

具有区间不确定性的柔性多体系统动力学反问题

郭 祥, 靳艳飞

(北京理工大学宇航学院, 北京 100081)

摘要: 针对具有区间不确定性的柔性多体系统动力学反问题, 提出了一种嵌套的 Chebyshev 多项式代理模型和改进的粒子群优化 (IPSO) 算法, 对系统中的输入和结构参数的边界进行识别。建立具有区间不确定性的多体系统动力学方程, 并采用区间中点和区间半径来描述给定的区间不确定性的输出响应。对柔性多体系统动力学的输出响应建立 Chebyshev 多项式代理模型。通过 IPSO 算法反求未知参数的区间中点和区间半径。所提方法采用 Chebyshev 多项式代理模型逼近原区间不确定性柔性多体系统, 进一步节约了 IPSO 算法寻优过程的计算成本。

关键词: 区间不确定性; 柔性多体系统; 动力学反问题; Chebyshev 多项式代理模型

中图分类号: O313.7 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2025)05-0974-10

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2025.05.009

Inverse dynamical problem of flexible multibody systems with interval uncertainty

GUO Xiang, JIN Yanfei

(School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: A nested Chebyshev polynomial surrogate model and an improved particle swarm optimization (IPSO) algorithm are proposed to identify the bounds of input and structural parameters in the inverse dynamical problem of flexible multibody systems with interval uncertainty. Specifically, the dynamical model equations for a multibody system incorporating interval uncertainty are established. The interval midpoint and interval radius are used to describe the given output response with interval uncertainty. The Chebyshev polynomial surrogate model is established for the output response of a flexible multibody system. The IPSO algorithm is used to reverse the interval midpoint and interval radius of the unknown parameters in the flexible multibody system. The Chebyshev polynomial surrogate model is used in the proposed method to approximate the original interval uncertain flexible multibody system, thereby significantly reducing the computational cost of the optimization process of the IPSO algorithm.

Keywords: interval uncertainty; flexible multibody system; inverse dynamics problem; Chebyshev polynomial surrogate model

正问题是根据输入和模型来确定输出, 反问题则是根据输出来确定输入或模型^[1]。一般情形下, 研究人员默认反问题求解过程中的输入、模型和输出信息都是确定性的, 并且学者们对确定性的反问题发展了较为完善的理论和计算方法。事实上, 模拟实验中由于对设备的安装、测量误差以及测试的精度等原因往往会导致实验结果与真实结果之间出现偏差, 根据有偏差的实验结果反求得到的输入或模型参数的结果可能会更加偏离真实结果。就多体系统而言, 不确定性可能存在于柔性部件的几何参数、材料参数、初始条件和边界条件、载荷以及计算模型本身, 这些不确定性直接影响反求结果的准确性。

近年来, 学者们发展了若干不确定性的反问题

求解方法。在随机不确定性模型的反问题中, 一般是根据给定的随机输出响应来反求随机输入或模型参数的统计信息。FONSECA 等^[2]提出了摄动法和最大似然法来反求模型中参数的随机性, 但是当输出响应是关于模型参数的高度非线性函数时, 该方法的计算精度较低。HONJO 等^[3]基于扩展贝叶斯方法, 解决了岩土工程反演分析中解的不稳定性、非唯一性和多重共线性等难题。

在随机不确定性模型的反问题中, 需要充足的样本信息对不确定性参数构建较为精确的概率分布函数。然而, 实际工程中测试技术、实验经验等方面的欠缺导致人们难以获得充足的样本信息。因此, 研究人员逐渐开始关注区间不确定性模型的反问题。区间不确定性模型的反求方法根据输出响应

的区间边界反向估计输入和模型中不确定性参数的边界。JIANG等^[4]在利用弹性波对复合材料层合板进行材料表征时,考虑了荷载的不确定性。根据模拟测量的瞬态位移响应的区间反求复合材料层合板的模型参数的区间范围。唐嘉昌^[5]基于降维的方法,提出一种区间不确定性反问题的计算方法,并将其应用于不确定性的弹簧连接系统的反问题和车辆约束系统的反问题中。谷韬等^[6]针对环境-热防护服-空气层-皮肤系统的热传递过程,对随机厚度参数进行识别。FAES等^[7]根据分析模型的结果域中获得的高维测量数据集,识别存在于模型参数上的区间场的不确定性。LIU等^[8]对原系统模型采用高维的模型逼近后,采用遗传算法求解了区间反问题的优化模型,在此基础上获得了系统参数的边界值。张伟^[9]在弹体侵入复合介质反问题中,基于信赖域管理策略求解了区间不确定性系统的反问题。但是信赖域管理策略中,需要求解精确的 Hessian 矩阵,这对柔性多体系统动力学方程而言是困难的。

实际工程中大型复杂的工程系统的反问题模型往往是高维的、非线性的甚至是强非线性的,如柔性多体系统动力学的反问题。因此,需要进一步发展适用于具有不确定性的柔性多体系统动力学反问题的求解方法。本文针对具有区间不确定性的柔性多体系统动力学反问题,提出了一种嵌套的 Chebyshev 多项式代理模型和 IPSO 算法的计算方法,对系统中的输入和结构参数的边界进行识别。

1 Chebyshev 多项式代理模型

由于多体系统模型方程比较复杂,其动力学的输出响应很难采用显式表达,因此,可以把多体动力学的输出响应表示为:

$$\mathbf{Y} = T(\mathbf{X}, \mathbf{E}, \mathbf{U}) \quad (1)$$

式中, \mathbf{X} 和 \mathbf{E} 分别表示 d 维未知参数输入向量和 s 维结构模型参数向量; \mathbf{U} 表示 \mathbf{E} 或 (和) \mathbf{X} 中存在的确定性向量; T 表示正问题的函数; \mathbf{Y} 表示 m 维输出响应向量。由于不确定性向量 \mathbf{U} 的存在,导致输出向量 \mathbf{Y} 中必然包含不确定性因素。

与式(1)相应的不确定性反问题可以表示为:

$$\mathbf{X} = T'(\mathbf{Y}, \bar{\mathbf{Y}}, \mathbf{E}, \mathbf{U}) \quad (2)$$

式中, $\bar{\mathbf{Y}}$ 表示测量得出或人为给定的输出响应向量,并且 $\bar{\mathbf{Y}}$ 中包含不确定性因素; T' 表示相应的反问题函数。根据给定的输出响应向量 $\bar{\mathbf{Y}}$ 、经计算得出的输出响应向量 \mathbf{Y} 、结构模型参数向量 \mathbf{E} 和不确定性向量 \mathbf{U} , 采用不确定性系统的动力学反求方法可以获得未知输入参数向量 \mathbf{X} 的区间。

在确定性的多体动力学反问题中,系统的结构

模型参数 \mathbf{E} 和输出响应向量 \mathbf{Y} 都是确定性的,需要根据以下目标函数来获得未知输入向量 \mathbf{X} 的反求结果:

$$\min_{\mathbf{X} \in \Omega} \sum_{i=1}^m (Y_i(\mathbf{X}) - \bar{Y}_i(\mathbf{X}_i))^2 \quad (3)$$

其中:

$$Y_i(\mathbf{X}) = Y_i(\mathbf{X}, \mathbf{E}, \mathbf{U}); Y_i \in \mathbf{Y}; i = 1, \dots, m \quad (4)$$

式中, $Y_i(\mathbf{X})$ 为由多体系统动力学的正问题计算得到的第 i 维输出响应; \mathbf{X}_i 为待求的输入向量的真实值; $\bar{Y}_i \in \bar{\mathbf{Y}}$ 为第 i 维测量或给定的输出响应; m 为输出响应的维数; Ω 为待求的参数空间。

确定性的反求问题可以较为方便地得到反求结果。然而,对于具有不确定性的多体系统动力学反问题,需要发展一种相应的不确定性反求方法,从而对反求结果进行有效的评价。

一般情形下,计算多体系统动力学的输出响应 \mathbf{Y} 可以通过尽可能多地遍历每个区间输入参数中所有的值,然后通过广义 α -求解器计算得到大量的输出响应的样本,然后在这些样本中搜索输出响应 \mathbf{Y} 的最大值和最小值。显然,对于柔性多体系统动力学模型来说,计算的成本较高。为了提高计算效率,采用 Chebyshev 多项式代理模型逼近原柔性多体系统动力学的输出响应^[10]。

区间输入向量 \mathbf{X} 可表示为:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^c + \mathbf{X}^w \boldsymbol{\eta} \quad (5)$$

式中, \mathbf{X}^c 表示区间变量 \mathbf{X} 的中位数; \mathbf{X}^w 表示区间半径。并有:

$$\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_d] \quad (6)$$

且 $\eta_j \in [-1, 1] (j = 1, 2, \dots, d)$, 其中 d 表示未知参数个数。

根据 Chebyshev 张量积采样方法, d 维 p 阶 Chebyshev 包含函数可表示为:

$$f(\boldsymbol{\eta}) \approx \sum_{i=0}^{P-1} \gamma_i \psi_i(\boldsymbol{\eta}) \quad (7)$$

式中, $P = (p+d)! / (p!d!)$; $\gamma_i (i = 0, \dots, P-1)$ 表示待定系数; $\psi_i(\boldsymbol{\eta})$ 表示区间变量 $\boldsymbol{\eta}$ 对应的测量矩阵的列向量。

将式(7)写成矩阵的形式:

$$f(\boldsymbol{\eta}) \approx \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\eta}) \quad (8)$$

系数向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 可采用最小二乘法求解得到:

$$\boldsymbol{\gamma} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{F} \quad (9)$$

其中:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \psi_0(\eta_1) & \cdots & \psi_{P-1}(\eta_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_0(\eta_M) & \cdots & \psi_{P-1}(\eta_M) \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{F} = [f([\eta_1]), f([\eta_2]), \dots, f([\eta_M])]^T \quad (11)$$

式中, 样本点总数 $M = 2(p+d)! / (p!d!)$ 。

2 区间不确定性反求算法

在区间不确定性多体系统动力学反问题的求解过程中,提出一种改进的粒子群优化(improved particle swarm optimization, IPSO)算法,以评价当前结果与实际结果的逼近程度。粒子群优化算法适用于求解复杂的多目标优化问题和非线性优化问题。与其他优化算法相比,粒子群优化算法具有较好的收敛性和鲁棒性。此外,粒子群优化算法不要求优化问题的可导性,适用于复杂的非线性问题或者“黑箱”模型的优化问题。在柔性多体系统动力学反问题中,由于原模型方程比较复杂,因此采用粒子群优化算法可以把柔性多体系统动力学模型当作“黑箱”模型来处理。

由于标准的粒子群优化(standard particle swarm optimization, SPSO)算法中,所有的粒子采用同样的更新策略,导致种群多样性缺失。由于每个粒子在每一代都需要计算适应度函数,对于多体系统来说,适应度函数需要根据输入参数来计算多体系统动力学的正问题,这是非常耗时的。SPSO算法在优化过程中只考虑当前粒子位置、局部最优位置、全局最优位置,并且把寻优过程中的非最优粒子全都舍去,容易过早陷入局部最优。为了充分利用每次寻优过程中的非最优粒子,在IPSO算法中可以把全部的粒子分为三组子种群,不同的子种群分别采用不同的搜索机制。将所有粒子走过的位置都收集起来组成一个搜索集。为了提高搜索集的质量,进一步将适应度值小于 h 的位置组成一个高质量搜索集,本节中取 $h=0.1$ 。

IPSO算法的具体步骤如下:

(1) 给定种群规模 $R=40$,最大迭代次数 G ,惯性权重 ω ,学习因子 $c_1=c_2=c_3=1$,速度范围 $V_{\max}=X_{\max}/100=-V_{\min}$ 等参数,其中 X_{\max} 表示种群中粒子的最大范围值,超过相应范围的速度和粒子设定为边界值。

(2) 设置随机初始速度,根据适应度函数计算粒子群中所有粒子的适应度函数值。将第 i 个粒子的 $Pbest_i$ 设置为当前位置, $Gbest$ 设置为种群的最优粒子的位置。

(3) 第一子种群按照下式进行位置更新:

$$v_i^{k+1} = \omega v_i^k + c_1 r_1 (Pbest_i^k - x_i) + c_2 r_2 (Gbest^k - x_i) + c_3 r_3 (U^k - x_i) \quad (12)$$

$$x_i^{k+1} = x_i^k + v_i^{k+1} \quad (13)$$

式中, v_i^k 和 x_i^k 分别表示第 i 个粒子在第 k 代的速度和位置,通常采用 N 维向量表示; $Pbest_i^k$ 为第 i 个粒子在第 k 代自身的个体最优位置; $Gbest^k$ 为整个粒子群体在第 k 代的群体最优位置; ω 为粒子更新的惯性权重值; c_1 、 c_2 和 c_3 均为学习因子; r_1 、 r_2 和 r_3 均为介于

$[0, 1]$ 之间的随机数; U^k 表示对高质量搜索集中随机挑选 90% 的粒子进行平均后得到的平均值,用于增强粒子搜索方向的多样性, U^k 可以表示为:

$$U^k = \sum_{i=1}^{[0.9n]} A_i / [0.9n] \quad (14)$$

式中, A_i 为集合 A 中的元素, A 中元素的数量为 $|A|=[0.9n]$,其中, $[\cdot]$ 表示取整, n 表示该高质量搜索集的元素数量。在粒子群算法中,惯性权重是调节算法全局和局部搜索能力的一个重要参数。在这里,采用了一种自适应线性递减惯性权重,具体可表示为:

$$\omega(i) = \omega_{\text{start}} - \omega_{\text{end}} \cdot \left(\frac{t}{\text{Iter}} \right) \quad (15)$$

式中, $\omega_{\text{start}}=0.8$ 为初始权重值; $\omega_{\text{end}}=0.7$ 为最终权重值; t 为当前迭代次数; Iter 为迭代总次数。在IPSO算法中,采用固定的学习因子 $c_1=c_2=c_3=1$ 。

(4) 第二子种群更新时,首先随机生产一个数 R_1 ,若 $R_1>0.5$,则根据下式进行位置更新:

$$v_i^{k+1} = (x_i^k - Gbest^k) \cdot \text{rand} \cdot \alpha \quad (16)$$

$$x_i^{k+1} = x_i^k + v_i^{k+1} \quad (17)$$

式中, $\alpha=0.5$ 表示速度缩放比例,用于控制粒子的飞行区域; rand 表示 0 到 1 之间均匀分布的随机数。若 $R_1 \leq 0.5$,则根据式(12)和(13)进行位置更新。

(5) 第三子种群更新时,首先随机生产一个数 R_2 ,若 $R_2>0.5$,则根据下式进行位置更新:

$$x_i^{k+1} = \sum_{i=1}^{[0.5n]} B_i / [0.5n] \quad (18)$$

式中, B_i 为集合 B 中的元素, B 中元素的数量为 $|B|=[0.5n]$ 。若 $R_2 \leq 0.5$,则根据式(12)和(13)进行位置更新。第二个子种群和第三个子种群本质上是对粒子的一个变异,只取一小部分,子种群大小都取为 5。同时采用 0.5 的变异概率进行选择性的变异,否则依然采用与第一种群相同的策略进行更新。

(6) 计算所有粒子的适应度值,并更新粒子的个体极值 $Pbest$ 和群体极值 $Gbest$;将适应度函数值与阈值上限 h 进行比较,本文中取 $h=0.1$ 。当适应度值小于 h 时,则将该粒子加入高质量搜索集 S 。当 S 的数量大于 500 时,则只取适应度值最小的 500 个位置。其中,第 i 个粒子在第 k 代的适应度函数为:

$$\min_{x \in \Omega} \sum_{j=1}^J \left[\|Y_j^l(x_i^k) - \bar{Y}_j^l\|^2 + \|Y_j^u(x_i^k) - \bar{Y}_j^u\|^2 \right] \quad (19)$$

式中, $Y_j^l(x_i^k)$ 和 $Y_j^u(x_i^k)$ 分别表示由第 i 个粒子在第 k 代根据正问题计算得到的第 j 个时间点处的多体系统动力学响应的下界和上界; \bar{Y}_j^l 和 \bar{Y}_j^u 分别表示给定的第 j 个时间点处的动力学响应的下界和上界; J 表示总的的时间点数,适应度函数中考虑的时间点数越多,即 J 越大,反求结果的精度越高。

(7) 判断给出的终止条件是否满足。若满足, 输出全局最优解 $Gbest$ 和全局最优值 $f(Gbest)$, 算法结束; 否则返回步骤 (3) 继续迭代。

采用 IPSO 算法反求未知区间输入参数的区间中点和区间半径的过程中, 需要多次调用广义-alpha 算法求解多体系统动力学的微分代数方程, 这个过程十分耗时。采用 Chebyshev 多项式代理模型

来代替复杂耗时的原多体系统动力学模型, 可以极大地提高反求过程的计算效率。在此基础上, 采用粒子群优化算法中的适应度函数值来评价当前近似模型与实际模型的逼近程度, 进而获得最优的反求结果。图 1 为嵌套的 Chebyshev 多项式代理模型和 IPSO 算法流程图。具体的执行过程大致包括以下 3 个步骤:

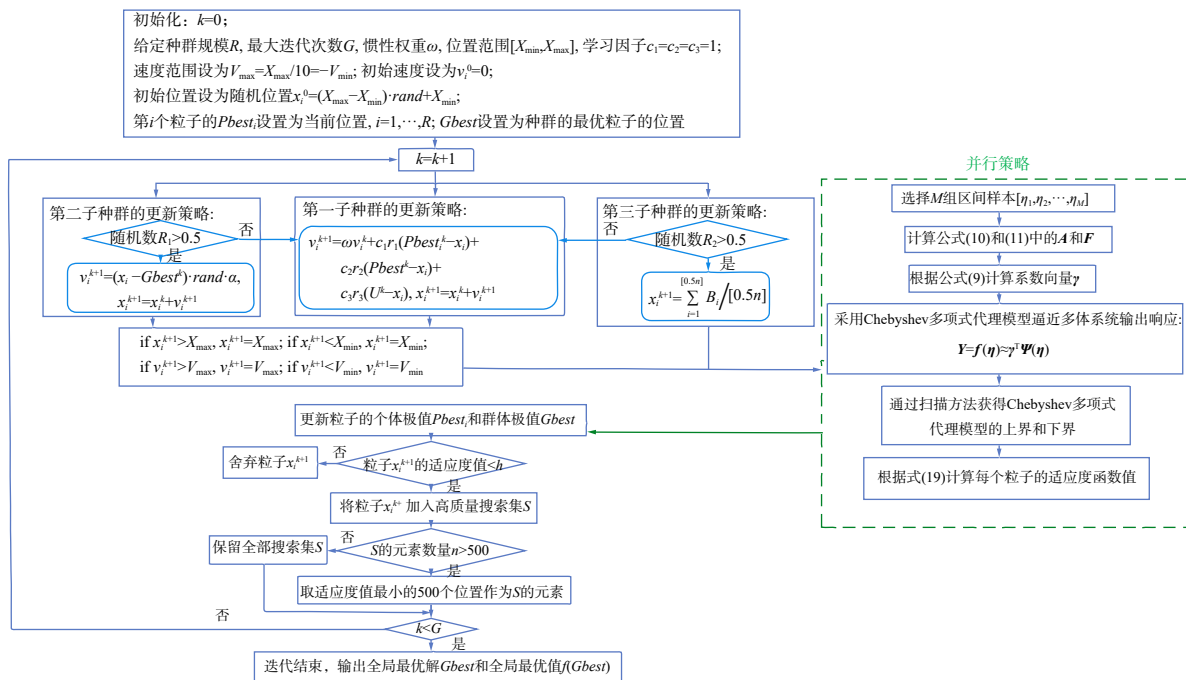


图 1 嵌套的 Chebyshev 多项式代理模型和 IPSO 算法流程图

Fig. 1 Flowchart of nested Chebyshev polynomial surrogate model and IPSO algorithm

(1) 建立具有区间不确定性的多体系统动力学模型方程。

(2) 对柔性多体系统动力学的输出响应建立 Chebyshev 多项式代理模型。

(3) 根据 IPSO 算法反求未知区间输入参数的区间中点和区间半径。

3 算例分析

平面柔性双摆系统初始状态如图 2 所示, 其特征参数如表 1 所示。杆 OA 和杆 AB 的长度分别为 1 和 2 m, 横截面积均为 $(0.04 \times 0.02) \text{ m}^2$, 密度均为 5540 kg/m^3 。杆 OA 和杆 AB 的杨氏模量分别为 2×10^8 和 $2 \times 10^7 \text{ Pa}$, 泊松比均为 0.3。分别采用 2 个和 4 个绝对节点坐标公式全参梁单元离散柔性杆 OA 和柔性杆 AB, 且杆 OA 和杆 AB 仅在重力作用下运动。计算过程中, 积分时间步长为 $5 \times 10^{-4} \text{ s}$ 。

柔性多体系统的动力学正问题可以描述为: 在已知初始状态下, 根据杆 OA 和杆 AB 分别与 X 方向 (水平方向) 的夹角 θ_1 和 θ_2 , 以及表 1 中给出的系统参

数来计算双摆系统末端 B 点分别在 X 和 Y 方向的位

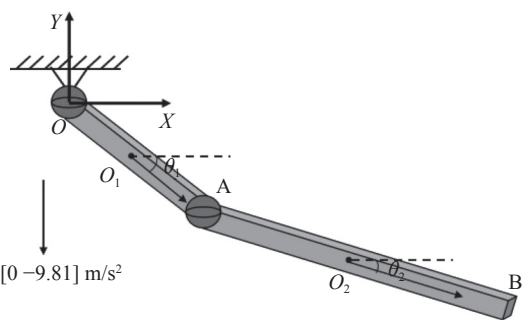


图 2 平面柔性双摆系统初始状态示意图

Fig. 2 Schematic diagram of the initial state of the planar flexible double pendulum system

表 1 平面柔性双摆系统特征参数

Tab. 1 Characteristic parameters of the planar flexible double pendulum system

部件名称	长度/m	截面积/m ²	密度/(kg·m ⁻³)	杨氏模量/Pa	泊松比	单元数
杆OA	1	0.04×0.02	5540	2×10 ⁸	0.3	2
杆AB	2	0.04×0.02	5540	2×10 ⁷	0.3	4

移。图3给出了在双摆系统运动0.5 s末, B点X和Y方向位移分别关于初始状态角 θ_1 和 θ_2 的敏感性分析结果。图3(a)和(b)分别显示了在夹角 θ_2 不变的情况下, B点X和Y方向位移随着夹角 θ_1 的变化情况;图3(c)和(d)分别显示了在夹角 θ_1 不变的情况下, B点X和Y方向位移随着夹角 θ_2 的变化情况。由图3可知, 双摆系统末端B点X和Y方向位移对初始状态角 θ_1 和 θ_2 都比较敏感, 也就是说它们之间存在着较强的因果关系。此外, 即使在初始状态相同的情形下, 双摆每次的运动轨迹几乎不相同。因此, 对于双摆系统动力学反问题的求解, 需要规定双摆系统的运动轨迹。

附录中表A1给出了两种不同工况下B点在X和Y方向的位移。第一种工况(Case 1)中的结果由初始状态为 $\theta_1 = \pi/4$ (≈ 0.7854) rad, $\theta_2 = \pi/6$ (≈ 0.5236) rad的正问题计算得到。现在假设初始状态的夹角参数无法准确测量, 需要根据表A1中给出的多个时间点处的B点X和Y方向的位移来反求初始状态角 θ_1 和 θ_2 。采用SPSO算法和IPSO算法反求得到的结果如表2所示。算例中取粒子种群规模为40, 最大迭代次数为100。两种方法反求得到的结果几乎一致, 反求得到的初始状态角分别为 $\theta_1 \approx 0.7854$ rad和 $\theta_2 \approx 0.5236$ rad, 与真实的初始状态角度参数几乎一致。此外, 采用SPSO算法和IPSO算法的适应度函数值分别为 6.0323×10^{-6} 和 1.6541×10^{-8} , IPSO算法的适应度函数值更小, 说明IPSO算法比SPSO算法具有更好的寻优能力。

第二种工况(表A1中的Case 2)中的结果是由初始状态为 $\theta_1 = \pi/3$ (≈ 1.0472) rad, $\theta_2 = \pi/4$ (≈ 0.7854) rad的正问题计算得到的。采用SPSO算法和IPSO算法反求得到的结果如表3所示。算例中取粒子种群规模为40, 最大迭代次数为100。两种方法的反求结果几乎一致。反求得到的初始状态角分别为 $\theta_1 \approx 1.0472$ rad和 $\theta_2 \approx 0.7854$ rad。SPSO算法和IPSO算法的适应度函数值分别为 6.6317×10^{-7} 和 2.1591×10^{-8} 。与SPSO算法相比, IPSO算法的适应度函数值更小, 充分说明了IPSO算法具有更好的寻优能力。

以上讨论内容是在参数均为确定性的情形下, 分别考虑了两种不同工况下双摆系统动力学的反问题。对于实际工程中的柔性多体系统, 由于测量误差等原因导致其几何尺寸以及初始条件等是具有不确定性的。即使双摆系统在初始状态相同的情形下, 每次的运动轨迹都是不确定的。因此, 对于具有区间不确定性参数的双摆系统, 当初始状态是区间不确定性的情形, 其每个时间点处的位移轨迹也是区间不确定性的。根据工况要求, 由已知的各个时间点处的位移轨迹的上、下界反求双摆系统初始状

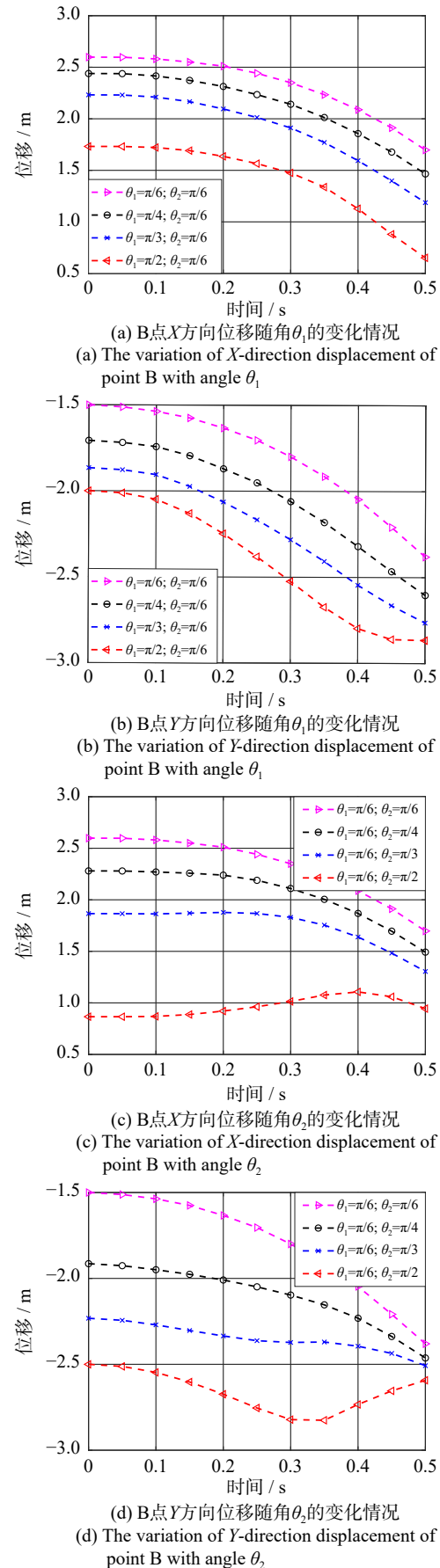


图3 敏感性分析结果

Fig. 3 Sensitivity analysis results

态的区间不确定性参数, 即区间不确定性参数的识别。

表 2 确定性平面双摆系统初始状态角的反求结果 (Case 1)

Tab. 2 Inverse results of initial state angle of the deterministic planar double pendulum system (Case 1)

给定的输出响应值	初始状态角 θ_1 的真实值/rad	初始状态角 θ_1 的反求值/rad	初始状态角 θ_2 的真实值/rad	初始状态角 θ_2 的反求值/rad	适应度函数值
见表A1中Case 1的数据	$\frac{\pi}{4} (\approx 0.7854)$	$\frac{0.7854(\text{SPSO})}{0.7854(\text{IPSO})}$	$\frac{\pi}{6} (\approx 0.5236)$	$\frac{0.5236(\text{SPSO})}{0.5236(\text{IPSO})}$	$\frac{6.0323 \times 10^{-6} (\text{SPSO})}{1.6541 \times 10^{-8} (\text{IPSO})}$

表 3 确定性平面双摆系统初始状态角的反求结果 (Case 2)

Tab. 3 Inverse results of initial state angle of the deterministic planar double pendulum system (Case 2)

给定的输出响应值	初始状态角 θ_1 的真实值/rad	初始状态角 θ_1 的反求值/rad	初始状态角 θ_2 的真实值/rad	初始状态角 θ_2 的反求值/rad	适应度函数值
见表A1中Case 2的数据	$\frac{\pi}{3} (\approx 1.0472)$	$\frac{1.0472(\text{SPSO})}{1.0472(\text{IPSO})}$	$\frac{\pi}{4} (\approx 0.7854)$	$\frac{0.7854(\text{SPSO})}{0.7854(\text{IPSO})}$	$\frac{6.6317 \times 10^{-7} (\text{SPSO})}{2.1591 \times 10^{-8} (\text{IPSO})}$

附录中表 A2 和 A3 分别给出了两种不同工况下 B 点 X 方向位移的区间上、下界, 根据上述结果反求双摆系统初始状态角 θ_1 和 θ_2 。第一种工况 (Case 1) 中的结果对应的正问题中的区间不确定性的初始状态角可分别表示为:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} \cdot (1 + 0.05\eta_1) \text{ rad} \approx [0.7461, 0.8247] \text{ rad}$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{6} \cdot (1 + 0.05\eta_2) \text{ rad} \approx [0.4974, 0.5498] \text{ rad}$$

第二种工况 (Case 2) 中的结果对应的正问题中的区间不确定性的初始状态角可分别表示为:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} \cdot (1 + 0.05\eta_3) \text{ rad} \approx [1.4923, 1.6493] \text{ rad}$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{3} \cdot (1 + 0.05\eta_4) \text{ rad} \approx [0.9948, 1.0996] \text{ rad}$$

现根据表 A2 和 A3 给定的两种不同工况下, 双摆末端 B 点 X 和 Y 方向位移的区间上、下界, 反求初始的区间不确定性的角 θ_1 和 θ_2 的区间范围。将 Chebshev 多项式代理模型分别与 SPSO 算法和 IPSO 算法相结合来计算反求结果, 如表 4 和 5 所示。SPSO 算法和 IPSO 算法中粒子种群规模均为 40, 最大迭代次数均为 100, Chebyshev 多项式的展开阶数均取为 2。在第一种工况 (Case 1) 下, 由 SPSO 算法反求得到的初始状态角分别为:

$$\theta_1 \approx [0.7460, 0.8247] \text{ rad}$$

$$\theta_2 \approx [0.4974, 0.5499] \text{ rad}$$

由 IPSO 算法反求得到的初始状态角分别为:

$$\theta_1 \approx [0.7461, 0.8247] \text{ rad}$$

$$\theta_2 \approx [0.4974, 0.5498] \text{ rad}$$

其中, SPSO 算法和 IPSO 算法得到的适应度函数值分别为 4.2303×10^{-5} 和 2.1717×10^{-6} , 由数值结果可知, SPSO 算法得到的反求结果中 θ_1 的下界和 θ_2 的上界与真实的结果之间存在较小的误差, 而 IPSO 算法得到的反求结果与真实的初始状态角度参数几乎一致, 且适应度函数值更小。在第二种工况 (Case 2) 下, 由 SPSO 算法反求得到的初始状态角分别为:

$$\theta_1 \approx [1.4923, 1.6492] \text{ rad}$$

$$\theta_2 \approx [0.9949, 1.0995] \text{ rad}$$

由 IPSO 算法反求得到的初始状态角分别为:

$$\theta_1 \approx [1.4923, 1.6493] \text{ rad}$$

$$\theta_2 \approx [0.9948, 1.0995] \text{ rad}$$

其中, SPSO 算法和 IPSO 算法得到的适应度函数值分别为 1.5754×10^{-4} 和 3.0576×10^{-5} 。由数值结果可知, SPSO 算法得到的反求结果中 θ_1 的上界、 θ_2 的上界和下界均与真实结果之间存在误差。而 IPSO 算法得到的反求结果中仅 θ_2 的上界与真实结果之间存

表 4 具有区间参数的双摆系统动力学的反求结果 (Case 1)

Tab. 4 Inverse results of dynamics of double pendulum system with interval parameters (Case 1)

给定的输出值	初始状态角 θ_1 的真实值/rad	初始状态角 θ_1 的反求值/rad	初始状态角 θ_2 的真实值/rad	初始状态角 θ_2 的反求值/rad	适应度函数值
见表A2中的数据	[0.7461, 0.8247]	$\frac{[0.7460, 0.8247] (\text{SPSO})}{[0.7461, 0.8247] (\text{IPSO})}$	[0.4974, 0.5498]	$\frac{[0.4974, 0.5499] (\text{SPSO})}{[0.4974, 0.5498] (\text{IPSO})}$	$\frac{4.2303 \times 10^{-5} (\text{SPSO})}{2.1717 \times 10^{-6} (\text{IPSO})}$

表 5 具有区间参数的双摆系统动力学的反求结果 (Case 2)

Tab. 5 Inverse results of dynamics of double pendulum system with interval parameters (Case 2)

给定的输出值	初始状态角 θ_1 的真实值/rad	初始状态角 θ_1 的反求值/rad	初始状态角 θ_2 的真实值/rad	初始状态角 θ_2 的反求值/rad	适应度函数值
见表A3中的数据	[1.4923, 1.6493]	$\frac{[1.4923, 1.6492] (\text{SPSO})}{[1.4923, 1.6493] (\text{IPSO})}$	[0.9948, 1.0996]	$\frac{[0.9948, 1.0995] (\text{SPSO})}{[0.9949, 1.0995] (\text{IPSO})}$	$\frac{1.5754 \times 10^{-4} (\text{SPSO})}{3.0576 \times 10^{-5} (\text{IPSO})}$

在较小的误差,且 IPSO 算法得到的适应度函数值更小。两种不同工况下的数值结果充分说明了嵌套的 Chebyshev 多项式代理模型和 IPSO 算法对具有区间不确定性的柔性多体系统动力学的反问题求解是十分有效的。

由于对柔性多体系统模型本身的材料性质认识的缺乏,导致柔性多体系统动力学模型本身也是不确定的。现在考虑第三种工况,即柔性双摆系统中同时含有初始的输入不确定性和模型本身的不确定性,即杆 OA 和 AB 与 X 方向的初始状态角 θ_1 、 θ_2 以及杆 AB 的杨氏模量 E 均为区间不确定性参数。现根据附录中表 A4 中各个时刻处 B 点在 X 和 Y 方向位移的区间上、下界,反求初始状态角 θ_1 、 θ_2 以及杆 AB 的杨氏模量 E 。第三种工况 (Case 3) 下,表 A4 的结果对应的正问题的区间不确定性初始状态角 θ_1 、 θ_2 以及杆 AB 的杨氏模量 E 的真实值可分别表示为:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{\pi}{4}(1+0.05\eta_1) = \left[\frac{\pi}{4} - 0.05 \times \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + 0.05 \times \frac{\pi}{4} \right] \text{ rad} \approx \\ & [0.7461, 0.8247] \text{ rad} \\ \theta_2 &= \frac{\pi}{6}(1+0.05\eta_1) = \left[\frac{\pi}{6} - 0.05 \times \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + 0.05 \times \frac{\pi}{6} \right] \text{ rad} \approx \\ & [0.4974, 0.5498] \text{ rad} \\ E &= 2 \times 10^7 \cdot (1+0.05\eta_2) \text{ Pa} = \\ & \left[2 \times 10^7 - 0.05 \cdot 2 \times 10^7, 2 \times 10^7 + 0.05 \cdot 2 \times 10^7 \right] \text{ Pa} \approx \\ & [1.9 \times 10^7, 2.1 \times 10^7] \text{ Pa}\end{aligned}$$

将 Chebyshev 多项式代理模型分别与 SPSO 算法和 IPSO 算法相结合,反求得到的结果如表 6 所示。其中,SPSO 算法和 IPSO 算法中粒子种群规模均取为 40,最大迭代次数均为 100, Chebyshev 多项式的展开阶数均取为 2。在第三种工况 (Case3) 下,采用 SPSO 算法得到的初始状态角 θ_1 、 θ_2 以及杨氏模量 E 的反求结果分别为:

$$\begin{aligned}\theta_1 &\approx [0.7641, 0.8247] \text{ rad} \\ \theta_2 &\approx [0.4974, 0.5498] \text{ rad} \\ E &\approx [1.9 \times 10^7, 2.1 \times 10^7] \text{ Pa}\end{aligned}$$

由 IPSO 算法得到的初始状态角 θ_1 、 θ_2 和杨氏模量 E 的反求结果分别为:

$$\begin{aligned}\theta_1 &\approx [0.7641, 0.8246] \text{ rad} \\ \theta_2 &\approx [0.4975, 0.5498] \text{ rad} \\ E &\approx [1.9 \times 10^7, 2.1 \times 10^7] \text{ Pa}\end{aligned}$$

由表 6 中的数值结果可知,采用 SPSO 算法和 IPSO 算法的反求结果中杨氏模量 E 的反求值与真实结果几乎一致。而对于初始状态角 θ_2 , IPSO 算法的结果与真实结果之间存在较小的误差。由 SPSO 算法和 IPSO 算法得到的适应度函数值分别为 2.6023×10^{-5} 和 6.0421×10^{-5} ,虽然 IPSO 算法的适应度函数值略大于 SPSO 算法的适应度函数值,但由于适应度函数值的量级为 10^{-5} ,因此 IPSO 算法的反求结果依然是有效的。

表 6 具有区间参数的双摆系统动力学的反求结果 (Case 3)

Tab. 6 Inverse results of dynamics of double pendulum system with interval parameters (Case 3)

给定的 初始值	初始状态角 θ_1 的 真实值/rad	初始状态角 θ_1 的 反求值/rad	初始状态角 θ_2 的 真实值/rad	初始状态角 θ_2 的 反求值/rad	杨氏模量 E 的 真实值/Pa	杨氏模量 E 的 反求值/Pa	适应度函数值
参考表A4 中的数据	[0.7461, 0.8247]	[0.7461, 0.8247]	[0.4974, 0.5498]	[0.4974, 0.5498]	[1.9×10 ⁷ , 2.1×10 ⁷]	[1.9×10 ⁷ , 2.1×10 ⁷]	2.6023×10 ⁻⁵ (SPSO)
		(SPSO) [0.7461, 0.8246]	[0.4974, 0.5498]	(SPSO) [0.4975, 0.5498]	[1.9×10 ⁷ , 2.1×10 ⁷]	(SPSO) [1.9×10 ⁷ , 2.1×10 ⁷]	6.0421×10 ⁻⁵ (IPSO)
		(IPSO)		(IPSO)		(IPSO)	

4 结 论

针对具有区间不确定性的柔性多体系统动力学反问题,本文提出了一种嵌套的 Chebyshev 多项式代理模型和 IPSO 算法的计算方法。首先,建立具有区间不确定性的多体系统动力学模型方程,并采用区间中点和区间半径来描述未知的区间不确定性的输入参数。其次,对柔性多体系统动力学的输出响应建立 Chebyshev 多项式代理模型。最后,采用 IPSO 算法来反求未知区间输入参数的区间中点和区间半径。由于基于 Taylor 展开的方法仅适用于对含较小不确定水平的不确定参数的结构分析,而柔性多体系统中杨氏模量的参数中往往含有较大的不确定水

平,因此本文采用 Chebyshev 多项式逼近柔性多体系统动力学的响应,通过不确定性参数所在区间的高斯积分点处的函数值对响应函数进行全局逼近,从而获得不确定性区间参数的边界。此外,采用 Chebyshev 多项式逼近响应函数的方法比基于 Taylor 展开的方法能获得更“紧”的响应区间。

在确定性的柔性多体系统动力学的反问题中,反求过程分别采用 SPSO 算法和 IPSO 算法。由于粒子的维数较低,SPSO 算法和 IPSO 算法均表现出非常好的寻优能力,但 IPSO 算法的适应度函数值更小。在具有区间不确定性的柔性多体系统中,将 Chebyshev 多项式代理模型分别与 SPSO 算法和 IPSO 算法相结合来计算反求结果。由数值结果可以发现,当仅考虑初始参数的不确定性时,IPSO 算法比 SPSO 算法

表现出更好的寻优能力;当同时考虑初始参数和结构参数的不确定性时,与初始参数的取值区间相比,杨氏模量的取值区间非常大,采用 IPSO 算法得到适应度函数值略大于 SPSO 算法的适应度函数值。但数值结果证明 IPSO 算法得到的反求结果依然是有效的。

参考文献:

- [1] VOGEL C R. Computational Methods for Inverse Problems[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2002.
- [2] FONSECA J R, FRISWELL M I, MOTTERSHEAD J E, et al. Uncertainty identification by the maximum likelihood method[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 288(3): 587-599.
- [3] HONJO Y, WEN-TSUNG L, GUHA S. Inverse analysis of an embankment on soft clay by extended Bayesian method[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1994, 18(10): 709-734.
- [4] JIANG C, LIU G R, HAN X. A novel method for uncertainty inverse problems and application to material characterization of composites[J]. *Experimental Mechanics*, 2008, 48(4): 539-548.
- [5] 唐嘉昌. 基于区间不确定性的工程反问题方法研究 [D]. 长沙: 湖南大学, 2020.
TANG Jiachang. The research on computational methods for engineering inverse problems under interval uncertainty[D]. Changsha: Hunan University, 2020.
- [6] 谷韬, 徐定华. 带随机 Robin 边界数据的三层热传递模型及参数识别反问题 [J]. *浙江理工大学学报(自然科学版)*, 2021, 46(2): 266-272.
GU Tao, XU Dinghua. Three-layer heat transfer model with random Robin boundary data and the inverse problem of parameter identification[J]. *Journal of Zhejiang Sci-Tech University(Natural Sciences Edition)*, 2021, 46(2): 266-272.
- [7] FAES M, MOENS D. Identification and quantification of spatial interval uncertainty in numerical models[J]. *Computers and Structures*, 2017, 192: 16-33.
- [8] LIU J, CAI H, JIANG C, et al. An interval inverse method based on high dimensional model representation and affine arithmetic[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, 63: 732-743.
- [9] 张伟. 基于概率和区间的工程不确定性反问题研究 [D]. 长沙: 湖南大学, 2013.
ZHANG Wei. The research on engineering inverse problems under uncertainty based on probability and interval[D]. Changsha: Hunan University, 2013.
- [10] WANG Z, TIAN Q, HU H Y. Dynamics of spatial rigid-flexible multibody systems with uncertain interval parameters[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 84(2): 527-548.

第一作者: 郭 祥(1991—), 女, 博士。

E-mail: gxiang522@sohu.com

通信作者: 靳艳飞(1976—), 女, 博士, 教授。

E-mail: jinyf@bit.edu.cn

附录

表 A1 给定的两种不同工况下 B 点 X 和 Y 方向位移(单位: m)

Tab. A1 X-direction and Y-direction displacement of point B under two working conditions (Unit: m)

Case 1		Case 2		Case 1		Case 2	
X方向位移	Y方向位移	X方向位移	Y方向位移	X方向位移	Y方向位移	X方向位移	Y方向位移
2.4392	-1.7071	1.9142	-2.2802	-1.5140	-2.5966	-1.1920	-2.7582
2.4380	-1.7186	1.9131	-2.2912	-1.6913	-2.4921	-1.3407	-2.6878
2.4155	-1.7426	1.8906	-2.3068	-1.8458	-2.3698	-1.4813	-2.6185
2.3724	-1.7947	1.8421	-2.3452	-1.9874	-2.2550	-1.5908	-2.5443
2.3137	-1.8704	1.7772	-2.4029	-2.1099	-2.1458	-1.6850	-2.4835
2.2346	-1.9513	1.6980	-2.4547	-2.2096	-2.0308	-1.7724	-2.4202
2.1409	-2.0603	1.6041	-2.5285	-2.3022	-1.9286	-1.8402	-2.3576
2.0123	-2.1814	1.4782	-2.6061	-2.3685	-1.8353	-1.8847	-2.3230
1.8562	-2.3206	1.3309	-2.6833	-2.4057	-1.7555	-1.9054	-2.2917
1.6772	-2.4661	1.1766	-2.7674	-2.4313	-1.6979	-1.9194	-2.2712
1.4652	-2.6039	1.0010	-2.8328	-2.4313	-1.6484	-1.9189	-2.2706
1.2148	-2.7473	0.8004	-2.8973	-2.4152	-1.6355	-1.8859	-2.2832
0.9290	-2.8613	0.5892	-2.9544	-2.3733	-1.6476	-1.8372	-2.3260
0.6284	-2.9446	0.3797	-2.9817	-2.3192	-1.6905	-1.7745	-2.3693
0.3146	-2.9966	0.1646	-3.0041	-2.2494	-1.7550	-1.6966	-2.4332
-0.0076	-3.0009	-0.0620	-3.0098	-2.1634	-1.8524	-1.5884	-2.5151
-0.3126	-2.9841	-0.2782	-2.9910	-2.0514	-1.9811	-1.4503	-2.6009
-0.5952	-2.9396	-0.4768	-2.9715	-1.9142	-2.1397	-1.3003	-2.6988
-0.8610	-2.8693	-0.6736	-2.9310	-1.7528	-2.3109	-1.1304	-2.7801
-1.1065	-2.7957	-0.8673	-2.8758	-1.5573	-2.4945	-0.9282	-2.8594
-1.3215	-2.6991	-1.0412	-2.8246	—	—	—	—

表 A2 给定第一种工况(Case 1)下 B 点 X 和 Y 方向位移的区间上、下界(单位: m)

Tab. A2 The upper and lower bounds of the interval of X-direction and Y-direction displacement of point B under the first working condition(Case 1) (Unit: m)

min_X ₁	max_X ₁	min_Y ₁	max_Y ₁	min_X ₁	max_X ₁	min_Y ₁	max_Y ₁
2.3840	2.4920	-1.7794	-1.6331	-1.5499	-1.4763	-2.6170	-2.5770
2.3828	2.4908	-1.7908	-1.6446	-1.7269	-1.6534	-2.5170	-2.4673
2.3601	2.4687	-1.8141	-1.6694	-1.8815	-1.8084	-2.3997	-2.3405
2.3159	2.4268	-1.8659	-1.7217	-2.0260	-1.9467	-2.2890	-2.2214
2.2553	2.3700	-1.9408	-1.7981	-2.1487	-2.0681	-2.1866	-2.1050
2.1753	2.2920	-2.0198	-1.8810	-2.2506	-2.1665	-2.0757	-1.9860
2.0807	2.1992	-2.1260	-1.9926	-2.3468	-2.2556	-1.9787	-1.8782
1.9508	2.0720	-2.2429	-2.1178	-2.414	-2.3197	-1.8940	-1.7766
1.7936	1.9173	-2.3761	-2.2628	-2.4549	-2.3541	-1.8194	-1.6918
1.6152	1.7380	-2.5141	-2.4157	-2.4811	-2.3790	-1.7690	-1.6259
1.4055	1.5242	-2.6417	-2.5638	-2.4813	-2.3788	-1.7268	-1.5691
1.1589	1.2708	-2.7738	-2.7185	-2.4655	-2.3616	-1.7198	-1.5504
0.8805	0.9784	-2.8778	-2.8433	-2.4222	-2.3206	-1.7382	-1.5563
0.5919	0.6664	-2.9510	-2.9375	-2.3695	-2.2652	-1.7832	-1.5960
0.2924	0.3385	-2.9984	-2.9944	-2.2990	-2.1959	-1.8524	-1.6552
-0.0171	0.0034	-3.0022	-2.9997	-2.2158	-2.1061	-1.9489	-1.7529
-0.3300	-0.2947	-2.9897	-2.9783	-2.1054	-1.9919	-2.0795	-1.8800
-0.6225	-0.5676	-2.9500	-2.9271	-1.9745	-1.8488	-2.2297	-2.0444
-0.8946	-0.8270	-2.8853	-2.8509	-1.8172	-1.6837	-2.3976	-2.2184
-1.1404	-1.0723	-2.8136	-2.7746	-1.6305	-1.4802	-2.5645	-2.4164
-1.3540	-1.2881	-2.7171	-2.6772	—	—	—	—

表 A3 给定第二种工况 (Case 2) 下 B 点 X 和 Y 方向位移的区间上、下界(单位: m)

Tab. A3 The upper and lower bounds of the interval of X-direction and Y-direction displacement of point B under the second working condition(Case 2) (Unit: m)

min_X ₂	max_X ₂	min_Y ₂	max_Y ₂	min_X ₂	max_X ₂	min_Y ₂	max_Y ₂
0.8297	1.1676	-2.7820	-2.6743	-0.5243	-0.2388	-2.9559	-2.9090
0.8292	1.1669	-2.7926	-2.6850	-0.6188	-0.2841	-2.9543	-2.9024
0.8150	1.1499	-2.8083	-2.7023	-0.7275	-0.3523	-2.9505	-2.9036
0.7664	1.0991	-2.8501	-2.7465	-0.8457	-0.4388	-2.9538	-2.8903
0.6912	1.0219	-2.8954	-2.7973	-0.9381	-0.5295	-2.9520	-2.8552
0.6112	0.9389	-2.9369	-2.8448	-1.01791	-0.6147	-2.9530	-2.8155
0.5189	0.8420	-2.9687	-2.8919	-1.0948	-0.6888	-2.9144	-2.7701
0.4010	0.7134	-2.9695	-2.9167	-1.1449	-0.7551	-2.8778	-2.7217
0.2889	0.5819	-2.9670	-2.9379	-1.1601	-0.8006	-2.8410	-2.7006
0.2002	0.4671	-2.9689	-2.9414	-1.1576	-0.8154	-2.8044	-2.6820
0.1246	0.3579	-2.9655	-2.9201	-1.1532	-0.8089	-2.7995	-2.6853
0.0540	0.2518	-2.9795	-2.9173	-1.1331	-0.7975	-2.8138	-2.6924
-0.0181	0.1444	-2.9895	-2.9156	-1.0803	-0.7734	-2.8357	-2.6981
-0.0766	0.0673	-2.9919	-2.9340	-1.0023	-0.7237	-2.8787	-2.7289
-0.1154	0.0142	-3.0082	-2.9529	-0.9173	-0.6471	-2.9150	-2.7748
-0.1460	-0.0499	-3.0067	-2.9818	-0.8186	-0.5609	-2.9523	-2.8334
-0.1808	-0.1022	-3.0133	-3.0011	-0.6857	-0.4584	-2.9694	-2.8949
-0.1938	-0.1145	-3.0007	-2.9930	-0.5409	-0.3327	-2.9960	-2.9519
-0.2564	-0.1193	-2.9839	-2.9739	-0.4025	-0.2014	-2.9878	-2.9690
-0.3441	-0.1423	-2.9731	-2.9597	-0.2784	-0.0969	-2.9955	-2.9594
-0.4321	-0.1844	-2.9617	-2.9281	—	—	—	—

表 A4 给定第三种工况 (Case 3) 下 B 点 X 和 Y 方向位移的区间上、下界(单位: m)

Tab. A4 The upper and lower bounds of the interval of X-direction and Y-direction displacement of point B under the third working condition(Case 3) (Unit: m)

min_X ₃	max_X ₃	min_Y ₃	max_Y ₃	min_X ₃	max_X ₃	min_Y ₃	max_Y ₃
2.4124	2.4648	-1.7521	-1.6614	-1.5187	-1.5096	-2.6020	-2.5935
2.4110	2.4637	-1.7637	-1.6728	-1.6992	-1.6816	-2.4977	-2.4835
2.3882	2.4418	-1.78684	-1.6979	-1.8602	-1.8330	-2.3847	-2.3583
2.3453	2.3987	-1.8364	-1.7521	-2.006	-1.9678	-2.2742	-2.2376
2.2870	2.3398	-1.9086	-1.8312	-2.1316	-2.0850	-2.1666	-2.1223
2.2087	2.2605	-1.9854	-1.9171	-2.2357	-2.1859	-2.0607	-2.0037
2.1146	2.1667	-2.0899	-2.0300	-2.3291	-2.2712	-1.9612	-1.8958
1.9855	2.0395	-2.2064	-2.1561	-2.3944	-2.3372	-1.8747	-1.7957
1.8320	1.8811	-2.3399	-2.3004	-2.4328	-2.3802	-1.7994	-1.7121
1.6546	1.6999	-2.4810	-2.4497	-2.4538	-2.4039	-1.7426	-1.6469
1.4439	1.4861	-2.6137	-2.5940	-2.4550	-2.4084	-1.7033	-1.5996
1.1953	1.2349	-2.7540	-2.7394	-2.4372	-2.3898	-1.6871	-1.5845
0.9145	0.9450	-2.8676	-2.8551	-2.4006	-2.3476	-1.6972	-1.5985
0.6156	0.6416	-2.9481	-2.9410	-2.3438	-2.2938	-1.7377	-1.6380
0.3019	0.3263	-2.9984	-2.9921	-2.2748	-2.2248	-1.8072	-1.7036
-0.0176	0.0042	-3.0044	-2.9996	-2.1903	-2.1336	-1.9011	-1.8057
-0.3214	-0.3033	-2.9873	-2.9797	-2.0843	-2.0166	-2.0247	-1.9368
-0.6031	-0.5882	-2.9444	-2.9332	-1.9493	-1.8817	-2.1789	-2.0919
-0.8673	-0.8546	-2.8755	-2.8655	-1.7898	-1.7173	-2.3482	-2.2712
-1.1092	-1.1019	-2.7992	-2.7901	-1.5961	-1.5176	-2.5273	-2.4630
-1.3246	-1.3196	-2.7041	-2.6955	—	—	—	—