

含负刚度的调谐惯容质量减振系统的 参数优化解析及设计公式

苏宁^{1,2}, 陈昭庆¹, 边菁³, 曾聪¹

(1. 东北电力大学建筑工程学院, 吉林 吉林 132012; 2. 交通运输部天津水运工程科学研究所, 天津 300456;
3. 重庆大学土木工程学院, 重庆 400045)

摘要: 惯容器和负刚度装置能够提高减振器的耗能性能, 被越来越多地融入新型高性能减振装置中。本文对含负刚度的调谐惯容质量减振系统(NS-TIMS)进行了参数优化解析研究。建立了NS-TIMS在不同安装位置、应用场景(层间吸振、基底隔振)、激励类型下的运动方程及传递函数统一模型。在定点理论的基础上, 得到了综合考虑 H_{∞} 和 H_2 范数的NS-TIMS最优参数解析解。考虑典型的应用条件, 对优化参数解析公式进行分析和简化, 得到了一种基于“等效惯质比”的NS-TIMS参数设计公式, 并讨论了设计公式的适用条件。风振控制和基础隔振实际算例分析验证了考虑实际结构阻尼比和随机荷载频谱特性条件下的设计公式的有效性。同时发现NS-TIMS在高柔结构吸振和辅助基础隔振方面均具有优越的性能。

关键词: 基础隔振; 动力吸振器; 负刚度; 惯容; H_{∞} 优化

中图分类号: TU352.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2025)04-0803-13

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2025.04.016

Analytical parametric optimization analysis and design formulas of tuned inerter mass vibration control system with negative stiffness

SU Ning^{1,2}, CHEN Zhaoqing¹, BIAN Jing³, ZENG Cong¹

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Northeast Electric Power University, Jilin 132012, China;
2. Tianjin Research Institute for Water Transport Engineering, Ministry of Transport, Tianjin 300456, China;
3. School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China.)

Abstract: Inerters and negative stiffness devices can improve the energy dissipation performance of vibration absorbers. An increasing number of applications of them in novel high-performance vibration suppression have been witnessed. In this paper, analytical parametric optimization analyses on the tuned inerter mass systems with negative stiffness (NS-TIMS) are performed. A unified model of governing equations and transfer functions for NS-TIMS under different installation locations, application scenarios (such as inter-layer vibration absorption, and base isolation) and excitation types is established. Based on the fixed-point theory, the optimal parameters of NS-TIMS considering both H_{∞} and H_2 norms are analytically derived. Considering typical application conditions, the analytical formulas are further analyzed and simplified. Consequently, the design formulas for the optimal parameters of NS-TIMS based on the “equivalent inertial mass ratio” are proposed. The application scopes of the design formula are discussed. Through numerical cases on the practical examples of wind-induced vibration control and seismic base isolation, the effectiveness of the design formulas considering the actual structural damping ratio and spectral characteristics of stochastic excitations is verified. It is also revealed that NS-TIMSS have superior performances in both high flexible structure vibration absorption and auxiliary base vibration isolation.

Keywords: base isolation; dynamic vibration absorber; negative stiffness; inerter; H_{∞} optimization

动力减振装置由FRAHM^[1]发明, 最初利用一个附加质量块与主结构的相位差减缓共振效应。

ORMONDROYD等^[2]将阻尼器引入该系统, 实现了更宽频带的振动抑制, 形成了经典的调谐质量阻尼

收稿日期: 2023-07-12; **修订日期:** 2023-10-10

基金项目: 国家重点研发计划项目(2022YFB2602302); 国家自然科学基金资助项目(52202415); 山西省基础研究计划项目(202203021221044); 中央级公益性科研院所基本科研业务费专项(TKS20230201)

器(tuned mass damper, TMD)。DEN HARTOG^[3]在经典教材中提出了TMD参数优化设计理论,包括利用定点理论求解最优频率比,还将BROCK^[4]提出的最优阻尼比求解方法囊括其中。ASAMI等^[5]推导了TMD基于 H_{∞} 和 H_2 范数的优化设计解析解。KRENK^[6]提出了一种基于模态阻尼比相等的最优阻尼解析解。TMD构造简单,性能优越,得到了广泛研究和应用^[7-8]。TMD的振动控制最优效果主要取决于附加质量的大小,当质量块受到安装条件和成本等因素限制时,振动控制效果会受到一定的局限,因此,轻量化高性能的新型减振装置近年来成为研究的热点。

日本学者KAWAMATA^[9]提出了一种利用丝杠滚珠将平动转化为转动的机械装置,用于管道结构的支撑和缓冲。SMITH^[10]通过类比力学和电学的基本方程,提出了“惯容”的概念,并形成了一种新型机械装置,称为惯容器。这与KAWAMATA^[9]的装置在原理上不谋而合,都是通过机械构造(如齿轮齿条、丝杠滚珠等方式)将两连接端的相对直线运动转化为飞轮的转动,从而提供正比于两端相对加速度的质惯控制力^[11],其比例系数称为惯容系数,与质量具有相同的量纲。惯容器能够通过恰当的设计实现自身质量千余倍的惯容系数^[12]。利用该特性,有望实现轻量化高性能的减振,因此,惯容器近年来在振动控制领域得到了广泛的研究^[13]。IKAGO等^[14]提出了调谐黏滞质量阻尼器(tuned viscous mass damper, TVMD),首次将惯容阻尼器实际应用于建筑结构。调谐惯容阻尼器(tuned inerter damper, TID)^[15]、调谐惯质阻尼器(tuned mass damper inerter, TMDI)^[16]也相继被提出。REN^[17]将TMD中的阻尼器接地,形成了一种变式TMD(VTMD),取得了更为显著的振动控制效果。基于此,变式TMDI(VTMDI)也被提出^[18]。上述调谐惯容质量减振系统(tuned inerter mass system, TIMS)得到了系统的分析和比较^[19-20]。

惯容器之所以能够增强耗能,是由于它能够提供随频率变化的负刚度,除此之外,通过预压弹簧、磁块排列等方式实现的负刚度装置(negative stiffness, NS),可输出与变形方向相同且正比于变形的控制力,提供的负刚度与频率无关^[21]。近年来,含有负刚度的减振系统也得到了较多研究。如将负刚度与阻尼器形成负刚度放大阻尼器(negative stiffness amplifying damper, NSAD)^[22]。负刚度与TMD^[23-24]结合形成NS-TMD,显著提高振动控制效果,应用在隔振系统上称为KDamper^[25]。负刚度还与一些TMD的变化形式组合形成了一系列负刚度调谐质量减振系统^[26]。此外,负刚度与TVMD型惯容减振系统结合形成了调谐惯容负刚度阻尼器(tuned

inerter negative stiffness damper, TINSD)^[27],与TID结合形成了调谐负刚度惯容阻尼器(tuned negative stiffness inerter damper, TNSID)^[28]。对这些负刚度惯容减振系统进行了一些比较研究^[29-30],发现它们具有优越的吸振和隔振性能。但对于含负刚度的调谐惯容质量减振系统(NS-TIMS)还有待进一步开展系统性的分析和研究。

惯容器和负刚度装置能够提高减振器的耗能性能,被越来越多地融入新型高性能减振装置中。虽然目前的研究已有不同类型的含惯容器和负刚度的减振系统,但都是针对特定若干种连接形式或激励类型下的研究,尚缺乏综合的比较分析和便于应用的统一设计公式。本文对含负刚度的调谐惯容质量减振系统(NS-TIMS)进行了较为系统地参数优化解析研究。建立了NS-TIMS在不同安装位置、应用场景(层间吸振、基底隔振)、激励类型下的运动方程及传递函数统一模型。在定点理论的基础上,得到了综合考虑 H_{∞} 和 H_2 范数的NS-TIMS最优参数解析解。考虑典型的应用条件,对优化参数解析公式进行分析和简化,得到了一种基于“等效惯质比”的NS-TIMS参数设计公式,并讨论了设计公式的适用条件。最后,通过风振控制和基础隔振实际算例分析验证了考虑实际结构阻尼比和随机荷载频谱特性条件下的设计公式的有效性,并分析了NS-TIMS在实际应用条件下的减振性能。

1 NS-TIMS 结构体系

含负刚度的调谐惯容质量减振系统(NS-TIMS)既可安装在高柔结构的上部不同位置作为吸振装置(如高层结构层间或高耸结构不同高度节点间,根据广义单自由度假设进行简化,见文献[20, 30],如图1(a)所示),也可安装在隔振层下部作为辅助隔振装置,用于减小隔振层的位移(对上部结构进行刚性简化,见文献[25, 27-28],如图1(b)所示)。图中, $x(t)$ 表示主结构相对地面的振动位移响应。

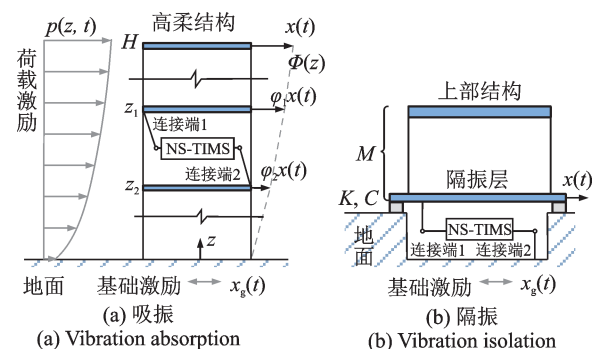


图1 NS-TIMS基本形式

Fig. 1 Basic forms of NS-TIMS

NS-TIMS均由质量、惯容、弹簧、阻尼和负刚度元件组成,其质量、惯容、刚度、阻尼和负刚度系数分别为 m 、 b 、 $k(>0)$ 、 c 和 $k'(\leq 0)$ 。本文主要研究两种NS-TIMS结构形式,分别定义为NS-TIMS-I(如图2(a)所示)和NS-TIMS-II(如图2(b)所示)。图中, $y(t)$ 表示NS-TIMS的质量块相对地面的振动位移响应。类型参数定义为 t_v ,对于NS-TIMS-I, $t_v=0$,阻尼与弹簧元件并联;对于NS-TIMS-II, $t_v=1$,阻尼与惯容、负刚度元件并联。

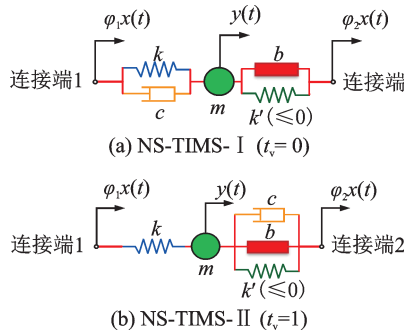


图2 两种NS-TIMS结构形式

Fig. 2 Two NS-TIMS configurations

1.1 运动方程

对于安装在以一阶振动为主的高柔主结构(高度坐标 $0 \leq z \leq H$)上的吸振装置,假设主结构的振动为一阶振型主导,其广义质量、广义刚度和广义阻尼系数分别为 M 、 K 和 C ,归一化振型函数为 $\Phi(z)$,吸振器两个连接端分别安装在高度 z_1 和 z_2 处,定义位置参数 $\varphi_1 = \Phi(z_1)$, $\varphi_2 = \Phi(z_2)$ 。

对于辅助隔振装置,为统一表示运动方程,主振动系统质量、刚度和阻尼系数也表示为 M 、 K 和 C 。这里, M 为隔振层与上部结构的总质量, K 和 C 分别为隔振主系统的刚度和阻尼系数。辅助隔振装置连接在隔振层与地面之间,位置参数为 $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 0$ 。

对于外激励 $f(t)$,考虑荷载激励和基础激励两种形式,分别对应于沿高度变化的外荷载(如风荷载 $p(z, t)$)和基底地震动 $x_g(t)$ 。定义激励类型参数 t_e , $t_e=0$ 表示荷载激励,此时, $f(t) = \int_0^H p(z, t)\Phi(z)dz$ 表示广义荷载; $t_e=1$ 表示基础激励,此时, $f(t) = -M\ddot{x}_g(t)$ 。

根据达朗贝尔原理,NS-TIMS耦合广义单自由度主结构的运动方程可统一表示为:

$$\begin{cases} M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx - (\varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2) = f(t) \\ m\ddot{y} + f_1 + f_2 = t_e \mu f(t) \\ f_1 = k(y - \varphi_1 x) + (1 - t_v)c(\dot{y} - \varphi_1 \dot{x}) \\ f_2 = b(\ddot{y} - \varphi_2 \ddot{x}) + t_v c(\dot{y} - \varphi_2 \dot{x}) + k'(y - \varphi_2 x) \end{cases} \quad (1)$$

式中, x 表示主结构顶部相对地面的位移; y 表示NS-TIMS中的质量块相对于地面的位移; $\mu = m/M$ 为NS-TIMS的质量比; f_1 、 f_2 分别为NS-TIMS两个连接端1、2处的控制力。

为将运动方程进行无量纲表示,定义如下参数。主结构自振频率 $\omega_n = \sqrt{K/M}$,主结构阻尼比 $\zeta_n = \frac{C}{2\sqrt{KM}}$ 。NS-TIMS的惯质比 $\beta = b/M$,其名义频率比 $\nu = \frac{\sqrt{k/(m+b)}}{\sqrt{K/M}}$,其名义阻尼比 $\zeta_d = \frac{c}{2\sqrt{k(m+b)}}$,负刚度比定义为 $\kappa = k'/k$ 。

由此,NS-TIMS可由参数 $(t_e, t_v, \mu, \beta, \kappa, \varphi_1, \varphi_2, \nu, \zeta_d)$ 表示。其中, (ν, ζ_d) 为待定参数,根据输入参数 $(t_e, t_v, \mu, \beta, \kappa, \varphi_1, \varphi_2)$ 进行优化得到。

此外,选取特殊参数,上述NS-TIMS模型可以表示多种减振装置,例如:

$t_v=0, \beta=0, \kappa=0$ 表示传统TMD^[12];

$t_v=1, \beta=0, \kappa=0$ 表示变式TMD(VTMD)^[17];

$t_v=0, \mu=0, \kappa=0$ 表示TID^[15],也称为混联I型(SPIS-I)^[12];

$t_v=1, \mu=0, \kappa=0$ 表示TVMD^[14],也称为混联II型(SPIS-II)^[12];

$t_v=0, \kappa=0$ 表示TMDI^[16];

$t_v=1, \kappa=0$ 表示变式TMDI(VTMDI)^[18];

$t_v=0, \beta=0, \kappa < 0$ 表示负刚度TMD^[24],用于隔振时,也称为KDAmper^[25];

$t_v=0, \mu=0, \kappa < 0$ 表示负刚度TID(NS-TID^[30]),也称为N-SPIS-I^[29]或TNSID^[28];

$t_v=1, \mu=0, \kappa < 0$ 表示负刚度TVMD(NS-TVMD^[30]),也称为N-SPIS-II^[29]或TINSID^[27]。

1.2 传递函数

对运动方程式(1)两端进行Laplace变换,可得:

$$\begin{cases} (Ms^2 + Cs + K)X(s) - [\varphi_1 F_1(s) + \varphi_2 F_2(s)] = F(s) \\ ms^2 Y(s) + F_1(s) + F_2(s) = t_e \mu F(s) \\ F_1(s) = [(1 - t_v)cs + k][Y(s) - \varphi_1 X(s)] \\ F_2(s) = (bs^2 + t_v cs + k')[Y(s) - \varphi_2 X(s)] \end{cases} \quad (2)$$

式中, $F(s)$ 、 $X(s)$ 、 $Y(s)$ 、 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$ 分别为 $f(t)$ 、 $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的Laplace变换; s 为Laplace域的复频率。

主结构响应 x 的无量纲传递函数定义为 $H(s) = \frac{X(s)}{F(s)/K}$ 。将式(2)整理,可求得:

$$H(s) = \frac{\sum_{j=0}^2 \theta_j \lambda^j}{\sum_{j=0}^4 \gamma_j \lambda^j} \quad (3)$$

式中, $\lambda = s/\omega_n$ 为无量纲复频率; $\gamma_j (j = 0, 1, 2, 3, 4)$ 和 $\theta_j (j = 0, 1, 2)$ 分别为频响函数分母和分子多项式的无量纲系数, 如下式所示:

$$\begin{cases} \gamma_0 = \nu^2 [1 + \kappa(1 + \nu^2 \Gamma_0)] \\ \gamma_1 = 2\xi_n \nu^2 (1 + \kappa) + 2\xi_d \nu (1 + \nu^2 \Gamma_1) \\ \gamma_2 = 1 + 4\xi_n \xi_d \nu + \nu^2 \Gamma_2 \\ \gamma_3 = 2\xi_n + 2\xi_d \nu \Gamma_3 \\ \gamma_4 = \Gamma_4 \\ \theta_0 = \nu^2 \Theta_0 \\ \theta_1 = 2\xi_d \nu \Theta_1 \\ \theta_2 = \Theta_2 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \Gamma_0 = (\mu + \beta)(\varphi_1 - \varphi_2)^2 \\ \Gamma_1 = [t_v + (1 - t_v)\kappa](\mu + \beta)(\varphi_1 - \varphi_2)^2 \\ \Gamma_2 = 1 + \kappa + \mu(\varphi_1^2 + \kappa\varphi_2^2) + \beta(\varphi_1 - \varphi_2)^2 \\ \Gamma_3 = 1 + (1 - t_v)[\mu\varphi_1^2 + \beta(\varphi_1 - \varphi_2)^2] + t_v\mu\varphi_2^2 \\ \Gamma_4 = 1 + \frac{\mu\beta}{\mu + \beta}\varphi_2^2 \\ \Theta_0 = (1 + \kappa) + t_e\mu(\varphi_1 + \kappa\varphi_2) \\ \Theta_1 = 1 + t_e\mu[(1 - t_v)\varphi_1 + t_v\varphi_2] \\ \Theta_2 = 1 + t_e\mu\frac{\beta}{\mu + \beta}\varphi_2 \end{cases} \quad (5)$$

式中, $\Gamma_j (j = 0, 1, 2, 3, 4)$ 和 $\Theta_j (j = 0, 1, 2)$ 分别为 $\gamma_j (j = 0, 1, 2, 3, 4)$ 和 $\theta_j (j = 0, 1, 2)$ 中不含待定参数的无量纲系数。特别地, $\Gamma_j (j = 0, 1, 2, 3, 4)$ 与激励形式 t_e 无关。

传递函数 $H(s)$ 取复频率为纯虚数 ($s = i\omega$) 时, 在频域上称为频响函数 $H(i\omega)$, 其中, ω 表示外激励的圆频率, i 为虚数单位 ($i^2 = -1$)。

2 解析优化

NS-TIMS 的参数优化是根据输入参数 ($t_e, t_v, \mu, \beta, \kappa, \varphi_1, \varphi_2$) 确定待定参数 (ν, ξ_d), 使得性能指标 J 最优的过程, 其参数优化问题定义为:

$$\begin{cases} \text{find} & \nu_{\text{opt}}, \xi_{\text{dopt}} \\ \text{minimize} & J(\nu, \xi, t_e, t_v, \mu, \beta, \kappa, \varphi_1, \varphi_2) \\ \text{s. t.} & \nu_{\text{opt}} \geq 0, \xi_{\text{dopt}} \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

当性能指标 J 取为频响函数 $H(i\omega)$ 的 H_∞ 范数、 H_2 范数时, 分别对应于 H_∞ 和 H_2 优化。对于性能指标较为复杂的情况, 需要利用数值方法求得最优参数。为得到便于应用的最优参数解析公式, 本文结

合 DEN HARTOG^[3] 的定点理论, 给出 NS-TIMS 最优参数的解析近似解。

为得到 NS-TIMS 的优化参数的解析解, 一般忽略主结构的阻尼, 即令 $\xi_n = 0$ 。动力放大系数函数定义为频响函数的模, 如下式所示, 其中, $\Omega = \omega/\omega_n$ 为无量纲频率。 $D(\Omega)$ 表示外激励为简谐荷载频率 ($\omega = \Omega\omega_n$) 时, 结构的动力响应振幅与静力响应振幅的比值:

$$D(\Omega) = |H(i\omega)| = \frac{\sqrt{A_1^2(\Omega) + B_1^2(\Omega)\xi_d^2}}{\sqrt{A_2^2(\Omega) + B_2^2(\Omega)\xi_d^2}} \quad (7)$$

其中, 多项式 $A_1(\Omega)$ 、 $B_1(\Omega)$ 、 $A_2(\Omega)$ 和 $B_2(\Omega)$ 可表示为:

$$\begin{cases} A_1(\Omega) = -\theta'_0 \Omega^2 + \theta'_1 \\ A_2(\Omega) = \gamma'_4 \Omega^4 - \gamma'_2 \Omega^2 + \gamma'_0 \\ B_1(\Omega) = \theta'_1 \Omega \\ B_2(\Omega) = (-\gamma'_3 \Omega^2 + \gamma'_1) \Omega \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \gamma'_0 = \gamma_0 = \nu^2 [1 + \kappa(1 + \nu^2 \Gamma_0)] \\ \gamma'_1 = 2\nu(1 + \nu^2 \Gamma_1) \\ \gamma'_2 = 1 + \nu^2 \Gamma_2 \\ \gamma'_3 = 2\nu \Gamma_3 \\ \gamma'_4 = \gamma_4 = \Gamma_4 \\ \theta'_0 = \theta_0 = \nu^2 \Theta_0 \\ \theta'_1 = 2\nu \Theta_1 \\ \theta'_2 = \theta_2 = \Theta_2 \end{cases} \quad (9)$$

式中, $\gamma'_j (j = 0, 1, 2, 3, 4)$ 和 $\theta'_j (j = 0, 1, 2)$ 为传递函数 $H(s)$ 的无量纲系数。

2.1 基于定点理论的最优频率比

根据 DEN HARTOG^[3] 的定点理论, 当 ν 固定时, 无论 ξ_d 如何变化, $D(\Omega)$ 总通过两个固定点 P 和 Q, 如图 3(a) 所示。令这两个定点处的函数值相等, 即 $D(\Omega_P) = D(\Omega_Q) = D_{\text{opt}}$:

$$\frac{A_1(\Omega_P)}{A_2(\Omega_P)} = -\frac{B_1(\Omega_P)}{B_2(\Omega_P)} = \frac{B_1(\Omega_Q)}{B_2(\Omega_Q)} = D_{\text{opt}} \quad (10)$$

式中, Ω_P 和 Ω_Q 分别为定点 P 和 Q 所对应的无量纲频率; D_{opt} 为最优固定点的纵坐标。

将式(8)和(9)代入式(10), 得到最优频率比 ν_∞ 的解析解为:

$$\nu_\infty = \sqrt{\frac{2\Gamma_4\Theta_1 + \Gamma_3(\Theta_2 - \Theta_1)}{\Gamma_3(\Gamma_3\Theta_0 + \Gamma_2\Theta_1) - \Gamma_1(\Gamma_3\Theta_2 + 2\Gamma_4\Theta_1)}} \quad (11)$$

最优频率比 ν_∞ 下的最优定点 P、Q 坐标 ($\Omega_{P,Q}$, D_{opt}) 表示为:

$$\Omega_{P,Q} = \sqrt{\frac{B_\infty \pm \sqrt{B_\infty^2 - 4A_\infty C_\infty}}{2A_\infty}} \quad (12)$$

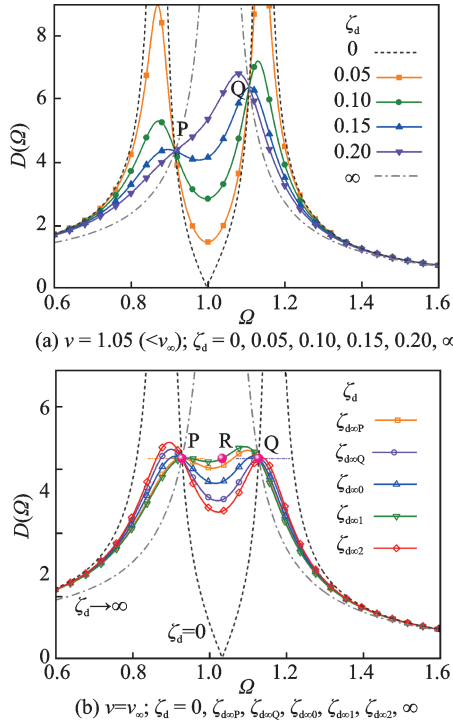


图3 不同待定参数(ν, ζ_d)下的NS-TIMS动力放大系数函数 ($t_\nu = 1, \mu = 0.01, \beta = 0.05, \kappa = -0.1, \varphi_1 = 1, \varphi_2 = 0$)
 Fig.3 Dynamic amplification factor functions of NS-TIMS under different underdetermined parameters (ν, ζ_d) ($t_\nu = 1, \mu = 0.01, \beta = 0.05, \kappa = -0.1, \varphi_1 = 1, \varphi_2 = 0$)

$$D_{opt} = \frac{(\theta'_{1\infty})^2}{(\gamma'_{3\infty})^2} \frac{4A_{\infty}^2}{B_{\infty}^2 - 4A_{\infty}C_{\infty}} \quad (13)$$

其中,系数 A_{∞} 、 B_{∞} 和 C_{∞} 可表示为:

$$\begin{cases} A_{\infty} = \gamma'_{3\infty}\theta'_{2\infty} + \gamma'_{4\infty}\theta'_{1\infty} \\ B_{\infty} = \gamma'_{1\infty}\theta'_{2\infty} + \gamma'_{3\infty}\theta'_{0\infty} + \gamma'_{2\infty}\theta'_{1\infty} \\ C_{\infty} = \gamma'_{1\infty}\theta'_{0\infty} + \gamma'_{0\infty}\theta'_{1\infty} \end{cases} \quad (14)$$

式中,无量纲系数 $\gamma'_{j\infty}$ ($j = 0, 1, 2, 3, 4$)和 $\theta'_{j\infty}$ ($j = 0, 1, 2$)由式(9)取 $\nu = \nu_{\infty}$ 得到。

2.2 最优阻尼比的确定

得到最优频率比 ν_{∞} 后,还需要确定最优阻尼比 $\zeta_{d\infty}$,有如下三种确定方法。

2.2.1 Brock方法

BROCK^[4]将 ν_{∞} 下的最优定点P、Q置为 $D(\Omega)$ 的峰值点,即令 $\frac{dD_{\zeta_d=\zeta_{d\infty}}(\Omega_{P,Q})}{d\Omega} = 0$ 。根据微分求商法则,可得:

$$\zeta_{d\infty P,Q} = \sqrt{\frac{A_1^*(\Omega_{P,Q}) - A_2^*(\Omega_{P,Q})D_{opt}^2}{B_2^*(\Omega_{P,Q})D_{opt}^2 - B_1^*(\Omega_{P,Q})}} \quad (15)$$

其中,多项式函数 $A_1^*(\Omega)$ 、 $B_1^*(\Omega)$ 、 $A_2^*(\Omega)$ 和 $B_2^*(\Omega)$ 可表示为:

$$\begin{cases} A_1^*(\Omega) = 2\theta'_{2\infty}(\theta'_{2\infty}\Omega^2 - \theta'_{0\infty}) \\ B_1^*(\Omega) = (\theta'_{1\infty})^2 \\ A_2^*(\Omega) = 2(\gamma'_{4\infty}\Omega^4 - \gamma'_{2\infty}\Omega^2 + \gamma'_{0\infty}) \cdot (2\gamma'_{4\infty}\Omega^2 - \gamma'_{2\infty}) \\ B_2^*(\Omega) = (3\gamma'_{3\infty}\Omega^2 - \gamma'_{1\infty})(\gamma'_{3\infty}\Omega^2 - \gamma'_{1\infty}) \end{cases} \quad (16)$$

式(15)得到的 $\zeta_{d\infty P,Q}$ 分别为在P、Q点满足零导数条件的最优阻尼比,如图3(b)所示。但无法同时在P、Q两点同时满足,为同时考虑P、Q两点,一般按下式取最优阻尼比 $\zeta_{d\infty 0}$:

$$\zeta_{d\infty 0} = \sqrt{\frac{\zeta_{d\infty P}^2 + \zeta_{d\infty Q}^2}{2}} \quad (17)$$

2.2.2 Krenk方法

KRENK^[6]在两个定点P、Q之间定义了一个新的点R,坐标为 (Ω_R, D_{opt}) ,其中 Ω_R 为 ζ_d 趋于 ∞ 时的特征频率,即 $B_2(\Omega_R) = 0$,可得:

$$\Omega_R = \sqrt{\frac{\gamma'_{1\infty}}{\gamma'_{3\infty}}} = \sqrt{\frac{1 + \nu_{\infty}^2 \Gamma_1}{\Gamma_3}} \quad (18)$$

令 $D(\Omega)$ 通过R点(如图3(b)所示),即 $D(\Omega_R) = D_{opt}$,得到最优阻尼比 $\zeta_{d\infty 1}$,表达式为:

$$\zeta_{d\infty 1} = \left| \frac{A_2(\Omega_R)}{B_1(\Omega_R)} \right| \sqrt{D_{opt}^2 - \frac{A_1^2(\Omega_R)}{A_2^2(\Omega_R)}} \quad (19)$$

2.2.3 考虑 H_2 范数的最优阻尼比

考虑 $H(i\omega)$ 的 H_2 范数 $I = \sqrt{\int_0^{\infty} |H(i\omega)|^2 d\omega}$,根据滤波表示法,可得:

$$I(\nu, \zeta_d) = \sqrt{\frac{\pi\omega_n}{2\psi_0(\nu)} \left[\frac{\psi_1(\nu)}{\zeta_d} + \psi_2(\nu) \cdot \zeta_d \right]} \quad (20)$$

式中, $\psi_0(\nu)$ 、 $\psi_1(\nu)$ 和 $\psi_2(\nu)$ 为关于频率比 ν 的特征多项式,如下式所示:

$$\begin{cases} \psi_0(\nu) = \gamma'_0[\gamma'_3(\gamma'_1\gamma'_2 - \gamma'_0\gamma'_3) - \gamma'_4(\gamma'_1)^2] \\ \psi_1(\nu) = (\theta'_0)^2(\gamma'_2\gamma'_3 - \gamma'_1\gamma'_4) + \gamma'_0\theta'_2(\gamma'_1\theta'_2 - 2\gamma'_3\theta'_0) \\ \psi_2(\nu) = \gamma'_0\gamma'_3(\theta'_1)^2 \end{cases} \quad (21)$$

根据极值条件 $\frac{\partial I(\nu, \zeta_{dopt})}{\partial \zeta_d} = 0$,可得:

$$\zeta_{dopt}(\nu) = \sqrt{\frac{\psi_1(\nu)}{\psi_2(\nu)}} \quad (22)$$

式中, $\zeta_{dopt}(\nu)$ 表示在特定频率比下 H_2 范数最小的条件最优阻尼比。当 $\nu = \nu_{\infty}$ 时,该方法得到的最优阻尼比记为 $\zeta_{d\infty 2}$,表达式为:

$$\zeta_{d\infty 2} = \zeta_{dopt}(\nu_{\infty}) = \sqrt{\frac{\psi_1(\nu_{\infty})}{\psi_2(\nu_{\infty})}} \quad (23)$$

图3(b)给出了最优频率比 ν_{∞} 下,阻尼比 $\zeta_d = \zeta_{d\infty P}, \zeta_{d\infty Q}, \zeta_{d\infty 0}, \zeta_{d\infty 1}, \zeta_{d\infty 2}$ 的 $D(\Omega)$ 曲线。可以发现,

$\zeta_d = \zeta_{d=2}$ 时, $\Omega \approx 1$ 的 $D(\Omega)$ 值最低, 共振峰值削弱效果最好。

以参数($\mu = 0.01, \beta = 0.05, \kappa = -0.1, \varphi_1 = 1, \varphi_2 = 0$)为例, 图4给出了 H_2 范数关于待定参数(ν, ζ_d)的等值线图。图中虚线表示式(22)计算得到的 $\zeta_{dopt}(\nu)$ 曲线, 采用数值方法求解式(6)得到的 H_2 最优解与基于定点理论最优频率比 ν_∞ 的三种最优阻尼比解析方法得到的解析解在图中用圆点表示。可以发现, 考虑 H_2 范数的最优阻尼比解析方法最为接近 H_2 最优解, 在复杂情况下, 无法求得 H_2 优化解析解, 可用该解析方法近似替代。

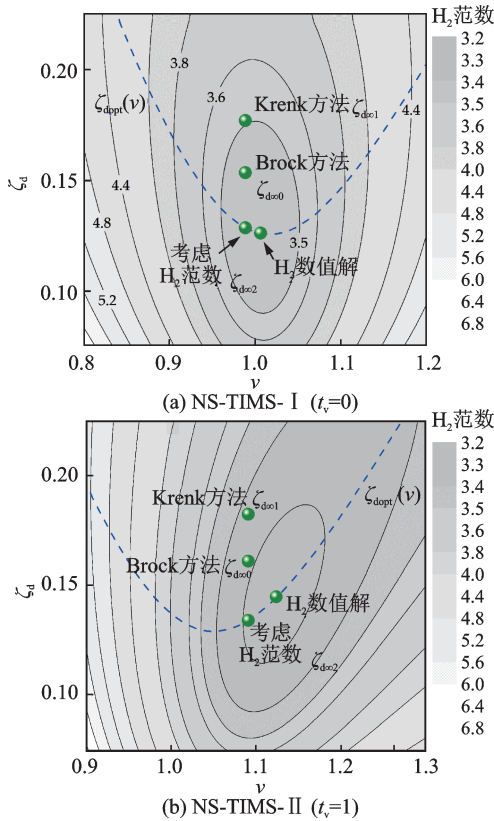


图4 H_2 范数关于待定参数(ν, ζ_d)的等值线图($\mu = 0.01, \beta = 0.05, \kappa = -0.1, \varphi_1 = 1, \varphi_2 = 0$)

Fig. 4 Contour plots of the H_2 norm with respect to underdetermined parameters (ν, ζ_d) ($\mu = 0.01, \beta = 0.05, \kappa = -0.1, \varphi_1 = 1, \varphi_2 = 0$)

图5给出了该算例的 H_2 - H_∞ 范数散点图, 图中, 利用 H_2 - H_∞ 范数最小值的数值解将其归一化。灰色圆圈表示不同待定参数(ν, ζ_d)下的 H_2 - H_∞ 范数散点, 红色曲线表示 H_2 - H_∞ 范数的帕累托前沿线, 其两个端点分别为 H_∞ - H_2 最优数值解。可见, Brock方法得到的解析解与 H_∞ 最优数值解基本重合。考虑 H_2 范数的最优阻尼比解析方法与 H_2 - H_∞ 范数的帕累托前沿线拐点较为接近, 兼顾较优的 H_2 - H_∞ 范数综合指标。因此, 在后文分析中, 重点对最优参数解析解($\nu_\infty, \zeta_{d=2}$)进行讨论。

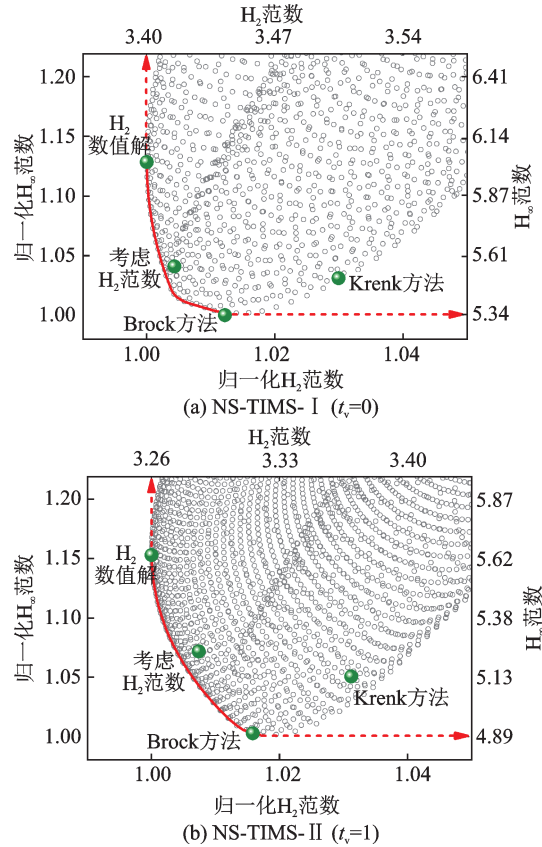


图5 H_2 - H_∞ 范数散点图

Fig. 5 Scatter plots of H_2 - H_∞ norms

3 最优参数设计公式

本节根据前面得到的NS-TIMS最优参数通用解析解(式(11)、(17)、(19)、(23)), 代入不同类型NS-TIMS输入参数, 进行适当简化, 得到最优参数解析公式, 便于工程设计参考。

3.1 忽略质量的情况

惯容和负刚度在减振装置中具有增强耗能的作用, 因此, 含惯容或负刚度的减振系统可采用质量较小的(甚至不使用)吸振质量块。对于这类减振装置, 一般有 $\mu \ll \beta$ 或 $\mu = 0$, 在优化设计时, 可忽略质量。

将该条件代入式(5), 可得:

$$\begin{cases} \Gamma_0 = \beta_e \\ \Gamma_1 = [t_v + (1 - t_v)\kappa] \beta_e \\ \Gamma_2 = 1 + \kappa + \beta_e \\ \Gamma_3 = 1 + (1 - t_v)\beta_e \\ \Theta_0 = 1 + \kappa \\ \Gamma_4 = \Theta_1 = \Theta_2 = 1 \end{cases} \quad (24)$$

式中, β_e 为考虑安装位置的等效惯质比, 表达式为:

$$\beta_e = \beta(\varphi_1 - \varphi_2)^2 \quad (25)$$

由此可见, 当 $\mu = 0$ 时, 传递函数与激励形式 t_e

无关,且 NS-TIMS 的两个连接端无方向性。此时,输入参数仅为 (t_v, β_e, κ) , NS-TIMS 最优参数解析公式如表 1 所示。这里得到的解析解中的 $(\nu_\infty, \zeta_{d\infty 0})$,

当取 $\kappa = 0$ 时,与文献[18, 20]中无负刚度的解析结果一致,验证了理论分析的正确性。最优参数 $(\nu_\infty, \zeta_{d\infty 2})$ 解析解关于 (β_e, κ) 的等值线图如图 6 所示。

表 1 忽略质量的 NS-TIMS 最优参数解析公式 $(\mu = 0)$

Tab. 1 Analytical formulas of optimal parameters for NS-TIMS neglecting the mass $(\mu = 0)$

参数	$t_v = 0$	$t_v = 1$
ν_∞	$\frac{1}{\sqrt{(1 + \beta_e)^2 + \kappa}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta_e + \kappa}}$
$\zeta_{d\infty 0}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta_e [3(1 + \beta_e)(1 + \kappa) - \beta_e \kappa]}{2(1 + \kappa)[(1 + \beta_e)^2 + \kappa] + \beta_e \kappa(2 + \kappa)}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3\beta_e(1 + \kappa)}{2(1 + \kappa)^2 - \beta_e}}$
$\zeta_{d\infty 1}$	$\sqrt{\frac{\beta_e}{2(1 + \kappa + \beta_e)}}$	$\sqrt{\frac{\beta_e}{2(1 + \kappa)}}$
$\zeta_{d\infty 2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta_e [(1 + \beta_e)^2(1 + \kappa) + \beta_e]}{[(1 + \beta_e)^2 + \kappa](1 + \kappa) + \beta_e}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta_e(1 + \kappa)}{(1 + \kappa)^2 - \beta_e}}$

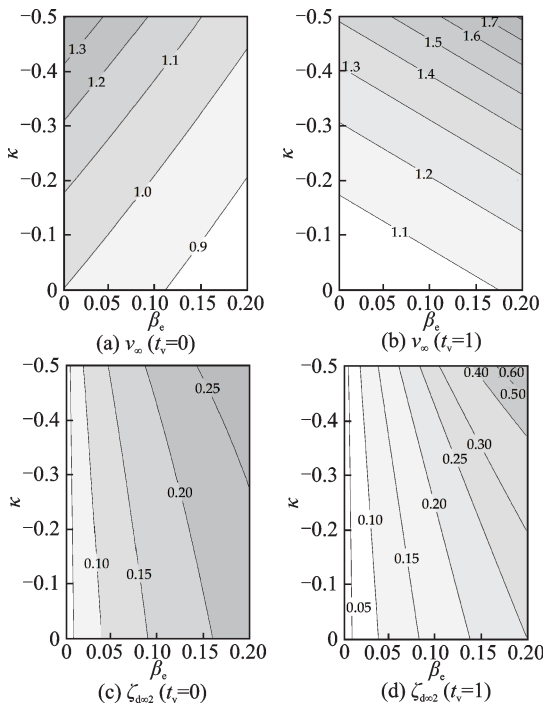


图 6 最优参数 $(\nu_\infty, \zeta_{d\infty 2})$ 解析解关于 (β_e, κ) 的等值线图
Fig. 6 Contour plots of analytical optimal parameters $(\nu_\infty, \zeta_{d\infty 2})$ with respect to (β_e, κ)

3.2 接地型减振系统

当 NS-TIMS 接地安装时,如安装在底层或作为辅助隔振装置,对于这类接地型减振系统,有 $\varphi_2 = 0$ 。将该条件代入式(5),可得:

$$\begin{cases} \Gamma_0 = \mu_e \\ \Gamma_1 = [t_v + (1 - t_v)\kappa] \mu_e \\ \Gamma_2 = 1 + \kappa + \mu_e \\ \Gamma_3 = 1 + (1 - t_v)\mu_e \\ \Theta_0 = (1 + \kappa) + \mu_1 \\ \Theta_1 = 1 + (1 - t_v)\mu_1 \\ \Gamma_4 = \Theta_2 = 1 \end{cases} \quad (26)$$

式中, μ_e 为考虑连接端 1 位置的等效惯性质量比, μ_1 为考虑基础激励与连接端 1 位置的换算质量比,如下式所示:

$$\begin{cases} \mu_e = (\mu + \beta) \varphi_1^2 \\ \mu_1 = t_e \mu \varphi_1 \end{cases} \quad (27)$$

由此可见,当激励类型为荷载激励时, $\mu_1 = 0$, 式(26)与式(24)形式相同,仅用 μ_e 替代 β_e 。当忽略质量时,也与上述情况一致。这是由于基础激励时,加速度激励同样作用在质量块上,而荷载激励时,吸振质量不接受激励作用。辅助隔振装置(见图 1(b))作为一种典型的接地型减振系统,主要考虑基础激励的作用。

表 2 给出了接地型 NS-TIMS 最优参数解析公式,特别地,当激励类型为荷载激励时,解析公式与表 1 中的解析公式形式一致仅用 μ_e 替代 β_e 。这里,解析解中的 $(\nu_\infty, \zeta_{d\infty 0})$,当取 $\kappa = 0$ 时,与文献[20]中无负刚度的解析结果一致;取 $\beta = 0$ 时,与文献[23-24, 26]中得到的负刚度调谐质量减振系统的 H_∞ 优化结果一致;取 $\mu = 0$ 时,与文献[27-28]中得到的负刚度惯容减振系统结果一致,充分验证了解析分析的正确性。

对于基础激励接地型 NS-TIMS,还需要考虑参数 μ_1 的影响。图 7 给出了参数 (μ_e, κ) 相同组合情况下,不同参数 μ_1 对最优参数 $(\nu_\infty, \zeta_{d\infty 2})$ 计算结果的影响。图 7 中比较了 $\mu_1 > 0$ 与 $\mu_1 = 0$ 条件下计算出的最优参数。

进一步统计,采用 $\mu_1 = 0$ 简化替代 $\mu_1 > 0$ 计算最优参数 $(\nu_\infty, \zeta_{d\infty 2})$ 结果的最大偏差如图 8 所示。可见,当 $\mu_1 \leq 0.06$ 时,计算最大偏差绝对值小于 5%。因此,可以对表 2 中考虑基础激励时得到的较复杂的计算公式进行适当简化。

表2 接地型NS-TIMS最优参数解析公式 ($\varphi_2 = 0$)

Tab. 2 Analytical formulas of optimal parameters for NS-TIMS connected to ground ($\varphi_2 = 0$)

类型	参数	通用激励形式 $t_e = 0, 1$	荷载激励 $t_e = 0$
$t_v = 0$	ν_∞	$\sqrt{\frac{2 + \mu_1 - \mu_e \mu_1}{2(1 + \mu_e)^2(1 + \mu_1) + \kappa(2 + \mu_1 - \mu_e \mu_1)}}$	$\sqrt{\frac{1}{(1 + \mu_e)^2 + \kappa}}$
	$\zeta_{d \rightarrow 0}$	$\frac{1}{2} \left\{ \frac{2(1 + \mu_e)(1 + \mu_1)(6\mu_e + 13\mu_e \mu_1 + \mu_e^2 \mu_1 - \mu_1^2 + 5\mu_e \mu_1^2) + \kappa[4\mu_e(3 + 2\mu_e) + 4\mu_e \mu_1(7 + 4\mu_e) - \mu_1^2(2 - 15\mu_e - 4\mu_e^2 + \mu_e^3) - \mu_1^3(1 - \mu_e)^2]}{4(2 + \mu_1 - \mu_e \mu_1)(1 + \mu_e)^2(1 + \mu_1)^2 + \kappa(2 + \mu_1 - \mu_e \mu_1)^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\mu_e[3(1 + \mu_e)(1 + \kappa) - \mu_e \kappa]}{2(1 + \kappa)[(1 + \mu_e)^2 + \kappa] + \mu_e \kappa(2 + \kappa)} \right\}^{\frac{1}{2}}$
	$\zeta_{d \rightarrow 2}$	$\frac{1}{2} \left\{ \frac{(1 + \mu_e)^2(4\mu_e + 2\mu_e \mu_1 - \mu_e \mu_1^2 + \mu_1^2) + \kappa[(1 + \mu_e)^2 \mu_1^2 - 4\mu_e \mu_1(1 - \mu_e) + 4\mu_e(\mu_e^2 + 3\mu_e + 1)]}{\kappa^2(2 + \mu_1 - \mu_e \mu_1) + \kappa(1 + \mu_e)(2 + \mu_1 - \mu_e \mu_1)} \right\}^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_e[(1 + \mu_e)^2(1 + \kappa) + \mu_e]}{[(1 + \mu_e)^2 + \kappa](1 + \kappa) + \mu_e}}$
$t_v = 1$	ν_∞	$\sqrt{\frac{2}{2(1 + \kappa) - 2\mu_e + \mu_1}}$	$\sqrt{\frac{1}{1 - \mu_e + \kappa}}$
	$\zeta_{d \rightarrow 0}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{12\mu_e(1 + \kappa) + 10\mu_e \mu_1 - 2\mu_1^2(1 + \kappa) - \mu_1^3}{2[4(1 + \kappa)^2 + 4\mu_1(1 + \kappa) - 2\mu_e + \mu_1^2]}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3\mu_e(1 + \kappa)}{2(1 + \kappa)^2 - \mu_e}}$
	$\zeta_{d \rightarrow 2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\mu_e - \mu_1^2}{2[2(1 + \kappa) + \mu_1]}}$	$\sqrt{\frac{\mu_e}{2(1 + \kappa)}}$
	$\zeta_{d \rightarrow 2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(4\mu_e + \mu_1^2)(1 + \kappa) + 6\mu_e \mu_1}{2[2(1 + \kappa)^2 + \mu_1(1 + \kappa) - 2\mu_e]}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_e(1 + \kappa)}{(1 + \kappa)^2 - \mu_e}}$

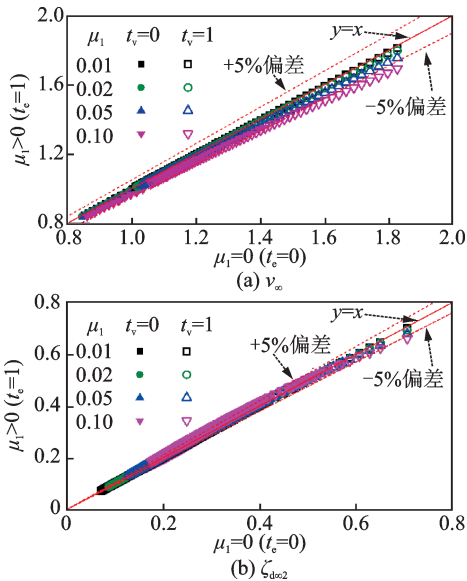


图7 不同参数 μ_1 下的最优参数 ($\nu_\infty, \zeta_{d \rightarrow 2}$) 计算结果
Fig. 7 Calculated results of optimal parameters ($\nu_\infty, \zeta_{d \rightarrow 2}$) under different parameters μ_1

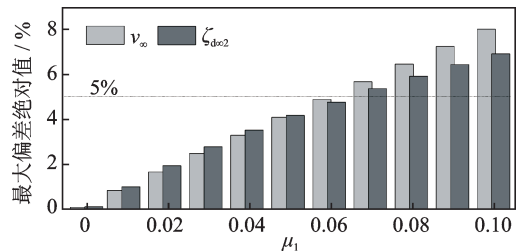


图8 采用 $\mu_1 = 0$ 简化计算最优参数 ($\nu_\infty, \zeta_{d \rightarrow 2}$) 的最大偏差
Fig. 8 Maximum errors in calculating optimal parameters ($\nu_\infty, \zeta_{d \rightarrow 2}$) with the simplification of $\mu_1 = 0$

示。根据上述思路,综合式(25)和(27),对于一般情况的NS-TIMS,等效惯质比 δ 定义为:

$$\delta = \delta_m + \delta_b = \mu \varphi_1^2 + \beta(\varphi_1 - \varphi_2)^2 \quad (28)$$

式中, $\delta_m = \mu \varphi_1^2$ 为质量块提供的有效惯质比; $\delta_b = \beta(\varphi_1 - \varphi_2)^2$ 为惯容器提供的有效惯质比。可以发现,当 $\mu = 0$ 时, δ 与式(25)所表示的 β_e 相等;当 $\varphi_2 = 0$ 时, δ 与式(27)所表示的 μ_e 相等。

最优参数的解析近似解表示为:

$$\nu_{opt} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{(1 + \delta)^2 + \kappa}}, & t_v = 0 \\ \sqrt{\frac{1}{1 - \delta + \kappa}}, & t_v = 1 \end{cases} \quad (29)$$

3.3 基于等效惯质比的设计公式

通过前面两种特殊情形的分析,发现可对复杂计算公式在一定情况下进行适当简化。利用等效惯质比的概念,将质量块和惯容器的作用进行统一表

$$\zeta_{\text{dopt}} = \begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\delta [(1+\delta)^2(1+\kappa)+\delta]}{[(1+\delta)^2+\kappa](1+\kappa)+\delta}}, & t_v = 0 \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\delta(1+\kappa)}{(1+\kappa)^2-\delta}}, & t_v = 1 \end{cases} \quad (30)$$

为确定最优参数设计公式(式(29)和(30))的适用条件,对NS-TIMS进行参数化分析。考虑 μ 和 β 在 $[0.001, 0.20]$ 区间变化,间隔为0.01; φ_1 和 φ_2 在 $[0.01, 1.0]$ 区间变化,间隔为0.1; κ 在 $[-0.5, 0]$ 区间变化,间隔为0.1;共计166400个计算工况。比较设计公式与解析解得到的最优 H_2 范数的误差,统计如图9所示。可以发现,误差随比例系数 R_δ 变化较为显著, R_δ 定义为 δ_b 与 δ_m 之比,如下所示:

$$R_\delta = \frac{\delta_b}{\delta_m} = \frac{\beta(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{\mu\varphi_1^2} \quad (31)$$

由图9可以看出, R_δ 越大,惯容器提供的有效惯质比占总等效惯质比的比例越大,设计公式误差越小。总体看来,设计公式对NS-TIMS-I型($t_v = 0$)误差优于NS-TIMS-II型($t_v = 1$)。经统计,当 $t_v = 0$ 时, $R_\delta \geq 0.3$ 可使误差控制在10%以内, $R_\delta \geq 0.4$ 误差不超过5%。对于 $t_v = 1$ 时, $R_\delta \geq 0.5$ 可使误差在10%以内, $R_\delta \geq 1.0$ 误差不超过5%。

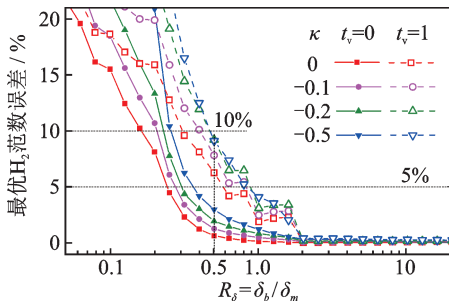


图9 设计公式得到的最优 H_2 范数的误差随 R_δ 的变化
Fig. 9 Variation of errors of optimal H_2 norms obtained by design formulas with R_δ

图10给出了解析分析得到的最优参数精确解与设计公式得到(式(29)和(30))的近似解的对比。图10中,对 $t_v = 0$ 取 $R_\delta \geq 0.4$,对 $t_v = 1$ 取 $R_\delta \geq 1.0$,使得最优 H_2 范数的误差在5%以内。由图10可以看出,在绝大多数情况下,解析解与近似解吻合较好。而在一些 R_δ 较小的工况会观察到一些偏差,尤其是当 $\kappa = -0.5$ 时较为显著,这些偏差是误差的主要来源。随着 R_δ 的增大,精确解的散点逼近设计公式的曲线。

由于负刚度对振动系统的整体稳定性具有一定影响,为保障系统的静力稳定性,需要保证 $0 <$

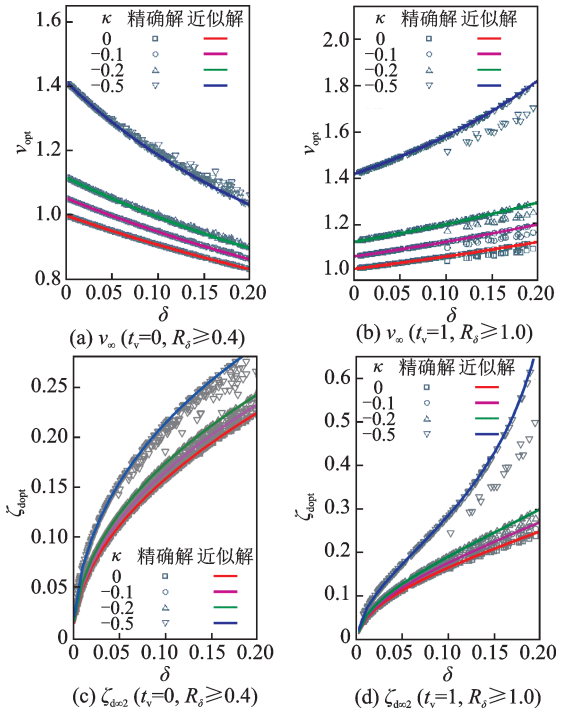


图10 解析分析精确解与设计公式得到的近似解的对比
Fig. 10 Comparisons of analytical exact solutions and approximation solutions obtained by design formulas

$H(0) < \infty$,从而得到 κ 的适用范围如下:

$$\kappa > -\frac{1}{1 + \nu^2(\mu + \beta)(\varphi_1 - \varphi_2)^2} \quad (32)$$

4 减振(震)分析算例

前文的解析分析忽略结构阻尼比的影响,也未考虑实际随机灾害荷载的频谱特性。本节给出了实际结构利用NS-TIMS的风振和地震响应减振设计算例,以评估减振效果。

4.1 高耸结构风振控制算例

本节以拟建在某台风区270 m高混凝土烟囱的风振控制^[31]为案例,验证NS-TIMS在高柔结构吸振中的设计公式的有效性,并评估其减振效果。该烟囱主结构的平均外径为 $D = 25.34$ m,一阶自振频率为 $\omega_n = 2.48$ rad/s,阻尼比为 $\zeta_n = 1.5\%$ 。

结构风振控制选取的NS-TIMS基本参数为,质量比 $\mu = 0.03$,惯质比 $\beta = 0.20$,负刚度比 $\kappa = -0.25$ 。连接在 $z_1 = 250$ m和 $z_2 = 200$ m的两个检修平台间,分别对应 $\varphi_1 = 0.87$, $\varphi_2 = 0.54$ 。根据本文设计公式(29)和(30),NS-TIMS-I最优参数为 $\nu_{\text{opt}} = 1.091$, $\zeta_{\text{dopt}} = 0.120$;NS-TIMS-II最优参数为 $\nu_{\text{opt}} = 1.191$, $\zeta_{\text{dopt}} = 0.127$ 。

高耸烟囱的风振响应包括顺风向和横风向响

应,顺风向响应主要为湍流脉动风荷载引起的随机振动,横风向响应主要由旋涡脱落激励。当特定的风速使得旋涡脱落频率与结构频率接近,可能产生涡激共振,此时的风速称为临界风速。根据风洞试验结果,该结构风振响应由横风向涡激共振控制,一阶涡激共振时的临界风速为 $U_{cr} = 49.4 \text{ m/s}$,一般低于台风区设计风速,而二阶涡激共振临界风速为 197.4 m/s ,远高于实际可能的设计风速,因此,此处仅考虑一阶涡激共振的影响。涡激共振时,考虑气动负阻尼,结构振动总阻尼比为 0.5% 。结构风荷载归一化功率谱表示为:

$$\frac{S_w(\omega)}{\sigma_w^2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\rho_w \Lambda_w^2 / \omega_w}{[\Lambda_w^2 - (\omega/\omega_w)^2]^2 + (\rho_w \omega/\omega_w)^2} \quad (33)$$

式中, $S_w(\omega)$ 为风荷载功率谱; σ_w 为脉动风荷载均方根; ω_w 为风荷载特征频率,涡激共振时与结构一阶自振频率相同; Λ_w 为无量纲谱矩参数,根据风洞试验结果,为 1.02 ; 参数 $\rho_w = \sqrt{(\Lambda_w^2 + 1)^2 - 4}$ 。

将风振控制性能指标 J_w 定义为控制后与无控制风振响应均方根(分别为 σ_x 与 σ_{x_0})之比,如下式所示:

$$J_w = \frac{\sigma_x}{\sigma_{x_0}} = \frac{\sqrt{\int_0^\infty S_w(\omega) |H(i\omega)|^2 d\omega}}{\sqrt{\int_0^\infty S_w(\omega) |H_0(i\omega)|^2 d\omega}} \quad (34)$$

式中, $H_0(i\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega^2 + 2\zeta_n \omega_n i\omega + \omega_n^2}$ 为未控制时的结构无量纲频响函数。

$J_w(\nu, \zeta_d)$ 的等值线图及参数最优解如图 11 所示。利用数值优化方法,得到基于 J_w 的最优参数数值解与本文设计公式结果的对比,如表 3 所示。可见,利用本文设计公式得到的最优参数与数值最优解结果较为接近,且最优风振控制性能指标误差不超过 3% 。

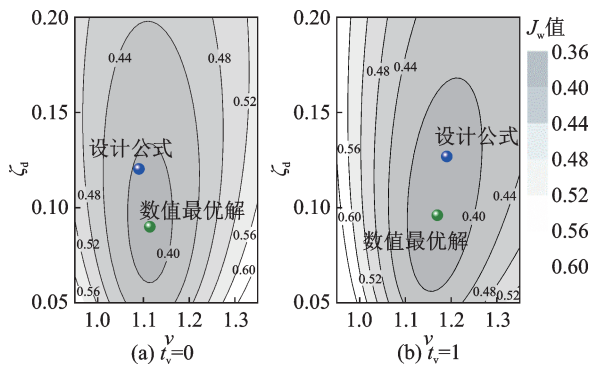


图 11 风振控制性能指标 $J_w(\nu, \zeta_d)$ 的等值线图及参数最优解

Fig. 11 Contour plots of wind-induced vibration performance index $J_w(\nu, \zeta_d)$ and the optimal parameters

表 3 基于风振控制性能指标 J_w 的最优参数数值解与本文设计公式结果的对比

Tab. 3 Comparisons of numerical optimization results based on wind-induced vibration performance index J_w with presented analytical results of design formula

类型	参数	数值最优解	设计公式	相对误差/%
$t_v = 0$	ν	1.114	1.091	—
	ζ_d	0.090	0.120	—
	J_w	0.3858	0.3958	2.59
$t_v = 1$	ν	1.170	1.191	—
	ζ_d	0.096	0.127	—
	J_w	0.3761	0.3826	1.73

为进一步考察 NS-TIMS 风振控制效果,将参数优化设计后的 NS-TIMS 安装在结构上,采用多自由度结构的时程分析方法,计算不同设计风速下无控制结构和 NS-TIMS 控制下的最不利风致响应 X ,按照设计规范^[32],定义为:

$$X = \max \{ \hat{x}_a, \sqrt{\bar{x}_a^2 + \hat{x}_c} \} \quad (35)$$

式中, \bar{x}_a 和 \hat{x}_a 分别表示顺风向响应的平均值和极值; \hat{x}_c 表示横风向响应的极值。

无量纲最不利风致响应 X/D 结果如图 12 所示。由图 12 可见,NS-TIMS 不仅可有效降低结构涡激振动响应($1.0 \leq U/U_{cr} \leq 1.5$),还能有效控制高速的脉动风响应($U/U_{cr} > 2.0$),参数优化设计后的 NS-TIMS-I 型和 II 型控制最优性能接近,设计时可根据构造安装情况进行合理选型。

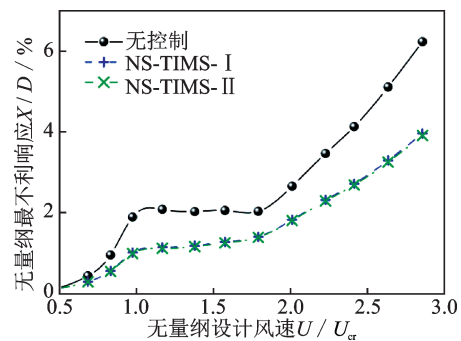


图 12 不同设计风速下的无量纲最不利风致响应
Fig. 12 The most unfavorable dimensionless wind-induced response under different design wind speeds

4.2 基础隔振算例

本节以某钢结构厂房结构基础隔振为例^[33],评估 NS-TIMS 对基础隔振层中的减振效果。该厂房上部结构可简化为单自由度结构,重量为 290 t ,自振频率为 12.5 rad/s ,阻尼比为 2% 。隔振层重量为

50 t,刚度为 3352.3 kN/m,阻尼为 213.52 kN·s/m,隔振系统频率 $\omega_n = 3.14$ rad/s,阻尼比 $\zeta_n = 10.0\%$ 。

NS-TIMS 辅助隔振装置选取的基本参数为质量比 $\mu = 0.05$,惯质比 $\beta = 0.30$,负刚度比 $\kappa = -0.1$ 。根据本文设计公式(29)和(30),NS-TIMS-I 最优参数为 $\nu_{opt} = 0.762$, $\zeta_{dopt} = 0.305$;NS-TIMS-II 最优参数为 $\nu_{opt} = 1.348$, $\zeta_{dopt} = 0.414$ 。

以 2023 年 2 月 6 日土耳其 7.8 级地震 3123 台站的 EW 向地震动记录为输入^[34](如图 13(a)所示),进行地震响应算例分析,得到隔振层对地位移时程和上部结构变形时程,分别如图 13(b)和(c)所示。

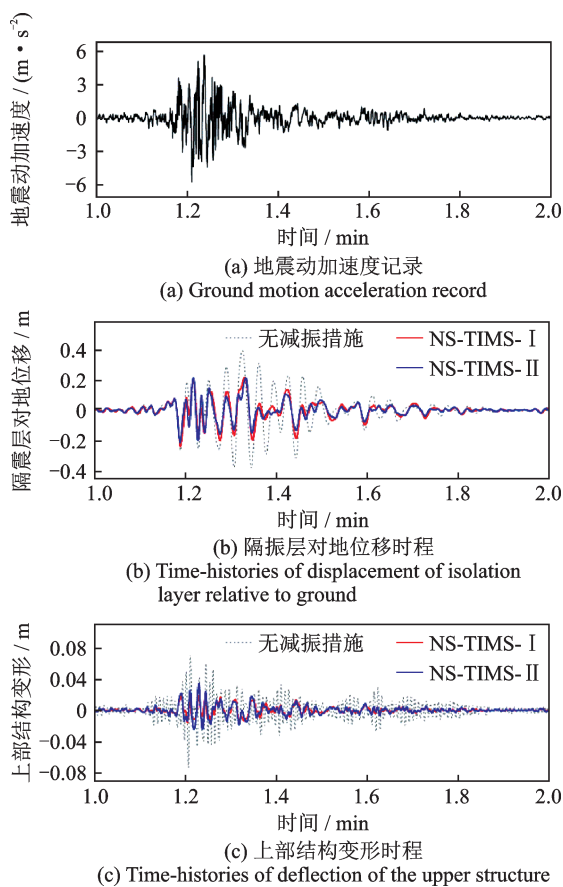


图 13 地震响应控制分析算例

Fig. 13 A case study of seismic-induced vibration response control analysis

对地震响应控制算例分析结果进行统计,得到隔振层及上部结构变形最大值 Δ 和减振率 η ,如表 4 所示。减振率 η 的计算式为:

$$\eta = \frac{\Delta_1 - \Delta_0}{\Delta_0} \times 100\% \quad (36)$$

式中, Δ_0 和 Δ_1 分别表示未采用 NS-TIMS 减振措施和采用 NS-TIMS 后的最大变形值。

由表 4 可知,总体上,NS-TIMS 能够在保证上部结构变形较小的同时有效降低隔振层变形。

表 4 隔振层及上部结构变形最大值和减振率

Tab. 4 The maximum deflections and seismic-induced vibration reduction rates of the isolation layer and the upper structure

位置	减振措施	最大变形/m	减振率/%
隔振层	无减振措施	0.3926	—
	NS-TIMS-I	0.2389	39.1
	NS-TIMS-II	0.2138	45.5
上部结构	无减振措施	0.0741	—
	NS-TIMS-I	0.0192	74.1
	NS-TIMS-II	0.0343	53.7

NS-TIMS-II 对隔振层振动变形控制效果优于 NS-TIMS-I,而 NS-TIMS-I 在保护上部结构方面的效果明显优于 NS-TIMS-II。

5 结论

惯容器和负刚度装置能够增强减振器的耗能,是新型高性能减振装置的重要组成元件。调谐参数优化设计是这类减振装置设计中的重点和难点。本文推导了含负刚度的调谐惯容质量减振系统(NS-TIMS)最优参数解析解,并通过合理简化得到了较为简洁的参数优化设计公式,以便工程设计参考。得到如下结论:

(1) 考虑不同安装位置和应用场景(吸振、隔振),建立了两类结构形式的 NS-TIMS 在荷载和基础激励下的响应传递函数统一模型。该模型可以通过固定不同参数,兼容表示多种现有减振装置,便于统一解析表示各类减振装置的参数优化设计以及动力响应。

(2) 在传统定点理论的基础上推导得到了综合考虑 H_{∞} 和 H_2 范数的 NS-TIMS 最优参数解析解,与传统方法得到的最优参数解相比,该解析解更加接近 H_2 - H_{∞} 范数的帕累托前沿拐点,兼顾较优的 H_2 、 H_{∞} 范数综合指标。

(3) 基于最优参数解析解,考虑实际应用条件,对解析公式高阶项进行适当简化,提出基于“等效惯质比”的 NS-TIMS 最优参数设计公式。讨论了简化设计公式的适用条件,发现当惯容器提供的有效惯质比占总等效惯质比超过一半时,设计公式估计得到的最优参数控制性能与解析解相比误差不超过 5%。

(4) 通过风振控制和基础隔振实际算例分析,验证了考虑实际结构阻尼比和随机荷载频谱特性条件下本文提出的设计公式的有效性。并发现,两类

NS-TIMS 在高柔结构风振控制的性能较为接近。对于辅助基础隔振, NS-TIMS-II 型减振器对隔振层振动变形控制效果较好, 而 NS-TIMS-I 型在保护上部结构方面的效果较优。

(5) 本研究得到的解析优化公式是基于广义单自由度运动方程得到的, 适用于以一阶振动为主导的结构振动控制, 对于更为复杂的高阶多模态振动控制, 还需进一步深入研究。

参考文献:

- [1] FRAHM H. Device for damping vibrations of bodies; US19090525455[P]. 1911-04-18.
- [2] ORMONDROYD J, DEN HARTOG J P. The theory of the dynamic vibration absorber[J]. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1928, 49-50(2): 021007.
- [3] DEN HARTOG J P. Mechanical Vibrations[M]. New York: Dover Publications, 1985.
- [4] BROCK J E. A note on the damped vibration absorber [J]. Journal of Applied Mechanics, 1946, 13(4): A248.
- [5] ASAMI T, NISHIHARA O, BAZ A M. Analytical solutions to H_{∞} and H_2 optimization of dynamic vibration absorbers attached to damped linear systems[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2002, 124(2): 284-295.
- [6] KRENK S. Frequency analysis of the tuned mass damper [J]. Journal of Applied Mechanics, 2005, 72(6): 936-942.
- [7] 周暄毅, 林勇建, 顾明. 大跨屋盖结构 MTMD 风振控制最优性能研究[J]. 振动工程学报, 2015, 28(2): 277-284.
ZHOU Xuanyi, LIN Yongjian, GU Ming. Optimum properties of MTMD for large-span roof subjected to wind loads[J]. Journal of Vibration Engineering, 2015, 28(2): 277-284.
- [8] 王浩, 邹仲钦, 茅建校, 等. 基于压重块型 TMD 的大跨度斜拉桥减震控制[J]. 振动工程学报, 2018, 31(3): 391-398.
WANG Hao, ZOU Zhongqin, MAO Jianxiao, et al. Seismic control of a long-span cable-stayed bridge using TMD-type counterweight[J]. Journal of Vibration Engineering, 2018, 31(3): 391-398.
- [9] KAWAMATA S. Development of a vibration control system of structures by means of mass pumps[D]. Tokyo: University of Tokyo, 1973.
- [10] SMITH M C. Synthesis of mechanical networks: the inerter[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(10): 1648-1662.
- [11] 张瑞甫, 吴敏君, 潘超. 对惯容减震系统基本概念及设计范式的讨论[J]. 振动工程学报, 2024, 37(11): 1848-1861.
ZHANG Ruifu, WU Minjun, PAN Chao. Discussion on the basic concept and design paradigm of inerter system[J]. Journal of Vibration Engineering, 2024, 37(11): 1848-1861.
- [12] 张瑞甫, 曹嫣如, 潘超. 惯容减震(振)系统及其研究进展[J]. 工程力学, 2019, 36(10): 8-27.
ZHANG Ruifu, CAO Yanru, PAN Chao. Inerter system and its state-of-the-art[J]. Engineering Mechanics, 2019, 36(10): 8-27.
- [13] MA R S, BI K M, HAO H. Inerter-based structural vibration control: a state-of-the-art review[J]. Engineering Structures, 2021, 243: 112655.
- [14] IKAGO K, SAITO K, INOUE N. Seismic control of single-degree-of-freedom structure using tuned viscous mass damper[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2012, 41(3): 453-474.
- [15] LAZAR I F, NEILD S A, WAGG D J. Using an inerter-based device for structural vibration suppression[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2014, 43(8): 1129-1147.
- [16] MARIAN L, GIARALIS A. Optimal design of a novel tuned mass-damper-inerter (TMDI) passive vibration control configuration for stochastically support-excited structural systems[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2014, 38: 156-164.
- [17] REN M Z. A variant design of the dynamic vibration absorber[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 245(4): 762-770.
- [18] 李亚峰, 李寿英, 陈政清. 变化型惯质调谐质量阻尼器的优化与性能评价[J]. 振动工程学报, 2020, 33(5): 877-884.
LI Yafeng, LI Shouying, CHEN Zhengqing. Optimization and performance evaluation of variant tuned mass damper inerter[J]. Journal of Vibration Engineering, 2020, 33(5): 877-884.
- [19] ZHAO Z P, CHEN Q J, ZHANG R F, et al. Energy dissipation mechanism of inerter systems[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2020, 184: 105845.
- [20] 苏宁, 张杰, 洪宁宁, 等. 广义变式惯容动力吸振器的 H_{∞} 和 H_2 解析优化[J]. 振动与冲击, 2023, 42(9): 47-56.
SU Ning, ZHANG Jie, HONG Ningning, et al. H_{∞} and H_2 optimization solutions to generalized variant inerter-enhanced DVA[J]. Journal of Vibration and Shock, 2023, 42(9): 47-56.
- [21] WANG M, SUN F F, NAGARAJIAH S, et al. Fre-

- quency-dependency/independency analysis of damping magnification effect provided by tuned inerter absorber and negative stiffness amplifying damper considering soil-structure interaction[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, 172: 108965.
- [22] ZHAO Z P, CHEN Q J, HU X Y, et al. Enhanced energy dissipation benefit of negative stiffness amplifying dampers[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2023, 240: 107934.
- [23] 彭海波, 申永军, 杨绍普. 一种含负刚度元件的新型动力吸振器的参数优化[J]. *力学学报*, 2015, 47(2): 320-327.
PENG Haibo, SHEN Yongjun, YANG Shaopu. Parameters optimization of a new type of dynamic vibration absorber with negative stiffness[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015, 47(2): 320-327.
- [24] 张宇璇. 基于负刚度的调谐质量阻尼器优化研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2019.
ZHANG Yuxuan. Optimized study of tuned mass damper with negative stiffness device[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2019.
- [25] KAPASAKALIS K A, ANTONIADIS I A, SAPOUNTZAKIS E J. Performance assessment of the KDamper as a seismic absorption base[J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2020, 27(4): e2482.
- [26] WANG X R, HE T, SHEN Y J, et al. Parameters optimization and performance evaluation for the novel inerter-based dynamic vibration absorbers with negative stiffness[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, 463: 114941.
- [27] WANG H, GAO H, LI J, et al. Optimum design and performance evaluation of the tuned inerter-negative-stiffness damper for seismic protection of single-degree-of-freedom structures [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2021, 212: 106805.
- [28] GAO H, XING C X, WANG H, et al. Performance improvement and demand-oriented optimum design of the tuned negative stiffness inerter damper for base-isolated structures[J]. *Journal of Building Engineering*, 2023, 63: 105488.
- [29] 王珏, 张莹, 黄慷, 等. 位移激励下含负刚度的惯容减振系统参数优化解析研究[J]. *振动工程学报*, 2023, 36(3): 804-814.
WANG Jue, ZHANG Ying, HUANG Su, et al. Analytical study on optimal inerter vibration absorbers with negative stiffness under displacement excitations[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2023, 36(3): 804-814.
- [30] SU N, BIAN J, PENG S T, et al. Analytical optimal design of inerter-based vibration absorbers with negative stiffness balancing static amplification and dynamic reduction effects[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2023, 192: 110235.
- [31] 苏宁, 彭士涛, 洪宁宁. 高耸烟囱结构调谐质量惯容阻尼器(TMDI)风振控制方法及效果研究[J]. *工程力学*, 2022, 39(11): 143-156.
SU Ning, PENG Shitao, HONG Ningning. The wind-induced vibration control of high-rise chimneys by a tuned mass damper inerter (TMDI)[J]. *Engineering Mechanics*, 2022, 39(11): 143-156.
- [32] 中华人民共和国住房和城乡建设部. 烟囱工程技术标准: GB/T 50051—2021[S]. 北京: 中国计划出版社, 2021.
MOHURD. Technical standard for chimney engineering: GB/T 50051—2021[S]. Beijing: China Planning Press, 2021.
- [33] DI MATTEO A, MASNATA C, PIRROTTA A. Simplified analytical solution for the optimal design of Tuned Mass Damper Inerter for base isolated structures[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 134: 106337.
- [34] SU N, BIAN J, CHEN Z Q, et al. A novel lever-type inerter-based vibration absorber[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2023, 254: 108440.
-
- 第一作者: 苏宁(1990—),男,博士,副教授。
E-mail: souvenire@126.com
- 通信作者: 陈昭庆(1980—),男,博士,副教授。
E-mail: chenzhq2004@163.com