2} \rho_m l_m^3 \left[\dot{w}_a^2 (-L_a/2) + \dot{w}_a^2 (L_a/2) \right] = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{M}_{\text{mass}} \dot{\mathbf{a}} \quad (26)$$

式中, ρ_m 和 l_m 分别表示质量块的密度和边长; \mathbf{M}_{mass} 表示尖端质量块对应的质量矩阵。

将式 (26) 附加到式 (13) 中, 即可考虑质量块的影响。比较不同附加质量对能量回收特性的影响, 结果如图 17 所示。表 4 给出了不同附加质量对应的钢轨振动能量回收有效工作频段。在分析中, 质量块的密度与声学黑洞梁密度相同。

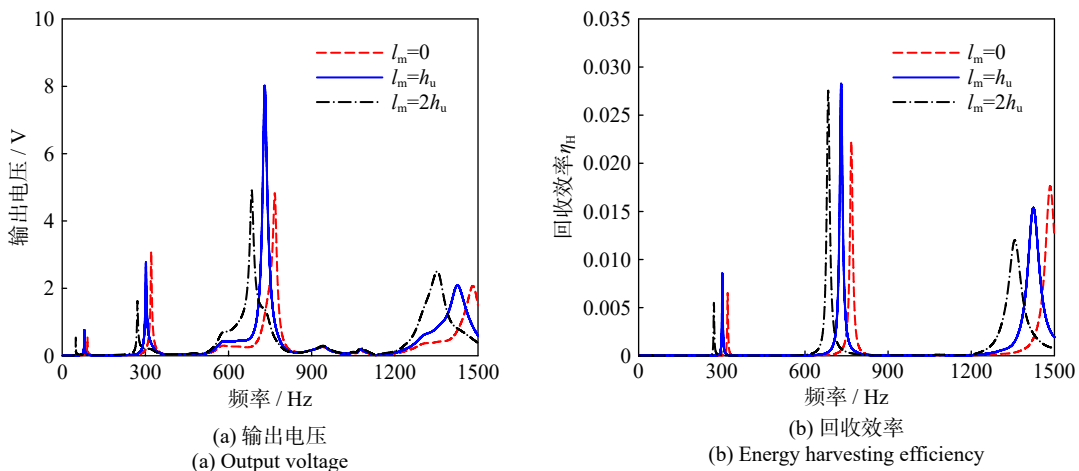


图 17 声学黑洞尖端附加质量块的影响

Fig. 17 Influence of additional mass block at the tip of acoustic black hole

表4 不同附加质量对应的钢轨振动能量回收有效工作频段

Tab. 4 Effective operational frequency band of rail vibration energy harvesting corresponding to different additional mass

附加质量块尺寸	有效工作频段/Hz	最大输出电压/V	输出电压均值/V	最大回收效率/%
$l_m=h_u$	I: 76~83	0.75	0.36	0.00316
	II: 278~347	2.76	0.78	0.92
	III: 529~990	8.12	1.68	2.93
	IV: 1206~1500	2.11	1.12	1.56
$l_m=2h_u$	I: 48~50	0.54	0.33	0.00184
	II: 255~341	1.61	0.41	0.53
	III: 520~826	4.91	1.41	2.75
	IV: 1183~1500	2.51	1.19	1.21

当附加质量块边长为 $l_m=h_u$ 时(质量约 0.004 kg),有效工作频段 I~III 内的能量回收能力都有所增强,其中有效工作频段 III 的增强效果最为明显,最大输出电压由 4.83 V 增大到 8.12 V,回收效率由 2.23% 增大到 2.93%。可以发现,附加质量对振动能量回收有着一定的促进作用。此外,由于增加了系统质量,系统的各阶固有频率都向低频移动,这有利于低频振动能量回收。同时,从图 17 和表 4 中可以发现,当附加质量继续增大时,能量回收效果明显减弱。为了

更好地说明这一规律,绘制了两种情况下左端压电层的归一化振幅随频率变化关系图,如图 18 所示。

随着附加质量的增大,压电片内的半波长在更低的频率出现。因而与图 18(a) 相比,图 18(b) 中的压电片在更低的频率产生反向弯曲,能量回收效率受到了抑制。这就导致当附加质量块边长 $l_m=2h_u$ 时(质量约 0.032 kg),表 4 中有效工作频段 II 和 III 内能量回收效果反而产生明显减弱的现象。

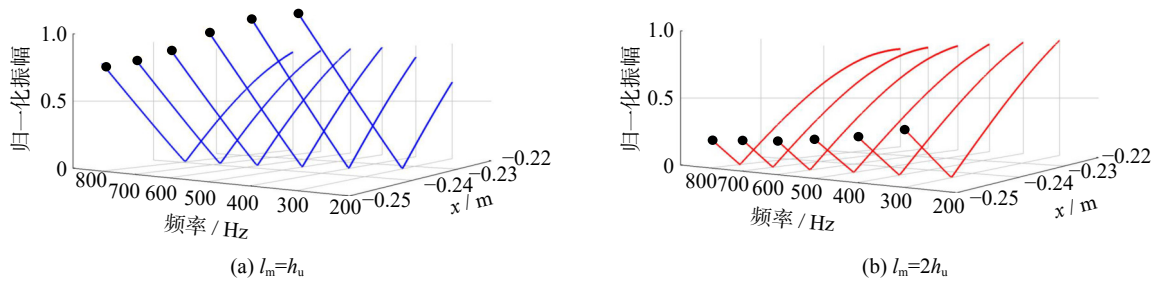


图 18 声学黑洞梁左端压电片内归一化振幅随频率的变化(附加质量的影响)

Fig. 18 Change of the normalized amplitude of the piezoelectric patch at the left end of the acoustic black hole beam with frequency (influence of additional mass)

4 结论

(1) 与有限元法的对比结果表明,本文方法具有很好的准确性。得益于能量法具有将微分方程边值问题转化为泛函极值问题的优点,本文方法可以进一步拓展到结构形式更为复杂的组合结构的力-电耦合分析之中。

(2) 在 0~1500 Hz 范围内的动态轮轨力作用下,产生了 88~94 Hz、292~352 Hz、538~984 Hz 及 1223~1500 Hz 四个主要的能量回收频带,其中第三阶频带内能量回收效果最佳,在负载 100 Ω 的情况下,最大输出电压为 4.83 V,最高回收效率为 2.23%。此外,当压电片长度与结构中传播的弯曲波半波长匹配时,能量回收能力达到最大。

(3) 通过增大声学黑洞半径、减小黑洞阶次和残余厚度来增强黑洞效应,能产生更明显的能量集中

效果,进而在一定程度上提升振动能量回收能力;在声学黑洞梁尖端处附加额外质量对促进能量回收有一定的效果,但过大的附加质量反而会降低能量回收能力。

(4) 本文针对轨道结构的振动能量回收在研究方法和俘能装置的结构型式上进行了拓展,可为铁路轨道的振动能量回收提供一种设计和分析思路。

参考文献:

- [1] 钱韦吉, 雍胜杰. 钢轨吸振器振动能量的多模态压电式俘能研究[J]. 机械科学与技术, 2021, 40(11): 1657-1663. QIAN Weiji, YONG Shengjie. Research on multi-modal piezoelectric energy harvesting technology of rail vibration absorber[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2021, 40(11): 1657-1663.
- [2] HOU W Q, LI Y K, ZHENG Y, et al. Multi-frequency

- energy harvesting method for vehicle induced vibration of rail transit continuous rigid bridges[J]. *Journal of Cleaner Production*, 2020, 254: 119981.
- [3] ZHANG X T, PAN H Y, QI L F, et al. A renewable energy harvesting system using a mechanical vibration rectifier (MVR) for railroads[J]. *Applied Energy*, 2017, 204: 1535-1543.
- [4] 张伟, 刘爽, 毛佳佳, 等. 磁耦合式双稳态宽频压电俘能器的设计和俘能特性[J]. *力学学报*, 2022, 54(4): 1102-1112.
- ZHANG Wei, LIU Shuang, MAO Jiajia, et al. Design and energy capture characteristics of magnetically coupled bistable wide band piezoelectric energy harvester[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(4): 1102-1112.
- [5] 孟莹, 丁虎, 陈立群. 带附加质量块的压电圆板能量采集器振动分析[J]. *力学学报*, 2021, 53(11): 2950-2960.
- MENG Ying, DING Hu, CHEN Liqun. Vibration analysis of a piezoelectric circular plate energy harvester considering a proof mass[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(11): 2950-2960.
- [6] PAN Y, LIN T, QIAN F, et al. Modeling and field-test of a compact electromagnetic energy harvester for railroad transportation[J]. *Applied Energy*, 2019, 247: 309-321.
- [7] WISCHKE M, MASUR M, KRÖNER M, et al. Vibration harvesting in traffic tunnels to power wireless sensor nodes[J]. *Smart Materials and Structures*, 2011, 20(8): 085014.
- [8] 谢伟平, 陈谣, 王先锋. 基于 MFC 的地铁轨道振动能量收集研究[J]. *振动与冲击*, 2022, 41(9): 210-218.
- XIE Weiping, CHEN Yao, WANG Xianfeng. Metro track vibration energy collection based on MFC[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2022, 41(9): 210-218.
- [9] 钱韦吉, 雍胜杰. 基于钢轨吸振器的多模态复合式俘能器性能研究[J]. *中国机械工程*, 2022, 33(6): 672-682.
- QIAN Weiji, YONG Shengjie. Research on characteristics of multi-mode composite energy harvesters based on rail vibration absorber[J]. *China Mechanical Engineering*, 2022, 33(6): 672-682.
- [10] WU X P, QI L F, ZHANG T S, et al. A novel kinetic energy harvester using vibration rectification mechanism for self-powered applications in railway[J]. *Energy Conversion and Management*, 2021, 228: 113720.
- [11] DONG L W, ZUO J Y, WANG T P, et al. Enhanced piezoelectric harvester for track vibration based on tunable broadband resonant methodology[J]. *Energy*, 2022, 254: 124274.
- [12] QI L F, PAN H Y, PAN Y J, et al. A review of vibration energy harvesting in rail transportation field[J]. *iScience*, 2022, 25(3): 103849.
- [13] TANG L L, CHENG L, JI H L, et al. Characterization of acoustic black hole effect using a one-dimensional fully-coupled and wavelet-decomposed semi-analytical model[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 374: 172-184.
- [14] JI H L, LUO J, QIU J H, et al. Investigations on flexural wave propagation and attenuation in a modified one-dimensional acoustic black hole using a laser excitation technique[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, 104: 19-35.
- [15] DENG J, ZHENG L, GUASCH O, et al. Gaussian expansion for the vibration analysis of plates with multiple acoustic black holes indentations[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 131: 317-334.
- [16] ZHAO L X, CONLON S C, SEMPERLOTTI F. Broadband energy harvesting using acoustic black hole structural tailoring[J]. *Smart Materials and Structures*, 2014, 23(6): 065021.
- [17] ZHAO L X, CONLON S C, SEMPERLOTTI F. An experimental study of vibration based energy harvesting in dynamically tailored structures with embedded acoustic black holes[J]. *Smart Materials and Structures*, 2015, 24(6): 065039.
- [18] JI H L, LIANG Y K, QIU J H, et al. Enhancement of vibration based energy harvesting using compound acoustic black holes[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 132: 441-456.
- [19] ZHANG L L, KERSCHEN G, CHENG L. Electromechanical coupling and energy conversion in a PZT-coated acoustic black hole beam[J]. *International Journal of Applied Mechanics*, 2020, 12(8): 2050095.
- [20] DENG J, GUASCH O, ZHENG L, et al. Semi-analytical model of an acoustic black hole piezoelectric bimorph cantilever for energy harvesting[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2021, 494: 115790.
- [21] FENG Qingsong, DAI Chengxin, GUO Wenjie, et al. A hybrid solution for band-gap analysis of vertical vibration for periodic beam-plate coupled systems based on variation principle[J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2021, 21(12): 2150173.
- [22] FENG Qingsong, YANG Zhou, GUO Wenjie, et al. Enhanced suppression of vibrational wave transmission in structures with periodically attached absorbers exploiting amplitude magnification mechanisms[J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2022, 95: 104666.
- [23] FENG Qingsong, YANG Zhou, GUO Wenjie, et al. Dispersion characteristics analysis of box girder structure based on virtual spring model and variational principle[J]. *Thin-Walled Structures*, 2023, 182: 110338.
- [24] DENG J, ZHENG L, ZENG P Y, et al. Passive constrained viscoelastic layers to improve the efficiency of truncated acoustic black holes in beams[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 118: 461-476.
- [25] DENG J, GAO N S. Broadband vibroacoustic reduction for a circular beam coupled with a curved acoustic black hole via nullspace method[J]. *International Journal of Mechanical*

- Sciences, 2022, 233: 107641.
- [26] 杨舟, 冯青松, 邓杰, 等. 采用高斯展开法分析组合式开口矩形 Mindlin 板的弯曲自振特性 [J]. 振动工程学报, 2022, 35(5): 1130-1137.
YANG Zhou, FENG Qingsong, DENG Jie, et al. Flexural vibration analysis of rectangular Mindlin plate with combined openings using Gaussian expansion method[J]. Journal of Vibration Engineering, 2022, 35(5): 1130-1137.
- [27] WU T X, THOMPSON D J. Theoretical investigation of wheel/rail non-linear interaction due to roughness excitation[J]. Vehicle System Dynamics, 2000, 34(4): 261-282.
- [28] WU T X, THOMPSON D J. Vibration analysis of railway track with multiple wheels on the rail[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 239(1): 69-97.
- [29] 王党雄, 李小珍, 张迅, 等. 轨道结构形式对箱梁中高频振动的影响研究 [J]. 土木工程学报, 2017, 50(8): 68-77.
WANG Dangxiong, LI Xiaozhen, ZHANG Xun, et al. Study on the influences of different tracks on the medium-and high-frequency vibrations of a box girder[J]. China Civil Engineering Journal, 2017, 50(8): 68-77.
- [30] THOMPSON D J. Railway Noise and Vibration-Mechanisms, Modeling and Means of Control[M]. Amsterdam: Elsevier, 2009.
- [31] 雷晓燕, 张斌, 刘庆杰. 轨道过渡段动力特性的有限元分析 [J]. 中国铁道科学, 2009, 30(5): 15-21.
LEI Xiaoyan, ZHANG Bin, LIU Qingjie. Finite element analysis on the dynamic characteristics of the track transition[J]. China Railway Science, 2009, 30(5): 15-21.
- [32] BERENGER J P. Perfectly matched layer for the FDTD solution of wave-structure interaction problems[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1996, 44(1): 110-117.
- [33] DENG J, GUASCH O, ZHENG L. Reconstructed Gaussian basis to characterize flexural wave collimation in plates with periodic arrays of annular acoustic black holes[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2021, 194: 106179.
- [34] 韦凯, 杨帆, 王平, 等. 扣件胶垫刚度的频变性地对地铁隧道环境振动的影响 [J]. 铁道学报, 2015, 37(4): 80-86.
WEI Kai, YANG Fan, WANG Ping, et al. Influence of frequency-dependent stiffness of rail pads on environment vibration induced by subway in tunnel[J]. Journal of the China Railway Society, 2015, 37(4): 80-86.

通信作者:冯青松(1978—),男,博士,教授。

E-mail: fqshdjtdx@aliyun.com