

# FGP 梁非线性振动的谱几何-增量谐波平衡解法

钟 锐<sup>1,2</sup>, 王瑞华<sup>1,2</sup>, 王青山<sup>1,2</sup>

(1. 中南大学机电工程学院, 湖南长沙 410083;

2. 中南大学极端服役性能精准制造全国重点实验室, 湖南长沙 410083)

**摘要:** 针对含几何非线性因素的功能梯度多孔(FGP)梁动力学问题, 提出一种谱几何-增量谐波平衡法(SGM-IHBM)研究其非线性振动特性。根据 von Karman 理论获得梁结构的几何非线性应变-位移关系, 基于 Timoshenko 理论推导 FGP 梁的拉格朗日能量泛函。使用谱几何级数表征梁结构的各位移分量, 并引入线性模态分量建立 FGP 梁的非线性降阶方程, 进而采用增量谐波平衡(IHB)法追踪 FGP 梁降阶模型的动力学响应解。通过 SGM-IHBM 解与文献解的对比验证了本文非线性模型的正确性, 进而分析了孔隙率、厚度、激励幅值等对 FGP 梁非线性振动特性的影响。

**关键词:** 非线性振动; FGP 梁; 谱几何; 增量谐波平衡法

**中图分类号:** O322 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2025)04-0731-08

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2025.04.008

## Spectral geometry-incremental harmonic balance solutions for nonlinear vibrations of FGP beams

ZHONG Rui<sup>1,2</sup>, WANG Ruihua<sup>1,2</sup>, WANG Qingshan<sup>1,2</sup>

(1. College of Mechanical and Electrical Engineering, Central South University, Changsha 410083, China;

2. State Key Laboratory of Precision Manufacturing for Extreme Service Performance, Central South University, Changsha 410083, China)

**Abstract:** A spectral geometry-incremental harmonic balance method (SGM-IHBM) is proposed to study the nonlinear vibration characteristics of functionally graded porous (FGP) beams with geometric nonlinearities. The geometrically nonlinear strain-displacement relationship of the beam structure is obtained according to the Von-Karman theory, and the Lagrange energy function of the FGP beam is derived based on the Timoshenko theory. The spectral geometric series are used to characterize each displacement component of the beam structure, and the linear modal components are introduced to establish the nonlinear reduced-order equations of the FGP beams, and then the incremental harmonic balance (IHB) method is used to trace the dynamical response solution of the reduced-order model of the FGP beams. The correctness of the nonlinear model in this paper is verified by comparing the SGM-IHBM solution with the literature solution, and then the effects of porosity, thickness, and excitation amplitude on the nonlinear vibration characteristics of FGP beams are analyzed.

**Keywords:** nonlinear vibration; FGP beam; spectral geometry; incremental harmonic balance method

功能梯度多孔(FGP)材料以其独特的优势在航空航天、船舶交通、医疗器械等领域获得了广泛应用。与常规均质材料相比, FGP 材料具有重量轻、强度高、抗冲击、可设计性好等优点, 这使得 FGP 材料成为梁类工程结构的理想材料之一。在实际服役过程中, 梁结构通常承受复杂动态载荷作用, 而产生大幅非线性振动, 使其服役可靠性降低。因此, 从物

理本质上研究 FGP 梁的非线性动力学特性, 对此类结构的动力学环境适应性设计、评估等具有重要的参考价值。

近年来, 随着理论研究的深入和设计标准的提高, FGP 梁的非线性振动研究成为学者们关注的焦点之一。基于 Timoshenko 梁理论和微分变换法, 滕兆春等<sup>[1]</sup>推导了功能梯度多孔梁的非线性微分方

**收稿日期:** 2023-09-20; **修订日期:** 2023-11-10

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(52075554); 中南大学中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(2021zzts0138); 湖南省研究生科研创新项目(CX20210214)

程,并探讨了孔隙分布类型、梯度等对结构非线性频率的影响。蒲刚等<sup>[2]</sup>采用修正偶应力理论和假设模态法建立了夹层楔形功能梯度多孔梁的动力学模型,并研究了该类结构的非线性频率及时域响应特性。考虑气热效应与几何非线性因素,周凯等<sup>[3]</sup>采用 Newmark 法结合牛顿迭代算法研究了多孔功能梯度梁的非线性气弹性动力学问题。CHEN 等<sup>[4]</sup>研究了功能梯度石墨烯增强多孔纳米复合梁的非线性频率特性及后屈曲行为。考虑孔隙分布和外部几何缺陷,ZHANG 等<sup>[5]</sup>讨论了热环境中双向功能梯度梁的非线性振动和屈曲问题。

谱几何法是近十几年来发展的结构动力学建模方法,其在结构线性振动问题的应用研究已较为充分。鲍四元等<sup>[6]</sup>采用谱几何法研究了弹性边界条件下连续多段梁的自由振动问题。李海虹等<sup>[7]</sup>综合考虑了梁的横向、纵向和扭转振动,采用谱几何法分析了任意约束边界下梁的振动特性。增量谐波平衡方法结合了增量迭代法与谐波平衡法的特点,具有算法收敛精度控制灵活的优点,是目前求解强/弱非线性问题较为常用的方法之一<sup>[8-9]</sup>。赵倩等<sup>[10]</sup>通过与 Newmark- $\beta$  方法的比较,验证了 IHB 方法在求解 Bouc-Wen 滞回力-悬臂梁系统非线性动力学响应时具有精度和效率优势。黄建亮等<sup>[11]</sup>应用 IHB 方法和 Floquet 理论,对两端固定的梁结构在不同屈曲程度下的非线性振动响应进行了稳定性和分岔分析。

研究发现,目前关于 FGP 梁非线性振动问题的研究主要聚焦于非线性自由振动及时域响应,关于非线性幅频响应特性的研究鲜有报道。此外,谱几何法在梁、板、壳等结构线性动力学问题的研究已较为丰富,但关于非线性动力学问题的研究尚未见报道,作者此前通过对板壳耦合系统<sup>[12-13]</sup>线性动力学问题的研究发现,谱几何法具有收敛性好、便于参数化分析等优点,具备向非线性问题拓展的数值潜力。因此,本文结合谱几何法与增量谐波平衡法的各自特点,以 FGP 梁为研究对象,提出谱几何-增量谐波平衡解法,建立 FGP 梁结构非线性动力学模型,并以文献解为依据验证 SGM-IHBM 模型的正确性,进而探讨厚度、孔隙参数等对 FGP 梁非线性振动特性的影响。

## 1 理论推导

### 1.1 FGP 梁模型描述

如图 1 所示,FGP 梁两端分别受两个线性边界弹簧( $k_u, k_w$ )和一个旋转边界弹簧( $k_\varphi$ )约束,用以模

拟不同的边界条件。梁的几何特征可以通过其在  $x, y$  和  $z$  方向上的长  $L$ 、宽  $b$  和厚度  $h$  描述。符号  $u$  和  $w$  分别表示中面上任意一点在  $x$  和  $z$  方向上的位移分量,符号  $\varphi$  则表示转角分量。

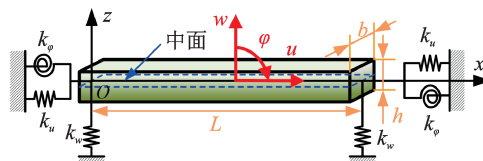


图 1 FGP 梁结构示意图

Fig. 1 Schematic diagram of FGP beam structure

本文采用对称分布的 FGP 材料模型,其材料性能沿厚度方向呈现连续的余弦梯度变化。如图 2 所示,弹性模量、剪切模量和密度的最大值( $E_{\max}, G_{\max}, \rho_{\max}$ )出现在 FGP 梁的顶面和底面,而最小值( $E_{\min}, G_{\min}, \rho_{\min}$ )出现在中面。根据参考文献<sup>[14]</sup>,该材料模型表达式为:

$$\begin{cases} E(z) = E_{\max} \left[ 1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \\ G(z) = G_{\max} \left[ 1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \\ \rho(z) = \rho_{\max} \left[ 1 - e_m \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \end{cases} \quad (1)$$

式中,孔隙参数  $e_0$  和质量密度系数  $e_m$  的表达式及两者间的关系式如下<sup>[14]</sup>:

$$e_m = 1 - \sqrt{1 - e_0} \quad (2)$$

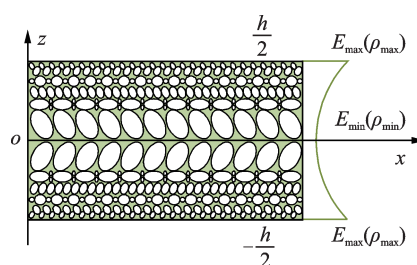


图 2 对称分布 FGP 材料模型

Fig. 2 Model of symmetric distributed FGP material

### 1.2 FGP 梁非线性能量方程

基于 Timoshenko 梁理论,FGP 梁中任意一点的位移分量  $U$  和  $W$  可以表示为:

$$U = u + z\varphi, \quad W = w \quad (3)$$

根据 von Karman 理论,FGP 梁的法向应变  $\epsilon_x$  和剪切应变  $\gamma_{xz}$  可以表示为:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \gamma_{xz} = \varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4)$$

FGP 梁的正应力  $\sigma_x$  和剪应力  $\tau_{xz}$  方程如下:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}(z) & 0 \\ 0 & \kappa_s Q_{66}(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

式中,  $\kappa_s=5/6$  表示剪切修正系数;弹性常数  $Q_{11}(z)$  和  $Q_{66}(z)$  为厚度坐标  $z$  的函数,其表达式如下:

$$Q_{11}(z) = \frac{E(z)}{1 - \mu^2(z)}, Q_{66}(z) = \frac{E(z)}{2[1 + \mu(z)]} \quad (6)$$

式中,  $\mu(z)$  为材料的泊松比。

FGP梁的动能  $T_t$  表达式为:

$$T_t = \frac{b}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] dz dx \quad (7)$$

根据已建立的应力-应变关系,可以确定FGP梁的应变能  $U_s$  表达式:

$$U_s = \frac{b}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_x \gamma_{xz}) dz dx \quad (8)$$

如前所述,FGP梁的边界条件通过设置合适的边界弹簧刚度获得,此时梁的边界势能考虑为:

$$U_B = \frac{b}{2} \left[ (k_{u,0} u^2 + k_{w,0} w^2 + k_{\varphi,0} \varphi^2) \Big|_{x=0} + (k_{u,L} u^2 + k_{w,L} w^2 + k_{\varphi,L} \varphi^2) \Big|_{x=L} \right] \quad (9)$$

此外,施加于FGP梁上的外部载荷  $f_x$ 、 $f_w$  和  $f_\varphi$  所做的功  $W_f$  为:

$$W_f = \int_0^L (f_x u + f_w w + f_\varphi \varphi) dx \quad (10)$$

根据式(7)~(10),FGP梁在外部荷载作用下的整体能量泛函  $r$  可以表示为:

$$r = T_t - U_s - U_B + W_f \quad (11)$$

### 1.3 谱几何降阶模型

基于谱几何法,FGP梁的位移函数可以表示为:

$$[u, w, \varphi] = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ [q_m^u(t), q_m^w(t), q_m^\varphi(t)] \psi_m(x) \right\} \quad (12)$$

式中,  $q_m^u$ 、 $q_m^w$  和  $q_m^\varphi$  为未知级数展开系数,其中  $m$  为正整数,而谱几何级数  $\psi_m(x)$  的具体表达式为:

$$\psi_m(x) = \begin{cases} \cos(\lambda_m x), & m \geq 3 \\ \sin(\lambda_m x), & 1 \leq m < 3 \end{cases}, \quad \lambda_m = \frac{(m-3)\pi}{L} \quad (13)$$

将位移函数代入整体能量泛函,并考虑结构阻尼的影响<sup>[15]</sup>。通过拉格朗日方程的变分运算可得FGP梁的非线性动力学方程:

$$M\ddot{q} + C_d \dot{q} + (K + K_{NL})q = F \cos(\Omega t) \quad (14)$$

式中,  $M$ 、 $C_d$ 、 $K$  和  $K_{NL}$  分别表示结构的质量矩阵、阻尼矩阵、线性刚度矩阵和非线性刚度矩阵;  $q$  和  $F$  分别表示广义位移系数向量和外力向量,  $q = [q_1^u \cdots$

$q_m^u \cdots q_1^w \cdots q_m^w \cdots q_1^\varphi \cdots q_m^\varphi \cdots]^T$ ;  $\Omega$  为激励频率。

式(14)自由度较高,不利于梁的非线性动力学特性求解与参数化研究,因而需通过模型降阶提升计算效率。具体而言,通过忽略式(14)中非线性项、阻尼项和外力项,可得线性自由振动方程:

$$(-\omega^2 M + K)q = 0 \quad (15)$$

通过求解式(15)的特征值/特征向量,位移向量  $q$  可由模态矩阵  $\Phi$  和模态坐标  $p$  以如下形式表示:

$$q = \Phi_N p \quad (16)$$

式中,下标“ $N$ ”表示模态分量数目;  $p = [p_1 \cdots p_n \cdots p_N]^T$ , 其中  $p_n$  表示第  $n$  个模态坐标。

将式(16)代入式(14),等式两边同时左乘  $\Phi_N^T$ , 整理可得:

$$m\ddot{p} + c\dot{p} + (k + k_{NL})p = f \cos(\Omega t) \quad (17)$$

其中:

$$\begin{aligned} m &= \Phi_N^T M \Phi_N = I_E, \quad k = \Phi_N^T K \Phi_N, \\ k_{NL} &= \Phi_N^T K_{NL} \Phi_N, \quad f = \Phi_N^T F, \\ c &= \Phi_N^T C_d \Phi_N = \text{diag}(2\xi_1 \omega_1, \dots, 2\xi_N \omega_N) \end{aligned} \quad (18)$$

式中,  $I_E$  为  $N$  维单位矩阵;  $\omega_j (j=1, \dots, N)$  表示第  $j$  阶圆频率,  $\xi_j$  表示第  $j$  个模态分量对应的阻尼比,结构阻尼可参考文献[15]。式(17)中包含平方及立方非线性项,本文采用IHB方法求解该简谐激励下非线性动力学方程。

### 1.4 IHB动力学求解

引入时间变量  $\tau = \Omega t$ , 则式(17)可表述为:

$$\Omega^2 m \ddot{p}_\tau + \Omega c \dot{p}_\tau + (k + k_{NL}) p_\tau = f \cos \tau \quad (19)$$

假设在某个时刻,方程(19)的近似解为  $(p_{\tau_0}, \Omega_0)$ , 其近似解的邻近状态  $(p_\tau, \Omega)$  可表示为:

$$p_\tau = p_{\tau_0} + \Delta p_\tau, \quad \Omega = \Omega_0 + \Delta \Omega \quad (20)$$

将上式代入式(19),忽略高阶微量,可得线性化的增量方程:

$$\begin{aligned} \Omega^2 m \Delta \ddot{p}_\tau + \Omega c \Delta \dot{p}_\tau + \left[ k + \frac{\partial(k_{NL} p_{\tau_0})}{\partial p_{\tau_0}} \right] \Delta p_\tau = \\ R - (2\Omega_0 m \ddot{p}_{\tau_0} + c \dot{p}_{\tau_0}) \Delta \Omega \end{aligned} \quad (21)$$

式中,  $R$  为误差向量,当  $(p_{\tau_0}, \Omega_0)$  为式(19)的精确解时,  $R=0$ , 其表达式为:

$$R = f \cos \tau - [\Omega_0^2 m \ddot{p}_{\tau_0} + c \dot{p}_{\tau_0} + (k + k_{NL}) p_{\tau_0}] \quad (22)$$

以傅里叶谐波函数为基函数,近似表征  $p_{\tau_0}$  和  $\Delta p_\tau$ , 则  $p_{\tau_0,n}$  和  $\Delta p_{\tau,n}$  可表示为:

$$\begin{cases} p_{\tau_0,n} = a_0^n + \sum_{k=1}^{n_s} [a_k^n \cos(k\tau) + b_k^n \sin(k\tau)] = C_n A_n \\ \Delta p_{\tau,n} = C_n \Delta A_n \end{cases} \quad (23)$$

式中,  $a_k^n, b_k^n$  分别为余、正弦谐波系数;  $n_c$  为余弦谐波数;  $C_n, A_n$  和  $\Delta A_n$  分别表示由谐波项、谐波系数和增量系数 ( $\Delta a_k^n$  和  $\Delta b_k^n$ ) 组成的向量:

$$\begin{cases} C_n = [1 \quad \cos \tau \quad \sin \tau \quad \cdots \quad \cos(k\tau) \quad \sin(k\tau) \quad \cdots] \\ A_n = [a_0^n \quad a_1^n \quad b_1^n \quad \cdots \quad a_k^n \quad b_k^n \quad \cdots]^T \\ \Delta A_n = [\Delta a_0^n \quad \Delta a_1^n \quad \Delta b_1^n \quad \cdots \quad \Delta a_k^n \quad \Delta b_k^n \quad \cdots]^T \end{cases} \quad (24)$$

于是,  $p_{r0}$  和  $\Delta p_r$  可以表示为:

$$p_{r0} = SA, \quad \Delta p_r = S\Delta A \quad (25)$$

其中:

$$\begin{cases} S = \text{diag}(C_1, \cdots, C_n, \cdots, C_N) \\ A = [A_1^T \quad \cdots \quad A_n^T \quad \cdots \quad A_N^T]^T \\ \Delta A = [\Delta A_1^T \quad \cdots \quad \Delta A_n^T \quad \cdots \quad \Delta A_N^T]^T \end{cases} \quad (26)$$

将式(25)代入增量方程, 并利用 Galerkin 过程可得:

$$\int_0^{2\pi} \delta(\Delta p_r)^T \left[ \Omega^2 m \Delta \ddot{p}_r + \Omega c \Delta \dot{p}_r + \left( k + \frac{\partial(k_{NL} p_0)}{\partial p_0} \right) \Delta p_r \right] d\tau = \int_0^{2\pi} \delta(\Delta p_r)^T [R - (2\Omega_0 m \ddot{p}_{r0} + c \dot{p}_{r0}) \Delta \Omega] d\tau \quad (27)$$

将式(27)积分并整理为以  $\Delta A$  和  $\Delta \Omega$  为未知量的代数方程组:

$$K_{mc} \Delta A = \bar{R} - R_{\Delta} \Delta \Omega \quad (28)$$

其中:

$$\begin{aligned} K_{mc} &= \Omega^2 \bar{M} + \Omega \bar{C} + \bar{K} + \bar{K}_{NL}^{(1)}, \quad R_{\Delta} = (2\Omega \bar{M} + \bar{C}) A, \\ \bar{R} &= \bar{F} - (\Omega^2 \bar{M} + \bar{K} + \bar{K}_{NL}) A \end{aligned} \quad (29)$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \int_0^{2\pi} S^T m \ddot{S} d\tau, \quad \bar{C} = \int_0^{2\pi} S^T c \dot{S} d\tau, \\ \bar{K} &= \int_0^{2\pi} S^T k S d\tau, \quad \bar{K}_{NL} = \int_0^{2\pi} S^T k_{NL} S d\tau, \\ \bar{K}_{NL}^{(1)} &= \int_0^{2\pi} S^T \frac{\partial k_{NL} p_{r0}}{\partial p_{r0}} S d\tau, \quad \bar{F} = \int_0^{2\pi} S^T f \cos \tau d\tau \end{aligned} \quad (30)$$

采用 IHB 法求解时, 需预先给定初始猜想解, 这里线性振动响应解作为 IHB 法的初始解, 然后结合振幅增量、频率增量或弧长增量等求解即可得到 FGP 梁非线性振动响应。

## 2 数值结果和讨论

本节通过数值算例验证 FGP 梁模型的有效性,

并探讨孔隙系数、厚度等对梁振动特性的影响。如无特别说明, 本文中 FGP 材料模型参数为  $E_{\max} = 200 \text{ GPa}$ ,  $\rho_{\max} = 7850 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu = 1/3$ ; 梁的几何参数定义为:  $L = 0.76 \text{ m}$ ,  $h = 0.01 \text{ m}$ ,  $b = 0.03 \text{ m}$ ; 对于非线性响应问题, 假设简谐激励载荷作用于 FGP 梁长度的 1/3 处, 激励载荷幅值设为  $F = 2 \text{ N}$ ; 阻尼比  $\xi_j = 2.5 \times 10^{-4}$ ,  $n_c = 5$ ; 数值计算中的边界条件(如: 固支-C、简支-S、自由-F等)可通过设置合理的弹簧刚度大小(如  $0, 10^{14} \text{ N/m}$  等)获得。

### 2.1 振动模型验证

由前述动力学建模可知, FGP 梁模型的数值精度取决于谱几何级数截断数、模态分量等。关于截断数的选取参见文献[16]。图 3 给出了简支边界下 1 阶线性共振频率附近 FGP 梁幅频响应曲线随模态分量数  $N$  的收敛性变化结果,  $N=2, 4, 6, 8$  分别表示基于前 2、4、6、8 阶模态分量的降阶模型计算结果。图中结果表明, 当  $N \geq 4$  时, 采用不同模态分量计算所得的幅频响应结果高度吻合。因此, 在后续分析中模态分量数选取为 4。

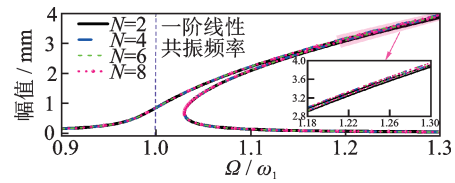


图 3 降阶模型幅频响应的收敛性

Fig. 3 Convergence of the amplitude-frequency responses for a reduced-order model

表 1 给出了不同边界及长厚比下 FGP 梁无量纲基频对比, 孔隙参数  $e_0 = 0.5$ 。表中结果表明, 本文方法的数值解与文献[14]参考解吻合良好, 这表明本文方法在预测 FGP 梁结构线性固有频率的有

表 1 不同边界下 FGP 梁的无量纲频率比较

Tab. 1 Comparison of dimensionless frequencies of FGP beams with different boundaries

边界	$L/h$	文献[14]	ANSYS <sup>[14]</sup>	本文方法
SS	10	0.2798	0.2778	0.2803
	50	0.0571	0.0571	0.0571
CC	10	0.5944	0.6101	0.5994
	50	0.1291	0.1289	0.1292
CS	10	0.4242	0.4227	0.4263
	50	0.0891	0.0891	0.0891
CF	10	0.1008	0.1007	0.1009
	50	0.0204	0.0204	0.0204

效性。此外,由于FGP梁非线性振动问题的文献数据缺失,表2中给出了采用不同边界约束下各向同性材料梁的文献结果,以其为参考验证本文非线性模型的正确性。梁的几何尺寸、材料属性及参数R的取值参见文献[17-18]。表中 $\omega_{nl}$ 为非线性圆频

率,相关求解方法参考文献[17]。 $w_{max}$ 为梁的横向最大变形:(1)对于SS和CC边界, $w_{max} = w(x = 0.5L)$ ;(2)对于CS边界, $w_{max} = w(x = 0.57L)$ 。表中结果表明,基于本文模型的非线性频率预测结果均与文献解吻合良好。

表2 不同边界下各向同性梁非线性频率比 $\omega_{nl}/\omega_1$

Tab. 2 Nonlinear frequency ratio  $\omega_{nl}/\omega_1$  for isotropic beams with different boundaries

$w_{max}/R$	SS边界				CC边界				CS边界			
	文献[17]	文献[18]	文献[19]	本文方法	文献[17]	文献[18]	文献[19]	本文方法	文献[17]	文献[18]	文献[19]	本文方法
1	1.1192	1.1180	1.1180	1.1181	1.0303	1.0283	1.0295	1.0295	1.0592	1.0582	1.0641	1.0611
2	1.4180	1.4135	1.4141	1.4143	1.1152	1.1105	1.1127	1.1128	1.2179	1.2150	1.2318	1.2227
3	1.8092	1.8027	1.8026	1.8029	1.2419	1.2336	1.2377	1.2378	1.4402	1.4368	1.4603	1.4460
4	2.2451	2.2361	2.2359	2.2363	1.3983	1.3856	1.392	1.3921	1.6958	1.6822	1.721	1.7034
5	—	2.6925	2.6923	2.6928	—	1.5574	1.5659	1.5660	—	1.9180	1.999	1.9802

图4给出了简谐激励下各向同性梁非线性幅频响应的比较曲线。其中文献[20]参考解通过微分求积有限元法结合IHB法计算获得。本算例中涉及的边界条件为简-固支(SC)边界,模型的材料及几何参数为: $E=206.85$  GPa,  $\rho=1531.8$  kg/m<sup>3</sup>,  $\mu=0.3$ ,  $L=0.762$  m,  $h=0.00762$  m,  $b=0.0254$  m。根据SGM-IHBM建模过程,将求解得到的傅里叶系数依次代入方程(25)和(12)中,提取谐波项 $\cos t$ 和 $\cos(3t)$ 的幅值系数即可得到图4的解分支曲线。可以看出,SC边界条件下,1阶线性共振频率附近存在3个幅频响应解分支(即 $a_{c1,c3}^{(1)}$ ,  $a_{c1,c3}^{(2)}$ ,  $a_{c1,c3}^{(3)}$ ),且由本文方法计算得到的各解分支曲线与文献解高度吻合。

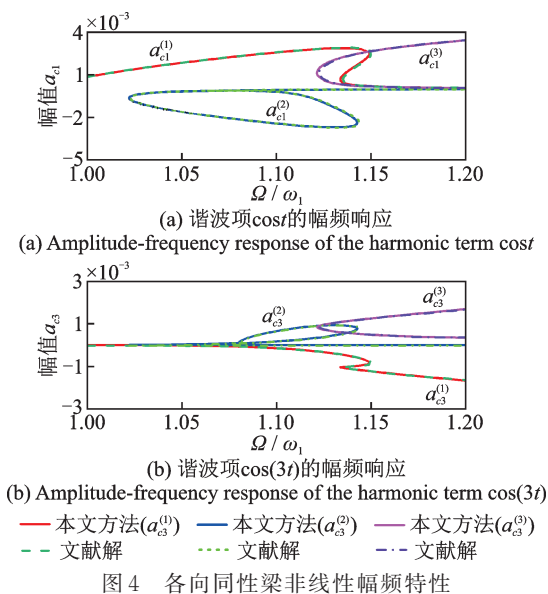


Fig. 4 Nonlinear amplitude-frequency characteristics of an isotropic beam

图5为图4中蓝色解分支上激励频率为 $1.185\omega_1$ 处稳定的单周期时域响应与相图,这里数值方法为Runge-Kutta法。从时域响应与相图比较结果可以看出,两种方法计算所得结果高度一致。综合图3~5的对比结果,表明了SGM-IHB方法对于求解FGP梁非线性振动问题的适用性。

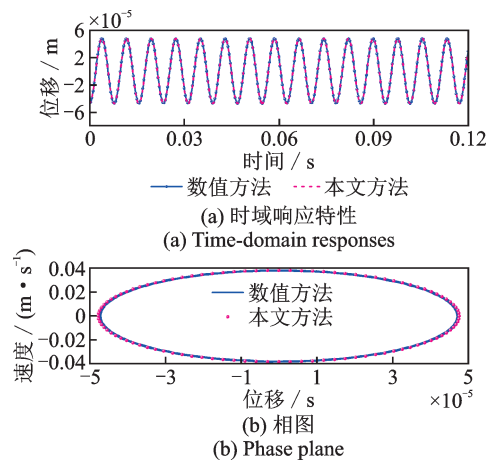


Fig. 5 Time-domain responses and phase plane for  $\Omega/\omega_1 = 1.185$

### 2.2 参数分析

在验证了模型有效性的基础上,本节将探讨孔隙参数、厚度、激励幅值等对FGP梁非线性振动特性的影响。图6给出了FGP梁非线性频率、振动模态随孔隙参数的变化。从图6(a)中可以看出,CC边界下非线性频率随着孔隙参数增加呈现先减小后增加的变化。事实上,由式(1)和(2)可知,FGP结构的杨氏模量和质量密度会随着孔隙参数 $e_0$ 的增加

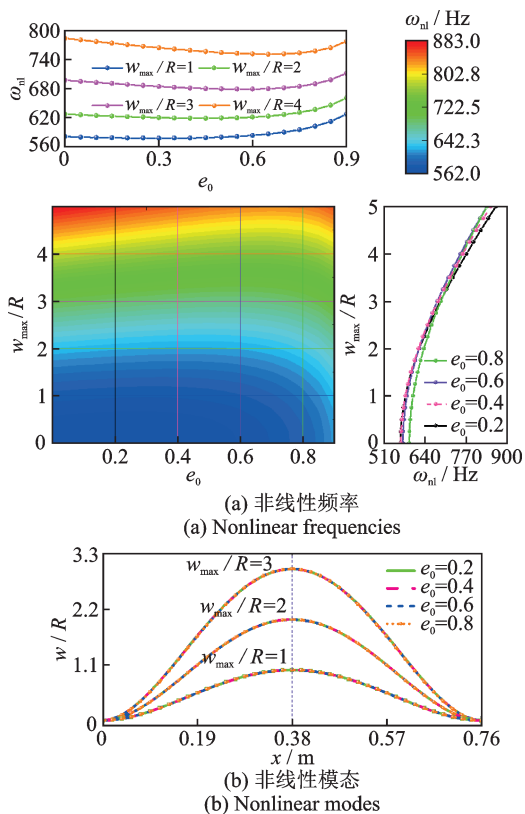


图6 FGP梁非线性频率及模态随孔隙参数 $e_0$ 的变化  
Fig. 6 Variation of nonlinear frequencies and modes of FGP beams with porosity parameter  $e_0$

而减小,这致使结构刚度和质量的减小,进而导致FGP梁非线性频率的变化。在较低的参数变化范围(如图中 $w_{\max}/R=4$ 且 $e_0 \in [0, 0.7]$ ), $e_0$ 的增大对结构刚度的削减大于对结构质量的影响,致使结构刚度-质量比下降,FGP梁非线性频率将逐渐减小;随着孔隙参数增大(如 $w_{\max}/R=4$ 且 $e_0 \in [0.7, 1)$ ),其对结构质量的削减作用更显著,致使结构刚度-质量比增加,FGP梁的非线性频率增大。此外,由图6(a)可以发现,随着 $w_{\max}/R$ 的增加,FGP梁的非线性频率逐渐增大,其非线性特性逐步加强。从图6(b)中可以看出,当 $w_{\max}/R$ 相同,不同孔隙参数下FGP梁的振动模态基本一致,这表明孔隙参数变化对其非线性振动模态无明显影响。

图7所示为不同厚度参数下,FGP梁( $e_0=0.2$ )的幅频响应随激励频率的变化曲线。厚度参数分别设为 $h=0.009, 0.010, 0.011$ 和 $0.012$  m,图中不同颜色虚线表示对应参数下的线性共振频率。可以看出,当考虑结构的几何非线性因素时,FGP结构的幅频响应呈现出硬特性,图3、8和9的幅频响应曲线也反映出了同样的特性;另外,还可以发现,当厚度 $h$ 增加,由于FGP梁整体刚度随之增大,致使结构的固有频率增加,其对应的共振点及非线性共振区域均向高频移动。

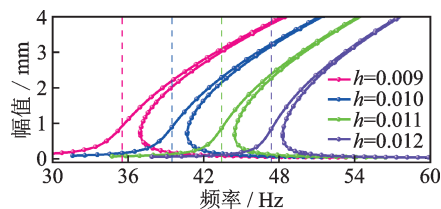


图7 FGP梁非线性幅频响应随厚度的变化  
Fig. 7 Variation of nonlinear amplitude-frequency responses of FGP beams with thickness

图8显示了孔隙参数 $e_0$ 对FGP梁非线性幅频响应的影响。与图6(a)的变化规律相似,简支边界下孔隙参数通过改变结构的刚度及质量,致使结构共振频率发生改变,进而导致不同孔隙参数下FGP梁的共振位置及非线性共振区域呈现差异性变化。在图8(b)显示孔隙参数( $e_0=0.3, 0.6, 0.8$ )的增加对结构质量的削减作用相较于对结构刚度的削减作用更为显著,这导致结构刚度-质量比增加,致使FGP梁的共振频率及非线性共振区域向高频偏移。

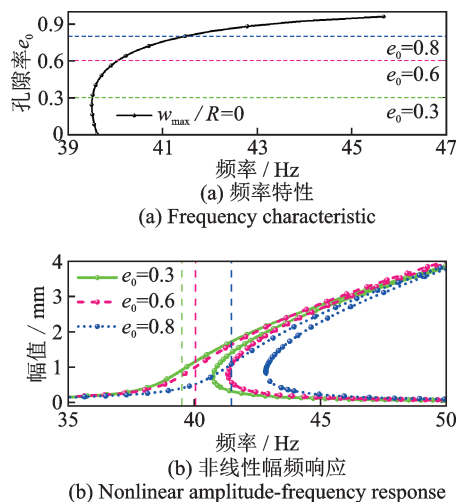
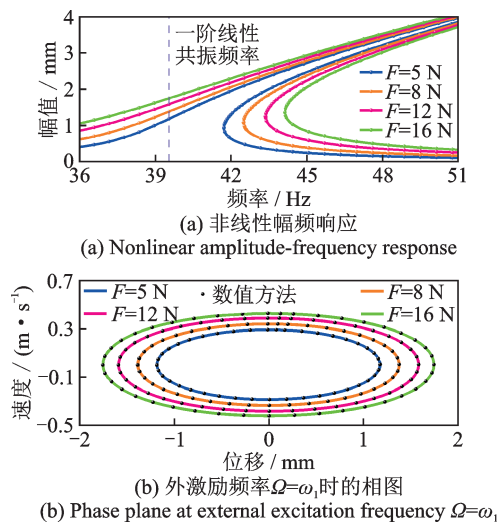


图8 FGP梁的频率特性和非线性幅频响应随 $e_0$ 的变化  
Fig. 8 Variation of frequency and nonlinear amplitude-frequency responses of FGP beams with  $e_0$

为研究激励幅值对FGP梁非线性响应特性的影响,图9(a)给出了不同激励载荷幅值下FGP梁非线性幅频响应的变化曲线。可以观察到,随着激励载荷幅值的增加,其幅频响应的共振区间及振幅都随之增大,结构的非线性特性也逐渐增强。图9(b)给出了激励频率为线性共振频率处测点的相图,图中黑色圆点代表Runge-Kutta法的计算结果。可以看出,当激励频率 $\Omega=\omega_1$ 时,FGP梁始终做稳定的等幅极限环运动,且随着激励幅值的增加,其极限环振幅逐渐增大。

图9 非线性响应随激励幅值 $F$ 的变化Fig.9 Variation of nonlinear responses with the excitation amplitude  $F$ 

### 3 结论

本文基于 Timoshenko 梁理论和 von Karman 理论,提出适用于 FGP 梁非线性振动分析的谱几何-增量谐波平衡解法,并结合数值算例研究了 FGP 梁结构非线性振动特性,得出如下结论:

(1) 基于本文降阶模型求解得到的非线性振动解与文献数据吻合良好,表明了谱几何-增量谐波平衡法的正确性。

(2) 随着 FGP 梁孔隙参数增加,固支边界下梁结构的非线性频率先减小后增大,但孔隙参数变化对结构的非线性模态几乎无影响。

(3) 当考虑结构的几何非线性因素时,FGP 梁的幅频响应呈现硬特性,且由于厚度、孔隙参数的变化致使结构刚度-质量特性的改变,导致 FGP 梁的共振点及非线性共振区域发生偏移。

(4) 随着激励载荷幅值的增加,FGP 梁的幅频响应共振区间及振幅增大,且激励频率为线性共振频率时,FGP 梁的极限环振幅随之增大。

#### 参考文献:

[1] 滕兆春, 马铃权, 付小华. 多孔功能梯度材料 Timoshenko 梁的非线性自由振动分析[J]. 西北工业大学学报, 2022, 40(5): 1145-1154.  
TENG Zhaochun, MA Lingquan, FU Xiaohua. Nonlinear free vibration analysis of Timoshenko beams with porous functionally graded materials[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2022, 40(5):

1145-1154.  
[2] 蒲刚, 章定国, 黎亮. 考虑尺度效应的夹层楔形多孔梁动力学分析[J]. 力学学报, 2019, 51(6): 1882-1896.  
PU Gang, ZHANG Dingguo, LI Liang. Dynamic analysis of sandwich tapered porous micro-beams considering size effect[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2019, 51(6): 1882-1896.  
[3] 周凯, 倪臻, 华宏星. 一般约束边界下多孔 FGM 梁的非线性气动热弹性动力学特性研究[J]. 振动与冲击, 2021, 40(20): 34-41.  
ZHOU Kai, NI Zhen, HUA Hongxing. Nonlinear aero-thermo-elastic characteristics analysis of porous FGM beams with general boundary conditions[J]. Journal of Vibration and Shock, 2021, 40(20): 34-41.  
[4] CHEN D, YANG J, KITIPORNCHAI S. Nonlinear vibration and postbuckling of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite beams[J]. Composites Science and Technology, 2017, 142: 235-245.  
[5] ZHANG Q, LIU H. Nonlinear thermo-mechanical response of bi-directional functionally graded porous beams with initial geometrical imperfection[J]. International Journal of Applied Mechanics, 2022, 14(2): 2250006.  
[6] 鲍四元, 周静, 陆健炜. 任意弹性边界的多段梁自由振动研究[J]. 应用数学和力学, 2020, 41(9): 985-993.  
BAO Siyuan, ZHOU Jing, LU Jianwei. Free vibration of multi-segment beams with arbitrary boundary conditions[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2020, 41(9): 985-993.  
[7] 李海虹, 王昊, 郭山国, 等. 任意边界条件下弹性梁耦合振动特性分析[J]. 振动与冲击, 2022, 41(17): 48-54.  
LI Haihong, WANG Hao, GUO Shanguo, et al. Coupled vibration characteristics analysis of elastic beam under arbitrary boundary conditions[J]. Journal of Vibration and Shock, 2022, 41(17): 48-54.  
[8] TANG Y, WANG T, MA Z S, et al. Magneto-electro-elastic modelling and nonlinear vibration analysis of bi-directional functionally graded beams[J]. Nonlinear Dynamics, 2021, 105(3): 2195-2227.  
[9] WU Z, ZHANG Y, YAO G, et al. Nonlinear primary and super-harmonic resonances of functionally graded carbon nanotube reinforced composite beams[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2019, 153-154: 321-340.  
[10] 赵倩, 刘子良, 姚红良, 等. IHB 法在多自由度 Bouc-Wen 滞回非线性系统响应特性研究中的应用[J]. 振动

- 与冲击, 2018, 37(10): 57-62.
- ZHAO Qian, LIU Ziliang, YAO Hongliang, et al. Application of the IHB method to study the response characteristics of multi-DOF systems with Bouc-Wen hysteretic nonlinearity[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2018, 37(10): 57-62.
- [11] 黄建亮, 肖龙江. 1:1内共振条件下受基础激励屈曲梁的非线性振动和分岔分析[J]. *振动工程学报*, 2020, 33(4): 698-708.
- HUANG Jianliang, XIAO Longjiang. Nonlinear dynamics and bifurcation of a buckled beam subjected to base harmonic excitation with one-to-one internal resonance[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2020, 33(4): 698-708.
- [12] HE D Z, WANG Q S, ZHONG R, et al. Vibration analysis of functionally graded material (FGM) double layered floating raft structure by the spectro-geometric method[J]. *Structures*, 2023, 48: 533-550.
- [13] HE D Z, WANG Q S, ZHONG R, et al. A unified spectral-geometric model of FGM double conical/ cylindrical/spherical shell coupled with annular plates[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2023, 143: 348-371.
- [14] CHEN D, YANG J, KITIPORNCHAI S. Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2016, 108-109: 14-22.
- [15] SUN S, GUO C, FENG W, et al. Nonlinear vibration analysis of CNT-reinforced functionally graded composite cylindrical shells resting on elastic foundations[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2022, 143: 104037.
- [16] WANG Q S, SHI D Y, LIANG Q. Free vibration analysis of axially loaded laminated composite beams with general boundary conditions by using a modified Fourier-Ritz approach[J]. *Journal of Composite Materials*, 2016, 50(15): 2111-2135.
- [17] KE L L, YANG J, KITIPORNCHAI S. Nonlinear free vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams[J]. *Composite Structures*, 2010, 92(3): 676-683.
- [18] MARUR S R, PRATHAP G. Non-linear beam vibration problems and simplifications in finite element models[J]. *Computational Mechanics*, 2005, 35(5): 352-360.
- [19] BHASHYAM G R, PRATHAP G. Galerkin finite element method for non-linear beam vibrations[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1980, 72(2): 191-203.
- [20] RI K, HAN P, KIM I, et al. Nonlinear forced vibration analysis of composite beam combined with DQFEM and IHB[J]. *AIP Advances*, 2020, 10(8): 085112.

第一作者: 钟 锐(1993—),男,博士研究生。

E-mail: ruizhong@csu.edu.cn

通信作者: 王青山(1989—),男,博士,副教授。

E-mail: qingshanwang@csu.edu.cn