

# 基于边界条件等效的载荷传递结构动力学拓扑优化

张理昊, 朱益均, 于开平

(哈尔滨工业大学航天科学与力学系, 黑龙江 哈尔滨 150001)

**摘要:** 随着航空航天事业的不断发展, 飞行器的载荷传递结构也愈来愈复杂。在实际工程中, 如何将载荷通过合理的方式进行分配, 对于航天器的轻量化设计以及结构承载性的保证具有重要的意义, 并且在动态载荷传递结构设计的过程中还需要考虑整体结构对局部结构的非理想边界条件。基于此, 本文提出了一种基于结构边界条件等效的动态载荷传递结构动力学拓扑优化设计方法, 可在设计载荷传递结构的同时充分考虑整体结构对局部结构的影响。该方法将局部结构与整体结构之间的连接边界简化为弹簧单元与集中质量单元, 通过遗传算法对单元参数进行优化从而实现边界条件等效, 结合结构动柔度设计目标建立基于单元密度变量的载荷传递结构拓扑优化模型。数值算例验证了该方法的有效性, 并得到了优化设计结果随体积分数、外载荷频率以及载荷约束区间变化的规律。

**关键词:** 拓扑优化; 载荷传递; 边界条件等效; 节点位移约束

**中图分类号:** V423.6 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202311012

## Dynamic topology optimization of load transfer structures based on equivalent boundary conditions

ZHANG Lihao, ZHU Yijun, YU Kaiping

(Department of Astronautic Science and Mechanics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

**Abstract:** With the continuous development of aerospace industry, the load transfer structure of spacecraft is getting more and more complicated. In practical engineering, how to distribute the loads in a reasonable way is of great significance for the lightweight design of spacecraft and the guarantee of structural load carrying capacity, and it is also necessary to take into account the non-ideal boundary conditions of the overall structure to the local structure in the process of dynamic load transfer structure design. Based on this, this paper proposes a dynamic topology optimization design method for dynamic load transfer structure based on structural boundary condition equivalence, which can fully consider the influence of the overall structure on the local structure while designing the load transfer structure. The method firstly simplifies the connection boundary between the local structure and the overall structure into a spring unit and a centralized mass unit, optimizes the unit parameters through genetic algorithm to achieve the equivalence of boundary conditions, and finally establishes a topology optimization model of the load transfer structure based on the unit density variable in conjunction with the design objective of the dynamic compliance of the structure. Numerical examples verify the effectiveness of the new method and obtain the optimization design results with the variation of volume fraction, external load frequency and load constraint interval.

**Keywords:** topology optimization; load transfer; equivalent boundary conditions; displacement constraint on node

自连续体拓扑优化的概念被提出以来, 拓扑优化技术已经过充分的发展与完善, 研究人员先后建立了固体各向同性材料惩罚 (solid isotropic material withpenalization, SIMP) 模型<sup>[1]</sup>、进化式结构优化 (evolutionary structure optimization, ESO) 方法<sup>[2]</sup>以及可移动变形组件 (moving morphable components, MMC) 方法<sup>[3]</sup>等多种方法。目前, 拓扑优化方法已经充分应用于工程应用的各个领域, 成为航空航天结构设计中的关键技术<sup>[4-6]</sup>。

随着航空航天结构的不断发展, 其承载结构的

设计也愈发复杂。现有的大量结构优化设计主要考虑结构刚度、强度等整体或局部承载性能<sup>[7-8]</sup>。

在航空航天结构的设计中, 通过设计载荷传递的方式将输出载荷进行合理分配, 可以在保证结构性能的同时最大限度地使结构达到轻量化设计。目前, 针对载荷传递结构的拓扑优化方法研究已经取得了一定进展。张家鑫等<sup>[9]</sup>为了解决航天器连接结构中的集中力问题, 将拓扑优化概念与实际结构承载环境相结合, 提出了一种针对短壳结构的集中力扩散设计方法。GAO 等<sup>[10]</sup>研究了在特定边界条件

下获得均匀支座反力的问题,通过引入支座反力方差约束来达到改进拓扑优化方法的目的。CAO等<sup>[11-12]</sup>提出了一种对输出载荷精确控制的结构拓扑优化设计方法,通过在载荷输出位置设计辅助杆单元将输出载荷约束转化为节点的位移约束,从而降低了优化问题的复杂程度。HOU等<sup>[13]</sup>为了避免紧固件在大变形下可能产生的节点失效,将几何非线性理论与拓扑优化方法相结合,对紧固件节点载荷进行了优化控制。TANG等<sup>[14]</sup>针对热弹性结构在工程实践中的设计要求,提出了一种基于热弹性理论的载荷分配拓扑优化方法。谷小军等<sup>[15]</sup>建立了火箭发动机机架与舱段传力结构一体化优化模型,完成了联合最优传力路径分析及整体刚度最大化设计工作。李佳霖等<sup>[16]</sup>针对运载火箭传力机架,在可移动变形组件方法的框架下提出了一种有效的轻量化设计方法。目前的研究主要针对的是静力环境下的载荷传递结构优化,但结构的实际工作环境往往是动力学环境。因此,对载荷传递结构在动力学环境下的优化进行研究具有必要性。

需注意,在实际的结构优化设计工作中,往往是抽取出结构的局部零部件进行优化设计,这些局部部件一般只占整体结构的小部分,而整体结构的分析由于耗时耗资却被经常忽略。大多数局部结构由于其周围结构的弹性以及惯性的影响,往往都处于非理想边界条件之下<sup>[17]</sup>,在结构优化设计时考虑到周围结构对于局部结构边界条件的影响。因此,在开展结构优化设计工作之前,需要对局部结构的边界条件进行识别与等效,为结构优化提供准确的输入模型。

基于上述背景,本文建立了一种基于边界条件等效的动载荷传递结构动力学拓扑优化方法。该方法首先将局部结构与整体结构之间的连接边界简化为弹簧单元与集中质量单元,利用遗传算法的多目标优化得到合适的单元参数,从而实现边界条件的等效。再以 SIMP 方法为基础建立拓扑优化模型,通过连接边界上的弹簧单元将输出载荷约束转化为弹簧单元的节点位移约束,从而对动载荷输出进行控制。最后利用移动渐近线算法(method of moving asymptotes, MMA)更新设计变量直至优化结果收敛。

## 1 基于遗传算法的边界条件等效

### 1.1 基于遗传算法的多目标优化算法

遗传算法是一种模拟生物在自然环境中遗传和进化的优化算法,其相对梯度优化算法的优势在于可以更好地找到全局最优解且初始点的选择对于优

化结果基本不产生影响。一个无约束的多目标优化问题可描述如下<sup>[18]</sup>:

$$\begin{cases} \min \mathbf{f} = [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})] \\ \text{s.t. } \mathbf{x}^L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^U \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{f}$  为目标函数;  $\mathbf{x}$  为设计变量;  $\mathbf{x}^L$ 、 $\mathbf{x}^U$  分别为设计变量的上、下界。

遗传算法首先在解空间内产生初始种群,然后计算初始种群中每一个个体的目标函数值,再根据个体的目标函数值确定其适应度值,最高适应度值的个体用于减小目标函数值,再通过选择、交叉、变异来产生下一代种群。对于多目标优化问题,可采用加权的方法将多目标问题转变为单目标问题,但很难去判断实际问题中的各目标权重。遗传算法多目标优化可以规避选择权重因子的问题,该算法在多目标遗传优化中引入了 Pareto 过滤操作,从而可以得到多目标优化问题的 Pareto 解集。关于遗传算法在多目标优化中的应用可参考文献<sup>[18]</sup>。

### 1.2 边界条件等效方法

通过试验或有限元计算得到整体结构的固有频率  $\Omega$  与模态  $\Phi$ , 并从整体结构的模态中提取出与局部结构自由度相对应的模态  $\Phi_p$ ; 同时建立局部结构的有限元模型,用弹簧单元与集中质量单元来分别等效边界刚度与边界质量。

对于固有频率,边界条件等效的目标函数可表达为:

$$F_f(\mathbf{x}) = \frac{|\mathbf{r}(\mathbf{x})|^2}{N} \quad (2)$$

式中,  $N$  表示选定的固有频率个数;  $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = [r_1(\mathbf{x}), r_2(\mathbf{x}), \dots, r_N(\mathbf{x})]$  为固有频率相对误差矢量。设计变量包括弹簧单元弹性系数与集中质量单元质量大小。第  $i$  阶固有频率的相对误差可表示为:

$$r_i(\mathbf{x}) = \frac{\omega_i(\mathbf{x}) - \Omega_i}{\Omega_i} \quad (3)$$

式中,  $\omega_i$  表示计算得到的局部结构第  $i$  阶固有频率;  $\Omega_i$  表示通过试验或计算得到的整体结构第  $i$  阶固有频率。

对于主振型,目标函数可表示为:

$$F_s(\mathbf{x}) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n q_i(\mathbf{x})}{N} \quad (4)$$

式中,  $q_i(\mathbf{x})$  表示模态置信准则 MAC 值,可表示为:

$$q_i(\mathbf{x}) = \frac{|\varphi_i^T \Phi_{pi}|^2}{(\varphi_i^T \varphi_i)(\Phi_{pi}^T \Phi_{pi})} \quad (5)$$

式中,  $\varphi_i$  为计算得到的局部结构第  $i$  阶主振型;  $\Phi_{pi}$  为通过试验或计算得到的整体结构与局部结构自由度相对应的第  $i$  阶主振型。

本文边界条件等效方法的流程图如图 1 所示,对应的多目标优化问题可表示为:

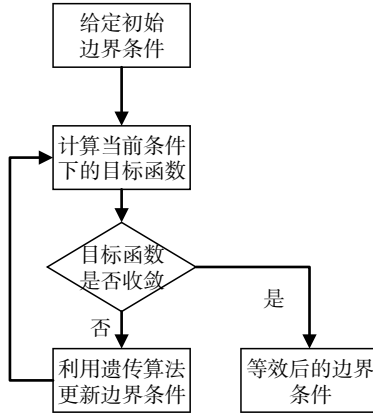


图1 边界条件等效方法流程图

Fig. 1 Flow chart of equivalent boundary conditions method

$$\begin{cases} \min F(x) = [F_f(x), F_s(x)] \\ \text{s.t. } x^L \leq x \leq x^U \end{cases} \quad (6)$$

## 2 输出动载荷约束的拓扑优化形式

### 2.1 动载荷可控传递数学模型

对于动力学问题,假设输入载荷为简谐激励,其控制方程可写作:

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{K}\mathbf{u}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) \quad (7)$$

式中,  $\mathbf{K}$  为结构的刚度矩阵;  $\mathbf{C}$  为结构的阻尼矩阵;  $\mathbf{M}$  为结构的质量矩阵;  $\mathbf{u}(t)$ 、 $\dot{\mathbf{u}}(t)$  和  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$  分别为结构的位移、速度和加速度矢量;  $\mathbf{F}(t)$  为输入简谐载荷矢量,可以改写为  $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}e^{j\omega t}$  ( $j^2 = -1$ ), 其中  $\omega$  为简谐激励的频率。阻尼矩阵  $\mathbf{C}$  选择瑞利阻尼模型:

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (8)$$

式中,  $\alpha$  和  $\beta$  为瑞利阻尼系数。

假设结构位移解的形式为  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}e^{j\omega t}$ , 代入式(7)可得:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{K} + j\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{u} \quad (9)$$

式中,  $\mathbf{u}$  为结构位移。此时可以定义结构动刚度:

$$\mathbf{K}_d = \mathbf{K} + j\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M} \quad (10)$$

结构位移  $\mathbf{u}$  与  $\mathbf{F}$  的关系可以表示为:

$$\mathbf{K}_d\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (11)$$

### 2.2 动载荷精确输出约束

上一节已将整体结构对局部结构的边界条件等效为边界处的弹簧单元与集中质量单元,同时载荷输出位置多在局部结构的边界上,因此我们可以将边界处各节点的输出载荷等效为对应的节点位移输出,如下式所示:

$$u_m = \frac{F_m}{k_m} \quad (12)$$

式中,  $u_m$  为结构  $m$  自由度对应的位移输出;  $k_m$  为  $m$  自由度对应的边界刚度;  $F_m$  为  $m$  自由度对应的输出载

荷。  $u_m$  可以通过下式得到:

$$u_m = \mathbf{T}_m\mathbf{u} \quad (13)$$

式中,  $\mathbf{T}_m$  为一个系数矩阵且在第  $m$  个自由度的值为 1, 其余自由度的值全为 0。

本文构造以下公式来控制优化过程中相应的输出负载:

$$R_{m-1}(1-w) \leq \frac{|u_m|}{|u_{m-1}|} \leq R_{m-1}(1+w) \quad (14)$$

式中,  $R_{m-1}$  表示动载荷输出比值;  $w$  表示约束区间相对宽度。

实际工程中可能需要控制载荷输出的位置不止一处,那么就会产生多个约束,从而对结构优化问题的求解造成很大的麻烦。使用一些约束聚合方法可以减少约束的个数,使问题求解变得较为简单。KS 函数方法<sup>[18]</sup>是一种被广泛应用的约束聚合方法,其标准形式可写为:

$$G_{KS} = g_{\max} + \frac{1}{\mu} \ln \sum_{i=1}^n e^{\mu(g_i - g_{\max})} \quad (15)$$

式中,  $g_i$  为结构设计问题中的第  $i$  个约束;  $g_{\max}$  为当前设计点评估的所有约束的最大值;  $\mu$  为聚合参数,一般取为 50 即可满足需求;  $n$  为约束数量。

针对动载荷精确输出问题,约束可分为两类:

$$\begin{cases} g_{m-1}^{\text{up}} = \frac{|u_m|}{|u_{m-1}|} - R_{m-1}(1+w) \leq 0 \\ g_{m-1}^{\text{low}} = -\frac{|u_m|}{|u_{m-1}|} + R_{m-1}(1-w) \leq 0 \end{cases} \quad (16)$$

本文中动载荷精确输出约束可聚合为:

$$G_{KS} = g_{\max} + \frac{1}{\mu} \ln \sum_{m=2}^n [e^{\mu(g_{m-1}^{\text{up}} - g_{\max})} + e^{\mu(g_{m-1}^{\text{low}} - g_{\max})}] \leq 0 \quad (17)$$

### 2.3 拓扑优化模型

本文的载荷输出控制的拓扑优化模型可以定义为:

$$\begin{aligned} & \text{find } \boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n], \\ & \min d = |c_d| = |\mathbf{u}^T \mathbf{K}_d \mathbf{u}|, \\ & \text{s.t. } V \leq V^*, G_{KS} \leq 0, \\ & 0 \leq \eta_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (18)$$

式中,  $\eta_i$  为设计域内描述材料分布的伪密度设计变量; 目标函数  $d$  为结构动柔度  $c_d$  的模值;  $\mathbf{K}_d$  为结构动刚度矩阵;  $V$  为材料体积;  $V^*$  为体积上界。

本文在拓扑优化过程中选择有理近似模型(rational approximation of material properties, RAMP)<sup>[19]</sup>, 与 SIMP 相比, RAMP 可有效避免动力学拓扑优化中因刚度与质量惩罚不一致而可能产生的局部模态。SIMP 与 RAMP 的对比如图 2 所示, 两种插值方法的惩罚因子均为 5。结果表明, 当伪密度趋近于零时, SIMP 对伪密度的惩罚不够, 而 RAMP 可以有效改善这一问题。RAMP 的材料参数插值如下式所示:

$$\begin{cases} E_e = R(\bar{\eta}_i)(E_0 - E_{\min}) + E_{\min} \\ \rho_e = R(\bar{\eta}_i)(\rho_0 - \rho_{\min}) + \rho_{\min} \end{cases} \quad (19)$$

式中,  $E_e$  为单元弹性模量;  $\rho_e$  为单元密度;  $E_0$  和  $\rho_0$  分别为全固态材料的弹性模量和密度;  $E_{\min}$  和  $\rho_{\min}$  分别为单元弹性模量和密度的下界;  $R(\bar{\eta}_i)$  为下式所表示的 RAMP 插值函数:

$$R(\bar{\eta}_i) = \frac{\bar{\eta}_i}{1 + p(1 - \bar{\eta}_i)} \quad (20)$$

式中,  $p$  为惩罚因子。

变密度方法很可能出现两类数值不稳定现象, 即棋盘格现象与网格依赖性问题, 因此需要引入密度过滤来消除这些数值现象。密度过滤器的公式<sup>[20]</sup>如下:

$$\bar{\eta}_e = \frac{1}{\sum_{i \in N_e} H_{ei}} \sum_{i \in N_e} H_{ei} \eta_i \quad (21)$$

式中,  $\bar{\eta}_e$  为过滤后的单元密度;  $N_e$  为以单元  $e$  为中心, 过滤半径  $r_{\min}$  范围内的单元集合;  $H_{ei}$  为下式所定义的权重系数:

$$H_{ei} = \max(0, r_{\min} - \Delta(e, i)) \quad (22)$$

式中,  $\Delta(e, i)$  为过滤半径范围内第  $i$  个单元与第  $e$  个单元的单元中心距离。

由于变密度法拓扑优化中会不可避免地出现中间密度, 而中间密度不是真实存在的材料。因此, 通过引入投影函数的方法来使中间密度清晰化。本文选择下式所描述的函数来<sup>[21]</sup> 作为投影函数:

$$\bar{\eta}_e = \frac{\tanh(\delta\theta) + \tanh(\delta(\bar{\eta}_e - \theta))}{\tanh(\delta\theta) + \tanh(\delta(1 - \theta))} \quad (23)$$

式中,  $\bar{\eta}_e$  为投影后的单元密度;  $\delta$  为控制陡峭程度的参数;  $\theta$  为由投影前后的体积值的不变性决定的擦参数。

同时引入密度过滤与投影函数的可变密度方法也被称为三场可变密度方法<sup>[21]</sup>。在该方法中, 以伪密度  $\eta_e$  作为设计变量, 但使用最终投影得到的密度  $\bar{\eta}_e$  参与有限元计算。目标函数与约束函数  $f_i$  对设计变量  $\eta_e$  的灵敏度可由链式法则导出:

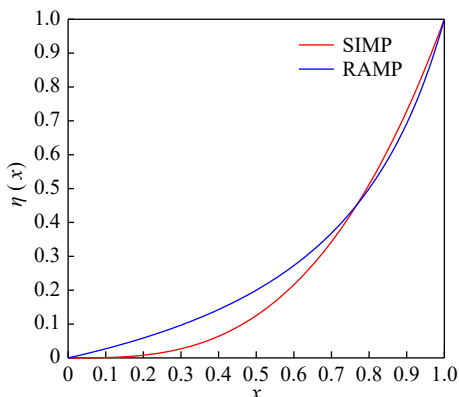


图 2 SIMP 与 RAMP 的对比

Fig. 2 Comparison of SIMP and RAMP

$$\frac{\partial f_i}{\partial \eta_e} = \sum_{i \in N_e} \frac{\partial f_i}{\partial \bar{\eta}_i} \frac{\partial \bar{\eta}_i}{\partial \eta_e} \quad (24)$$

### 3 灵敏度求解

#### 3.1 目标函数灵敏度求解

由于动柔度  $c_d$  一般情况下为复数, 因此以动柔度模值  $d$  作为目标函数。设  $c_d$  的实部和虚部分别为  $c_R$  和  $c_I$ , 即

$$c_d = c_R + j c_I \quad (25)$$

动柔度模值  $d$  对  $\bar{\eta}_e$  求偏导可得:

$$\frac{\partial d}{\partial \bar{\eta}_e} = \frac{1}{2} \frac{2c_R \frac{\partial c_R}{\partial \bar{\eta}_e} + 2c_I \frac{\partial c_I}{\partial \bar{\eta}_e}}{d} = \frac{c_R \frac{\partial c_R}{\partial \bar{\eta}_e} + c_I \frac{\partial c_I}{\partial \bar{\eta}_e}}{d} \quad (26)$$

同时, 动柔度的灵敏度由下式给出:

$$\frac{\partial c_d}{\partial \bar{\eta}_e} = -\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}_d}{\partial \bar{\eta}_e} \mathbf{u} \quad (27)$$

因而可得:

$$\frac{\partial c_d}{\partial \bar{\eta}_e} = \frac{\partial c_R}{\partial \bar{\eta}_e} + j \frac{\partial c_I}{\partial \bar{\eta}_e} \quad (28)$$

在变密度法拓扑优化中, 由于单元设计变量通过假设的函数关系建立与单元动刚度矩阵间的关系, 因此关于目标函数灵敏度的求解可以简化至单元级别进行计算。

#### 3.2 动载荷传递约束函数灵敏度求解

对于节点位移模值比值的灵敏度分析, 可通过下式得到:

$$\frac{\partial \left( \frac{|u_m|}{|u_{m-1}|} \right)}{\partial \bar{\eta}_e} = \frac{|u_{m-1}| \frac{\partial |u_m|}{\partial \bar{\eta}_e} - |u_m| \frac{\partial |u_{m-1}|}{\partial \bar{\eta}_e}}{|u_{m-1}|^2} \quad (29)$$

而节点位移模值的灵敏度可表示为:

$$\frac{\partial |u_m|}{\partial \bar{\eta}_e} = \frac{u_{mR} \frac{\partial u_{mR}}{\partial \bar{\eta}_e} + u_{mI} \frac{\partial u_{mI}}{\partial \bar{\eta}_e}}{|u_m|} \quad (30)$$

式中,  $u_{mR}$  和  $u_{mI}$  分别为节点位移响应的实部和虚部。

$$\frac{\partial u_{mR}}{\partial \bar{\eta}_e} + j \frac{\partial u_{mI}}{\partial \bar{\eta}_e} = \frac{\partial u_m}{\partial \bar{\eta}_e} \quad (31)$$

又

$$\frac{\partial u_m}{\partial \bar{\eta}_e} = -\boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{K}_d}{\partial \bar{\eta}_e} \mathbf{u} \quad (32)$$

式中,  $\boldsymbol{\lambda}$  为伴随矩阵, 可由下式求解得到:

$$\mathbf{K}_d \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{T}_m \quad (33)$$

对于 KS 函数, 由式 (17) 可得:

$$\frac{\partial G_{KS}}{\partial \bar{\eta}_e} = \frac{\sum_{m=2}^n \left[ e^{\mu(g_{m-1}^{up} - g_{max})} \cdot \frac{\partial g_{m-1}^{up}}{\partial \bar{\eta}_e} - e^{\mu(g_{m-1}^{low} - g_{max})} \frac{\partial g_{m-1}^{low}}{\partial \bar{\eta}_e} \right]}{\sum_{m=2}^n \left[ e^{\mu(g_{m-1}^{up} - g_{max})} + e^{\mu(g_{m-1}^{low} - g_{max})} \right]} \quad (34)$$

其中:

$$\frac{\partial g_{m-1}^{up}}{\partial \bar{\eta}_e} = -\frac{\partial g_{m-1}^{low}}{\partial \bar{\eta}_e} = \frac{\partial \left( \frac{|u_m|}{|u_{m-1}|} \right)}{\partial \bar{\eta}_e} \quad (35)$$

将式 (29)~(33) 代入式 (34), 便可得到动载荷传递约束灵敏度。

在得到目标函数与约束函数关于设计变量的灵敏度之后, 可使用 MMA 梯度求解器<sup>[22]</sup> 更新设计变量。

## 4 数值算例

### 4.1 二维基板算例

考虑如图 3 所示的弹性基板整体结构, 将上方灰色区域设计域离散为 7200 个厚度为 1 mm 的 1 mm×1 mm 大小的平面应力单元, 下方弹性支撑离散为 7245 个厚度为 1 mm 的 1 mm×1 mm 大小的平面应力单元。外载荷频率为 50 Hz, 外载荷幅值大小为 100 N, 加载位置如图 3 所示。 $\alpha$  和  $\beta$  分别为  $10^{-2}$  和  $10^{-4}$ 。

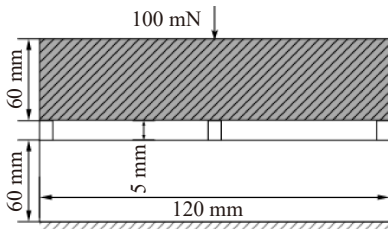


图 3 弹性基板示意图

Fig. 3 Schematic diagram of elastic substrate

分别计算整体结构与理想固支条件下局部结构前 3 阶固有频率, 得到的结果如表 1 所示。结果表明, 整体结构与固支条件下局部结构的固有频率之间相差较大, 因而有必要对局部结构进行边界条件等效。将局部结构与整体结构的连接边界等效为弹簧单元与集中质量单元, 如图 4 所示。每个弹簧单元同时具有  $x$  和  $y$  方向的刚度, 每个集中质量单元也同时具有  $x$  和  $y$  方向的质量。以弹簧单元弹性系数和集中质量单元质量大小作为设计变量进行遗传算法多目标优化, 得到的多目标优化问题 Pareto 解集如图 5 所示。

表 1 整体结构与局部结构前 3 阶固有频率

Tab. 1 The first three order natural frequencies of global structure and local structure

固有频率阶数	整体结构固有频率/Hz	局部结构固有频率/Hz
1阶	189.46	920.26
2阶	489.55	1710.67
3阶	608.45	1894.91

从 Pareto 解集中选取边界条件等效参数, 并计算边界条件等效后局部结构的前 3 阶固有频率与主振

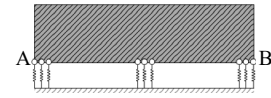


图 4 边界条件等效示意图

Fig. 4 Schematic diagram of equivalent boundary conditions

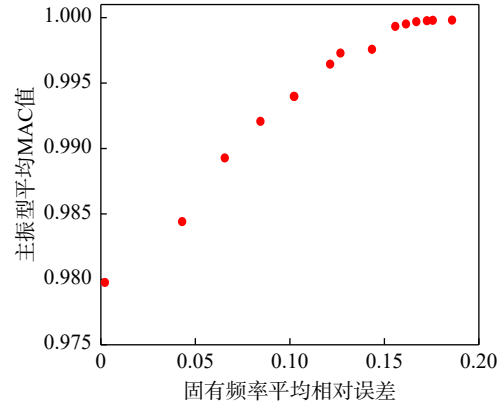


图 5 多目标优化问题 Pareto 解集

Fig. 5 Pareto solution sets for multi-objective optimization problem

型。计算固有频率相对误差及主振型 MAC 值如表 2 所示。结果表明, 优化得到的局部结构前 3 阶模态固有频率与相应的整体结构模态固有频率吻合很好, 说明弹簧单元与集中质量单元可以很好地对该算例的边界条件进行等效。

表 2 固有频率相对误差及主振型 MAC 值

Tab. 2 Relative errors of natural frequencies and MAC values of main modes

固有频率与主振型阶数	固有频率相对误差	主振型MAC值
1阶	5.86%	0.98
2阶	2.42%	1.00
3阶	4.62%	0.97

为了验证边界条件等效在结构优化中的有效性。分别对整体结构、理想固支边界条件下的局部结构和边界条件等效后的局部结构进行动力学拓扑优化, 优化结果如表 3 所示。结果表明, 理想固支边界条件不能正确模拟弹性基底上的结构。边界条件等效后的优化结果与实际情况相符。因此, 本文方法可以有效模拟弹性支撑。

分别取体积分数为 30%、40%、50%、60%、70%, 分析体积分数比对边界条件等效后优化结果的影响, 优化结果随体积分数的变化如表 4 所示。结果表明, 本文的边界条件等效方法可以有效模拟弹性支撑。

控制目标为 A 与 B 处的动载荷输出比值为 2 : 1, 约束区间相对宽度为 10%, 体积分数为 50%。将初始设计变量设置为在设计域中均匀分布, 设计变量的初始值  $\eta_e = 0.5$ , 初始基频为 365.58 Hz。计算

表 3 整体结构、理想固支边界条件下的局部结构和边界条件等效后的局部结构优化结果对比

Tab. 3 Comparison of optimization results among global structure, local structure under ideal fixed support boundary conditions and local structure after boundary condition equivalence














结构特性	整体结构	理想固支边界条件	边界条件等效
动柔度模值/J	$23.14 \times 10^{-6}$	$23.06 \times 10^{-6}$	$24.29 \times 10^{-6}$
初始结构基频/Hz	334.93	715.74	365.58
优化结构基频/Hz	252.66	785.10	260.35
优化结果			

表 4 不同体积分数下整体结构和边界条件等效后的局部结构优化结果对比

Tab. 4 Comparison of optimization results between global structure and local structure after boundary condition equivalence under different volume fractions

体积分数	整体结构优化后基频/Hz	整体结构优化结果	局部结构优化后基频/Hz	局部结构优化结果
30%	279.94		271.75	
40%	265.79		261.54	
50%	252.66		260.35	
60%	241.24		252.04	
70%	230.00		238.48	

得到的结构拓扑构型如图 6 所示。在优化结果中，A、B 处的输出载荷幅值大小分别为 2393.62 和 1325.88 mN，达到了动载荷精确输出的要求。同时，在动载荷精确输出约束作用下，拓扑优化结构材料分布趋向于连接外激励输入节点与动载荷输出节点，且由于结构两侧动载荷输出大小不一致，对称的初始结构会转变为非对称结构。优化后局部结构基频为 257.7 Hz，整体结构基频为 246.65 Hz。结果表明，边界条件等效在结构优化中是有效的。结构动柔度模值变化如图 7 所示，由图可知，结构动柔度模值得到了有效降低。

分别取体积分数为 40%、50%、60%、70%，分析体积分数比对优化结果的影响，优化结果随体积分数比的变化如表 5 所示。可以发现，结构的轻量化



图 6 优化结果

Fig. 6 Optimization results

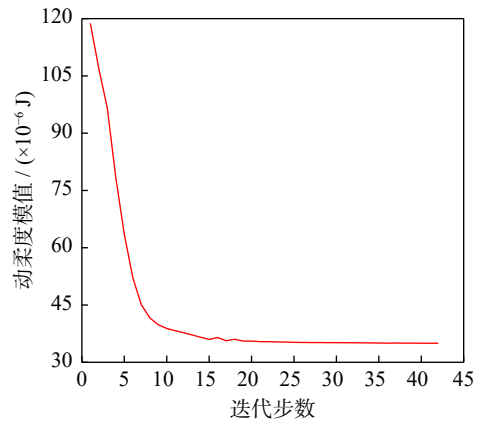


图 7 目标函数变化

Fig. 7 Variation of objective function

是在牺牲一定的结构动刚度的前提下进行的，体积分数比的减小会在一定程度上增大优化结果的动柔度。同时，随着体积分数比的减小，拓扑优化结构材料分布逐渐趋向于两侧，以保证两侧节点具有较大输出载荷。

分别取外载荷频率为 20、50、100、200 Hz，分析外载荷频率对优化结果的影响。表 6 给出了优化结果随外载荷频率的变化。可以发现，随着外载荷频率的增加，优化结果的动柔度模值逐渐增大，这是由

表 5 不同体积分数比下的优化结果对比

Tab. 5 Comparison of optimization results under different volume fractions









体积分数	动柔度模值/J	优化结果
40%	$37.05 \times 10^{-6}$	
50%	$34.99 \times 10^{-6}$	
60%	$33.59 \times 10^{-6}$	
70%	$32.56 \times 10^{-6}$	

表 6 不同外载荷频率下的优化结果对比

Tab. 6 Comparison of optimization results under different external load frequencies

外载荷频率/Hz	动柔度模值/J	优化结果
20	$34.91 \times 10^{-6}$	
50	$34.99 \times 10^{-6}$	
100	$35.34 \times 10^{-6}$	
200	$36.78 \times 10^{-6}$	





于外激励频率增大从而接近了初始结构基频。

分别取约束区间相对宽度为 1%、5%、10%、20%，分析约束区间相对宽度对优化结果的影响。表 7 给

出了优化结果随约束区间相对宽度的变化。可以发现，约束区间相对宽度对动柔度模值优化结果的影响不大。

表 7 不同约束区间相对宽度下的优化结果对比

Tab. 7 Comparison of optimization results under the relative widths of different constraint intervals

约束区间相对宽度	输出载荷/mN		A : B	动柔度模值/J	优化结果
	A	B			
1%	2596.06	1310.66	1.98	$35.27 \times 10^{-6}$	
5%	2407.58	1261.23	1.91	$34.95 \times 10^{-6}$	
10%	2393.62	1325.88	1.81	$34.99 \times 10^{-6}$	
20%	2382.02	1487.57	1.60	$34.78 \times 10^{-6}$	

### 4.2 L 形板算例

考虑如图 8 所示的 L 形板整体结构，将灰色区域设计域离散为 6000 个厚度为 1 mm 的 1 mm×1 mm 大小的平面应力单元，下方弹性支撑离散为 12950 个

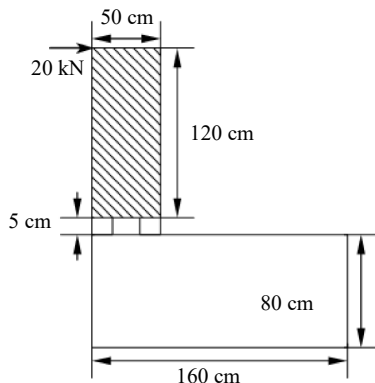


图 8 L 形板示意图

Fig. 8 Schematic diagram of L-shape plate

厚度为 1 mm 的 1 mm×1 mm 大小的平面应力单元。外载荷频率为 50 Hz，幅值大小为 20 kN，加载位置如图 8 所示。 $\alpha$  和  $\beta$  分别为  $10^{-2}$  和  $10^{-4}$ 。

局部结构与整体结构的连接边界等效为弹簧单元与集中质量单元，如图 9 所示。进行遗传算法多目标优化，多目标优化问题 Pareto 解集如图 10 所示。

控制目标为 A 与 B 处的动载荷输出比值为 5 : 3，约束区间相对宽度为 12%，体积分数为 50%。将初始设计变量设置为在设计域中均匀分布，设计变量的初始值  $\eta_0 = 0.5$ ，初始结构基频为 264.84 Hz。计算得到的结构拓扑构型如图 11 所示。在优化结果中，A、B 处的输出载荷幅值大小分别为 15.49 和 8.32 kN，达到了动载荷精确输出的要求。优化后局部结构基频为 272.42 Hz，整体结构基频为 263.09 Hz。结果表明，结构边界条件等效在结构优化中是有效的。结构动柔度模值变化如图 12 所示。结果表明，结构动柔度模值得到了有效降低。

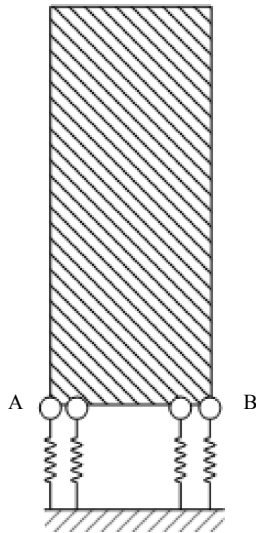


图 9 边界条件等效示意图

Fig. 9 Schematic diagram of equivalent boundary conditions

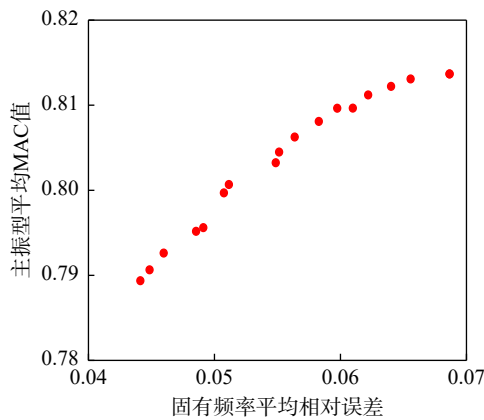


图 10 多目标优化问题 Pareto 解集

Fig. 10 Pareto solution sets for multi-objective optimization problem



图 11 优化结果

Fig. 11 Optimization results

从 Pareto 解集中选取边界条件等效参数, 并计算边界条件等效后局部结构的前 2 阶固有频率与主振型。计算固有频率相对误差和主振型 MAC 值如表 8

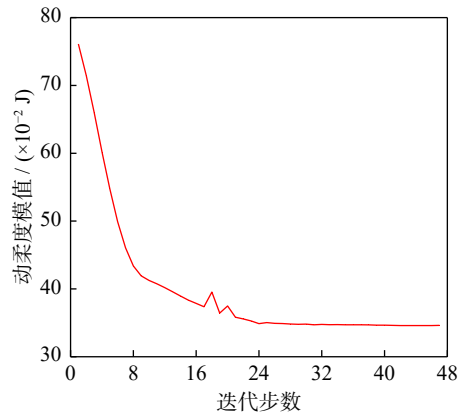


图 12 目标函数变化

Fig. 12 Variation of objective function

所示。结果表明, 优化得到的局部结构前 2 阶模态固有频率与相应的整体结构模态固有频率吻合较好, 说明本算例中弹簧单元与集中质量单元可以在一定程度上对边界条件进行合理等效。

表 8 固有频率相对误差及主振型 MAC 值

Tab. 8 Relative errors of natural frequencies and MAC values of main modes

固有频率与主振型阶数	固有频率相对误差	主振型MAC值
1阶	0.18%	0.99
2阶	13.55%	0.64

### 4.3 四分之一锥算例

考虑如图 13 所示的舱段结构<sup>[11]</sup>, 以上半部分的四分之一锥形面作为设计域, 两侧与底边为对称边界条件, 将锥形面设计域划分为 9500 个壳单元, 圆柱面非设计域也划分为 4600 个壳单元。锥形面顶部和底部的半径分别为 300 和 800 mm。锥形面与圆柱面的高度均为 1200 mm。

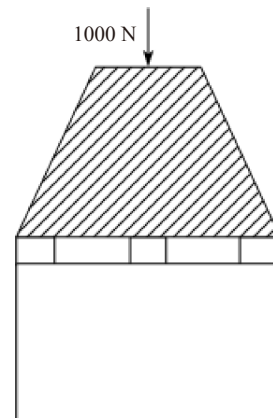


图 13 舱段结构示意图

Fig. 13 Schematic diagram of the cabin section structure

计算得到整体结构的固有频率与主振型, 将局部结构与整体结构的连接边界等效为弹簧单元与集中质量单元, 如图 14 所示。图 15 给出了该算例的多

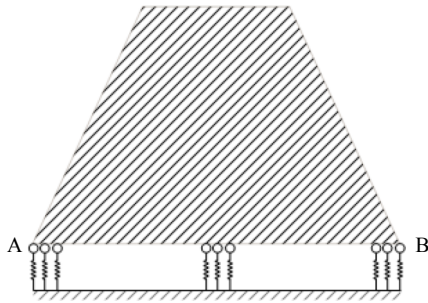


图 14 边界条件等效示意图

Fig. 14 Schematic diagram of equivalent boundary conditions

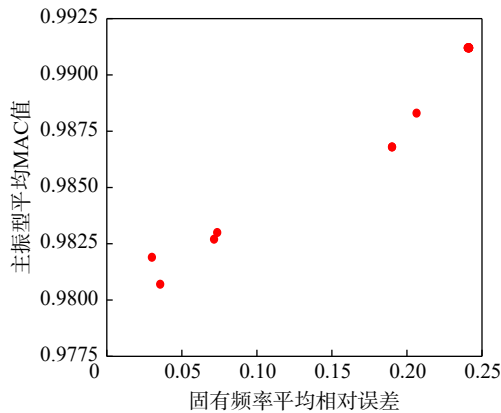


图 15 多目标优化问题 Pareto 解集

Fig. 15 Pareto solution sets for multi-objective optimization problem

目标优化问题 Pareto 解集。

从 Pareto 解集中选取单元参数并计算边界条件等效后局部结构的前 2 阶固有频率与主振型。计算固有频率相对误差及主振型 MAC 值如表 9 所示。结果表明, 弹簧单元与集中质量单元在一定程度上对边界条件进行了合理等效。

表 9 固有频率相对误差及主振型 MAC 值

Tab. 9 Relative errors of natural frequencies and MAC values of main modes

固有频率与主振型阶数	固有频率相对误差	主振型MAC值
1阶	4.6%	0.98
2阶	10%	0.98

动载荷控制目标为 A 与 B 处的动载荷输出比值为 5 : 4, 约束区间相对宽度为 15%, 体积分数为 60%。将初始设计变量设置为在设计域中均匀分布, 设计变量的初始值  $\eta_c = 0.6$ , 外载频率为 20 Hz, 幅值为 1000 N, 加载位置如图 13 所示。载荷输出位置 A 和 B 的位置如图 14 所示。

初始结构基频为 82.35 Hz, 计算得到的拓扑构型如图 16 所示, 而结构动柔度模值变化如图 17 所示。在优化结果中, A、B 处输出载荷的幅值大小分别为 379.35 和 356.98 N, 达到了动载荷精确输出的要求, 同时结构的动柔度模值也得到了有效的降低。优化

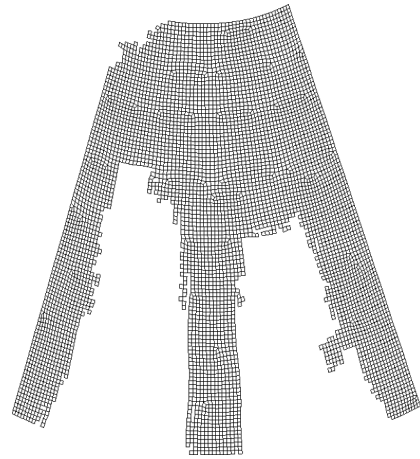


图 16 优化结果

Fig. 16 Optimization results

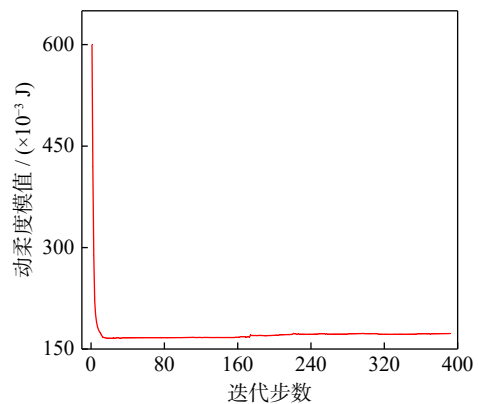


图 17 目标函数变化

Fig. 17 Variation of objective function

后局部结构基频为 12.2 Hz, 整体结构基频为 12.05 Hz。结果表明, 拓扑优化对结构传力路径进行了合理规划。

## 5 结 论

本文提出了一种基于边界条件等效的动载荷输出控制的结构拓扑优化方法。该方法将局部结构与整体结构之间的非理想边界条件等效为弹簧单元与集中质量单元, 再通过合理规划结构传力路径, 使输入载荷通过结构精确分配到若干输出点上, 从而实现载荷传递精确可控的目的。

数值算例表明, 利用弹簧单元与集中质量单元可以对结构非理想边界条件进行合理的等效, 从而为结构优化分析提供高精度输入模型, 同时边界处的弹簧单元将动载荷输出转化为单元节点位移输出, 有效减小了问题求解的复杂度。结构拓扑优化得到了清晰的传力路径, 能够有效实现载荷的精确输出。动载荷输出约束的存在使结构的材料分配与传力路径布局得到进一步优化。结果表明, 基于边界条件等效的动载荷输出控制的结构拓扑优化不仅可以实现动柔度最小的设计, 还可以实现动载荷的精确输出。

通过比较不同体积分数比、不同外载荷频率以

及不同约束区间相对宽度的算例, 本文发现约束区间相对宽度对于最终优化结果的动柔度模值影响不大, 外载荷频率与体积分数比对于优化结果会产生一定影响。拓扑优化对传力路径的规划不仅可以实现最小动柔度设计, 还可以通过边界条件等效与合理的约束建模实现精确的动载荷输出设计。

综上所述, 本文提出的拓扑优化方法充分考虑了周围结构对局部结构的影响, 从而保证了结构优化的正确性。由于边界条件等效本身存在一定的误差, 这会对优化结果不可避免地产生一定影响, 如何更加准确地进行边界条件等效将成为今后的研究目标。

### 参考文献:

- [1] BENDSØE M P, SIGMUND O. Material interpolation schemes in topology optimization[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 1999, 69(9): 635-654.
- [2] QUERIN O M, YOUNG V, STEVEN G P, et al. Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimisation[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 189(2): 559-573.
- [3] ZHANG W S, YUAN J, ZHANG J, et al. A new topology optimization approach based on Moving Morphable Components (MMC) and the ersatz material model[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2016, 53(6): 1243-1260.
- [4] 范瑞祥, 姚瑞娟, 朱振涛, 等. 一种新型 7 台火箭发动机并联推力传递结构方案 [J]. *载人航天*, 2020, 26(5): 630-634. FAN Ruixiang, YAO Ruijuan, ZHU Zhentao, et al. A new type of thrust transmission structure of paralleled seven rocket engines[J]. *Manned Spaceflight*, 2020, 26(5): 630-634.
- [5] WANG C, ZHU J H, WU M Q, et al. Multi-scale design and optimization for solid-lattice hybrid structures and their application to aerospace vehicle components[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2021, 34(5): 386-398.
- [6] WANG J, ZHU J H, HOU J, et al. Lightweight design of a bolt-flange sealing structure based on topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2020, 62(6): 3413-3428.
- [7] 王志祥, 雷勇军, 段静波, 等. 重型运载火箭集中力扩散舱段多区域联合设计与优化 [J]. *航空学报*, 2022, 43(3): 225135. WANG Zhixiang, LEI Yongjun, DUAN Jingbo, et al. Multi-region integrated design and optimization of concentrated-force diffusion component in heavy-lift launch vehicle[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2022, 43(3): 225135.
- [8] WANG C, ZHOU E L, WU Y, et al. Transient stress-constrained topology optimization of impacted structures[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2023, 66(4): 94.
- [9] 张家鑫, 王博, 牛飞, 等. 分级型放射肋短壳结构集中力扩散优化设计 [J]. *计算力学学报*, 2014, 31(2): 141-148. ZHANG Jiixin, WANG Bo, NIU Fei, et al. Optimal design of concentrated force diffusion for short shell structure using hierarchical radial ribs[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2014, 31(2): 141-148.
- [10] GAO T, QIU L B, ZHANG W H. Topology optimization of continuum structures subjected to the variance constraint of reaction forces[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2017, 56(4): 755-765.
- [11] CAO Y F, GU X J, ZHU J H, et al. Precise output loads control of load-diffusion components with topology optimization[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2020, 33(3): 933-946.
- [12] CAO Y F, ZHU J H, GUO W J, et al. Structure topology optimization method for output loads precise control[J]. *Scientia Sinica Physica, Mechanica & Astronomica*, 2018, 48(1): 014606.
- [13] HOU J, GU X J, ZHU J H, et al. Topology optimization of joint load control with geometrical nonlinearity[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2020, 33(1): 372-382.
- [14] TANG L, GAO T, SONG L L, et al. Thermo-elastic topology optimization of continuum structures subjected to load allocation constraints[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2022, 65(12): 344.
- [15] 谷小军, 徐珉轲, 张薇, 等. 重型运载火箭发动机机架与舱段传力结构一体化拓扑优化设计 [J]. *火箭推进*, 2022, 48(2): 27-35. GU Xiaojun, XU Minke, ZHANG Wei, et al. Integrated topology optimization design of heavy rocket engine frame and segment force transmission structure[J]. *Journal of Rocket Propulsion*, 2022, 48(2): 27-35.
- [16] 李佳霖, 赵剑, 孙直, 等. 基于移动可变形组件法(MMC)的运载火箭传力机架结构的轻量化设计 [J]. *力学学报*, 2022, 54(1): 244-251. LI Jialin, ZHAO Jian, SUN Zhi, et al. Lightweight design of transmission frame structures for launch vehicles based on moving morphable components(MMC) approach[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(1): 244-251.
- [17] 王一航, 彭珍瑞. 基于 Kriging 模型和分层模型修正技术的结构边界条件识别 [J]. *振动与冲击*, 2023, 42(6): 134-142. WANG Yihang, PENG Zhenrui. Identification of structural boundary conditions based on the Kriging model and the hierarchical model updating technique[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2023, 42(6): 134-142.
- [18] POON N M K, MARTINS J R R A. An adaptive approach to constraint aggregation using adjoint sensitivity analysis[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2007, 34(1): 61-73.
- [19] STOLPE M, SVANBERG K. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, 22(2): 116-124.
- [20] LAZAROV B S, SIGMUND O. Filters in topology optimization based on Helmholtz-type differential equations[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, 86(6): 765-781.
- [21] XU S L, CAI Y W, CHENG G D. Volume preserving nonlinear density filter based on Heaviside functions[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010, 41(4): 495-505.
- [22] SVANBERG K. MMA and GCMMA-two methods for nonlinear optimization[C/OL][2023-09-18]. 2014.

第一作者: 张理昊(2000—), 男, 硕士研究生。

E-mail: 3216045zlh@163.com

通信作者: 于开平(1968—), 男, 博士, 教授。

E-mail: yukp@hit.edu.cn