

一种考虑时滞的结构显式最优控制方法

林晓祥¹, 苏 成^{1,2,3}

(1. 华南理工大学土木与交通学院, 广东 广州 510640; 2. 亚热带建筑与城市科学全国重点实验室, 广东 广州 510640; 3. 广州城市理工学院, 广东 广州 510800)

摘要: 时滞严重影响控制系统的性能和受控结构的稳定性, 一定程度上限制了主动控制技术的工程应用。时滞经典最优控制方法虽然能够考虑时滞问题带来的影响, 但该方法在控制律设计中将时滞问题转化为无时滞问题, 需要引入考虑时滞段内控制力的扩维状态向量, 因此需要求解扩阶 Riccati 方程, 增加了控制律设计的计算量。本文致力于发展一种考虑时滞的结构显式最优控制方法。建立时滞系统动力响应的时域显式表达式, 进而建立关于时滞最优控制力的无约束线性二次型优化问题, 推导得到时滞显式最优控制律。由于在显式表达式中可以方便地考虑时滞控制力对结构动力响应的影响, 所以时滞显式最优控制律的推导过程无需进行状态向量的扩维处理, 且无需求解 Riccati 方程。以地震激励下设置主动控制装置的三层剪切型结构为数值算例, 研究了时滞对主动控制效果的影响, 并验证了所提方法的有效性。

关键词: 时滞; 主动控制; 经典最优控制; 显式最优控制

中图分类号: O328; TB114.2 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202309033

Time-delay explicit optimal control method for structures

LIN Xiaoxiang¹, SU Cheng^{1,2,3}

(1. School of Civil Engineering and Transportation, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China;
2. State Key Laboratory of Subtropical Building and Urban Science, Guangzhou 510640, China;
3. Guangzhou City University of Technology, Guangzhou 510800, China)

Abstract: Time-delay has significant influence on the performance of control systems and the stability of controlled structures, which, to a certain degree, limits the application of active control techniques in practical engineering. Although the time-delay classical optimal control method can consider the influence of time-delay, the time-delay problem needs to be transformed into a delay-free problem through introducing an augmented state vector associated with the control forces within the time-delay interval. Therefore, the augmented Riccati equation needs to be solved, leading to a large amount of computational cost for the design of control law. This paper is devoted to developing a time-delay explicit optimal control method of structures. The explicit time-domain expressions of dynamic responses are first established for the system with time-delay control. On this basis, the time-delay explicit optimal control law can be analytically derived from an unconstrained linear quadratic optimization problem. As the effect of time-delay control force on structural dynamic responses can be readily considered with the aid of the explicit time-domain formulation, the time-delay explicit optimal control law can be derived without augmented treatment of the state vector and solving of the Riccati equation. A numerical example involving a three-storey shear-type structure with an active controller subjected to seismic excitation is presented to investigate the effect of time-delay and validate the feasibility of the proposed method.

Keywords: time-delay; active control; classical optimal control; explicit optimal control

自 1972 年 YAO^[1] 提出结构控制概念以来, 理论和试验研究表明, 主动控制是提升结构抗震和抗风等性能的理想方法^[2]。然而, 由于荷载或响应测量、控制力计算和作动器执行等客观因素的存在, 主动控制系统不可避免地存在控制力时滞问题^[3]。时滞

将导致控制系统无法及时有效地为结构提供最优控制力, 从而无法达到预定的控制效果, 甚至严重降低或破坏结构控制的稳定性^[4-5]。

结构主动控制的时滞问题已引起诸多学者的关注。目前已提出的时滞补偿方法包括泰勒级数展开

收稿日期: 2023-09-12; **修订日期:** 2023-12-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(52178479, 51678252); 广东省自然科学基金资助项目(2023A1515012822); 广东省现代土木工程重点实验室项目(2021B1212040003)

方法^[6]、移相方法^[7]、Padé近似方法^[8]、递推响应方法^[9]等。然而,以上方法是在无时滞控制律的基础上通过某种技术进行时滞补偿,随着时滞的增加,控制系统的性能和受控结构的稳定性将难以保证,因此这些补偿方法通常仅适用于短时滞的情况^[10]。

为了处理长时滞的情况,不少学者在控制律的设计阶段就考虑了时滞问题。基本思路是,首先将时滞系统转化为等效无时滞系统,然后按无时滞系统进行控制律的设计,最后推导得到时滞控制律。在该思路下,一类是基于状态变换技术^[11-12]所发展起来的方法。蔡国平等^[13]利用这种变换技术发展了适用于时滞线性系统的经典最优控制方法。在此基础上,安方等^[14]提出了时滞加速度反馈控制器设计方法。然而,这类方法所建立的控制律含有积分项,较难得到实际应用^[15]。另一类是基于扩维格式所发展起来的方法。李卫等^[16]以及CAI等^[17]引入考虑时滞段内控制力的扩维状态向量,将时滞系统的状态方程转化为无时滞系统的状态方程形式,进而基于扩维状态向量建立经典线性二次型性能指标,最终通过求解扩阶Riccati方程获得时滞最优控制力。基于扩维格式的时滞控制方法还可以参考文献[18-20]。然而,这类方法虽然能够有效处理长时滞的控制问题,但是扩维后状态方程的维数将大于原状态方程的维数,特别是对于控制装置较多且时滞较长的情况,这将大大增加时滞控制律设计的计算量^[21]。

最近提出的一类结构显式最优控制方法^[22-23]通过引入结构动力响应的时域显式表达式,将传统的以运动微分方程为约束条件的线性二次型优化问题转化为无约束优化问题,从而直接获得显式最优控制律,并且能够实现大规模结构的降维控制。在此基础上,本文进一步提出考虑时滞的结构显式最优控制方法,在时滞显式最优控制律设计中无需引入扩维状态向量,且无需求解Riccati方程。以地震激励下设置主动控制装置的三层剪切型结构为例,研究时滞对主动控制效果的影响,并验证所提方法的有效性。

1 时滞系统动力响应的时域显式表达式

含主动控制装置结构的运动方程可以表示为:

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) = L_F F(t) + L_U U(t), 0 \leq t \leq T \quad (1)$$

式中, M 、 C 和 K 分别为结构的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵; $X(t)$ 、 $\dot{X}(t)$ 和 $\ddot{X}(t)$ 分别为结构的位移

向量、速度向量和加速度向量; $F(t)$ 为外部激励向量; $U(t)$ 为时滞控制力向量,由于时滞 $t_D = \lambda \Delta t$ 的影响,该控制力向量需要提前在时刻 $t - t_D$ 确定,其中 Δt 为时间步长, $\lambda \geq 1$ 为给定的时滞步数; L_F 和 L_U 分别为 $F(t)$ 和 $U(t)$ 的定位矩阵; T 为外部激励的持时。值得注意的是,本文假设所有主动控制装置的时滞相同,且为时间步长的整数倍。

定义结构状态向量 $V(t) = [X^T(t) \dot{X}^T(t)]^T$,式(1)可以改写为如下状态方程形式:

$$\dot{V}(t) = HV(t) + W_F F(t) + W_U U(t), 0 \leq t \leq T \quad (2)$$

其中, H 、 W_F 和 W_U 可以表示为:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, W_F = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}L_F \end{bmatrix}, W_U = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}L_U \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中, 0 和 I 分别为零矩阵和单位矩阵。

根据式(2),可以推导得到结构状态向量的递推表达式为:

$$V_i = TV_{i-1} + Q_1 W_F F_{i-1} + Q_2 W_F F_i + Q_1 W_U U_{i-1} + Q_2 W_U U_i, 1 \leq i \leq n \quad (4)$$

式中, $n = T/\Delta t$ 为时间步数; $V_i = V(t_i)$, $V_{i-1} = V(t_{i-1})$, $F_i = F(t_i)$, $F_{i-1} = F(t_{i-1})$, $U_i = U(t_i)$, $U_{i-1} = U(t_{i-1})$,其中 $t_i = i\Delta t$, $t_{i-1} = (i-1)\Delta t$; T 、 Q_1 和 Q_2 根据Newmark- β 积分格式确定,可以表示为^[24]:

$$\begin{aligned} T &= -(H - R_1)^{-1}(R_1 + R_2 H), \\ Q_1 &= -(H - R_1)^{-1}R_2, \quad Q_2 = -(H - R_1)^{-1}, \\ R_1 &= \begin{bmatrix} a_3 I & 0 \\ a_0 I & 0 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} a_4 I & a_5 I \\ a_1 I & a_2 I \end{bmatrix}, \\ a_0 &= \frac{1}{\beta \Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{1}{\beta \Delta t}, \quad a_2 = \frac{1}{2\beta} - 1, \\ a_3 &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t}, \quad a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1, \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} - 2 \right) \end{aligned} \quad (5)$$

式中, $\gamma = 0.5$, $\beta = 0.25$,此时数值积分具有无条件稳定性^[25]。

不失一般性,假定 $V_0 = 0$, $F_0 = 0$, $U_0 = 0$,基于式(4)能够推导得到结构状态向量的时域显式表达式为:

$$V_i = \sum_{j=1}^i A_{i,j}^F F_j + \sum_{j=1}^i A_{i,j}^U U_j, 1 \leq i \leq n \quad (6)$$

式中, $A_{i,j}^F$ 和 $A_{i,j}^U$ ($1 \leq j \leq i \leq n$)分别为 F_j 和 U_j 的系数矩阵,仅取决于式(1)中的 M 、 C 、 K 、 L_F 和 L_U ,采用如下闭合公式进行计算^[22-23]:

$$\begin{cases} A_{1,1}^F = Q_2 W_F, \quad A_{2,1}^F = (TQ_2 + Q_1)W_F \\ A_{i,1}^F = TA_{i-1,1}^F, \quad 3 \leq i \leq n \\ A_{i,j}^F = A_{i-1,j-1}^F, \quad 2 \leq j \leq i \leq n \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} A_{1,1}^U = Q_2 W_U, A_{2,1}^U = (TQ_2 + Q_1)W_U \\ A_{i,1}^U = TA_{i-1,1}^U, 3 \leq i \leq n \\ A_{i,j}^U = A_{i-1,j-1}^U, 2 \leq j \leq i \leq n \end{cases} \quad (8)$$

由式(7)和(8)可见,仅系数矩阵 $A_{i,1}^F$ 和 $A_{i,1}^U$ ($1 \leq i \leq n$) 需要计算和储存,其余系数矩阵均可由 $A_{i,1}^F$ 和 $A_{i,1}^U$ ($1 \leq i \leq n$) 直接确定。

应当指出,由于存在时滞 $t_D = \lambda \Delta t$,时刻 t_1 至 t_λ 内主动控制装置的控制力仍未作用至结构上,因此式(6)中存在 $U_1 = U_2 = \dots = U_\lambda = 0$,此时式(6)可以理解为时滞系统动力响应的时域显式表达式。

2 时滞显式最优控制律的设计

本节将基于式(6)所示的动力响应显式表达式,开展时滞最优控制律的设计。由于存在时滞 $t_D = \lambda \Delta t$,时刻 t_k ($1 \leq k \leq \lambda$) 的最优控制力无法考虑,仅需考虑时刻 t_k ($\lambda + 1 \leq k \leq n$) 的最优控制力。此外,通常没有必要针对整个结构状态向量 $V(t)$ 实施控制,仅需要针对部分关键响应向量 $v(t)$ 实施控制。因此,针对时刻 t_k ($\lambda + 1 \leq k \leq n$),定义如下考虑时滞的时变线性二次型性能指标:

$$J_k(U_k) = \frac{1}{2} \sum_{i=k}^{k+q} v_i^T Q v_i \Delta t + \frac{1}{2} U_k^T R U_k, \lambda + 1 \leq k \leq n \quad (9)$$

式中, U_k 为时刻 t_k 的时滞控制力向量; $J_k(U_k)$ 为时刻 t_k 的性能指标; Q 和 R 分别为给定的对称半正定和对称正定的权矩阵; q 为响应最大控制步数,表示时滞控制力向量 U_k 的优化仅考虑时刻 t_k 及后续 q 步响应的控制效果; $v_i = v(t_i)$ ($k \leq i \leq k+q$) 为时刻 t_k 及后续 q 步的控制响应。

为了考虑时滞的影响,时刻 t_k 的时滞控制力向量 U_k 需要提前在时刻 $t_{k-\lambda}$ 优化确定,此时仅能获得外部激励向量 F_j ($1 \leq j \leq k-\lambda$) 的测量结果。此外,如前所述,由于时滞的影响, $U_j = 0$ ($1 \leq j \leq \lambda$), 仅需考虑 U_j ($\lambda + 1 \leq j \leq k$) 的影响。因此,式(9)中的控制响应可根据式(6)显式地表示为:

$$v_i = \phi V_i = \sum_{j=1}^{k-\lambda} a_{i,j}^F F_j + \sum_{j=\lambda+1}^k a_{i,j}^U U_j; \quad \lambda + 1 \leq k \leq n, k \leq i \leq k+q \quad (10)$$

其中,系数矩阵 $a_{i,j}^F$ 和 $a_{i,j}^U$ 可采用下式进行计算:

$$\begin{cases} a_{i,j}^F = \phi A_{i,j}^F; k \leq i \leq k+q, 1 \leq j \leq k-\lambda \\ a_{i,j}^U = \phi A_{i,j}^U; k \leq i \leq k+q, \lambda + 1 \leq j \leq k \end{cases} \quad (11)$$

式中, ϕ 为反映关键响应向量 $v(t)$ 和状态向量 $V(t)$ 之间关系的转换矩阵。

将式(10)代入式(9),可以得到考虑时滞的线性二次型最优控制问题的无约束优化模型如下:

find $U_k = U(t_k)$,

min $J_k(U_k) =$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=k}^{k+q} \left[\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{k-\lambda} a_{i,j}^F F_j + \\ \sum_{j=\lambda+1}^k a_{i,j}^U U_j \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{k-\lambda} a_{i,j}^F F_j + \\ \sum_{j=\lambda+1}^k a_{i,j}^U U_j \end{pmatrix} \right] \Delta t +$$

$$\frac{1}{2} U_k^T R U_k, \lambda + 1 \leq k \leq n \quad (12)$$

令 $\partial J_k / \partial U_k = 0$ ($\lambda + 1 \leq k \leq n$), 可以推导得到时滞最优控制力向量为(推导过程见附录):

$$U_k = \begin{cases} G_{\lambda+1,1}^F F_1, k = \lambda + 1 \\ \sum_{j=1}^{k-\lambda} G_{k,j}^F F_j + \sum_{j=\lambda+1}^{k-1} G_{k,j}^U U_j, \lambda + 2 \leq k \leq n \end{cases} \quad (13)$$

式中, $G_{k,j}^F$ 和 $G_{k,j}^U$ 为时滞最优控制律的增益矩阵,可以表示为:

$$\begin{cases} G_{k,j}^F = -(\varphi_{k,k} + R)^{-1} \psi_{k,j}, 1 \leq j \leq k-\lambda \leq n-\lambda \\ G_{k,j}^U = -(\varphi_{k,k} + R)^{-1} \varphi_{k,j}, \lambda + 1 \leq j < k \leq n \\ \psi_{k,j} = \sum_{i=k}^{k+q} (a_{i,k}^U)^T Q (a_{i,j}^F) \Delta t, 1 \leq j \leq k-\lambda \leq n-\lambda \\ \varphi_{k,j} = \sum_{i=k}^{k+q} (a_{i,k}^U)^T Q (a_{i,j}^U) \Delta t, \lambda + 1 \leq j \leq k \leq n \end{cases} \quad (14)$$

为了便于分析以及实际应用,最大控制步数 q 通常取为定值^[22]。进一步,利用式(7)和(8)所示系数矩阵 $A_{i,j}^F$ 和 $A_{i,j}^U$ 的递推关系,以及式(11)所示关于 $a_{i,j}^F$ 和 $a_{i,j}^U$ 的变换关系,式(14)中的增益矩阵 $G_{k,j}^F$ 和 $G_{k,j}^U$ 也可以用递推公式表示为:

$$\begin{cases} G_{k,1}^F = -(\varphi_{\lambda+1,\lambda+1} + R)^{-1} \psi_{k,1}, \lambda + 1 \leq k \leq n \\ G_{k,j}^F = G_{k-1,j-1}^F, 2 \leq j \leq k-\lambda \leq n-\lambda \\ G_{k,\lambda+1}^U = -(\varphi_{\lambda+1,\lambda+1} + R)^{-1} \varphi_{k,\lambda+1}, \lambda + 2 \leq k \leq n \\ G_{k,j}^U = G_{k-1,j-1}^U, \lambda + 2 \leq j < k \leq n \\ \psi_{k,1} = \sum_{i=k}^{k+q} (a_{i,k}^U)^T Q (a_{i,1}^F) \Delta t, \lambda + 1 \leq k \leq n \\ \varphi_{k,\lambda+1} = \sum_{i=k}^{k+q} (a_{i,k}^U)^T Q (a_{i,\lambda+1}^U) \Delta t, \lambda + 1 \leq k \leq n \end{cases} \quad (15)$$

式(13)代表了一种时滞显式最优控制律。显然,当 $\lambda = 0$ 即不存在控制力时滞问题时,式(13)所反映的控制律与文献[22]所得到的无时滞显式最优控制律是完全一致的。此外,由于式(15)中的增益矩阵 $G_{k,1}^F$ 和 $G_{k,\lambda+1}^U$ 与外部激励无关,因此它们可以提前离线计算和储存。

3 受控结构的响应分析

从式(13)中可以看出,时刻 t_k ($\lambda + 1 \leq k \leq n$)

的时滞最优控制力向量 U_k 取决于时刻 t_1 到 $t_{k-\lambda}$ 的已测量外部激励向量 $F_j (1 \leq j \leq k-\lambda)$, 以及时刻 $t_{\lambda+1}$ 到 t_{k-1} 的时滞最优控制力向量 $U_j (\lambda+1 \leq j \leq k-1)$ 。为了方便应用, 由式(13)可以进一步推导得到仅用外部激励向量表达的时滞最优控制力向量为:

$$U_k = G_{k,1}F_1 + G_{k,2}F_2 + \cdots + G_{k,k-\lambda}F_{k-\lambda} = G_k F_{[k-\lambda]}, \lambda+1 \leq k \leq n \quad (16)$$

式中, $F_{[k-\lambda]} = [F_1^T F_2^T \cdots F_{k-\lambda}^T]^T$; $G_k = [G_{k,1} G_{k,2} \cdots G_{k,k-\lambda}]$, 其中 $G_{k,j} (1 \leq j \leq k-\lambda)$ 为对应于 U_k 的系数矩阵, 可以表示为:

$$\begin{cases} G_{\lambda+1,1} = G_{\lambda+1,1}^F \\ G_{k,1} = G_{k,1}^F + \sum_{j=\lambda+1}^{k-1} G_{k,j}^U G_{j,1}, \lambda+2 \leq k \leq n \\ G_{k,j} = G_{k-1,j-1}, 2 \leq j \leq k-\lambda \leq n-\lambda \end{cases} \quad (17)$$

将式(16)代入式(6), 可以得到仅用外部激励向量表达的结构状态向量为:

$$V_k = A_{k,1}F_1 + A_{k,2}F_2 + \cdots + A_{k,k}F_k = A_k F_{[k]}, 1 \leq k \leq n \quad (18)$$

式中, $F_{[k]} = [F_1^T F_2^T \cdots F_k^T]^T$; $A_k = [A_{k,1} A_{k,2} \cdots A_{k,k}]$, 其中 $A_{k,j} (1 \leq j \leq k)$ 为对应于 V_k 的系数矩阵, 可以表示为:

$$\begin{cases} A_{k,1} = A_{k,1}^F, 1 \leq k \leq \lambda \\ A_{k,1} = A_{k,1}^F + \sum_{j=\lambda+1}^k A_{k,j}^U G_{j,1}, \lambda+1 \leq k \leq n \\ A_{k,j} = A_{k-1,j-1}, 2 \leq j \leq k \leq n \end{cases} \quad (19)$$

类似于式(7)和(8), 由式(17)和(19)可见, 仅系数矩阵 $G_{k,1} (\lambda+1 \leq k \leq n)$ 和 $A_{k,1} (1 \leq k \leq n)$ 需要计算和储存, 其余系数矩阵均可由 $G_{k,1} (\lambda+1 \leq k \leq n)$ 和 $A_{k,1} (1 \leq k \leq n)$ 直接确定。

如前所述, 由于式(15)中的增益矩阵与外部激励无关, 因此式(19)所示的系数矩阵也与外部激励无关, 即式(18)既适用于确定性激励也适用于随机激励下时滞系统的动力响应分析。当外部激励向量 $F(t)$ 为零均值非平稳随机过程向量时, 利用统计矩运算规则由式(18)可以直接得到结构状态向量 V_k 的协方差矩阵为^[26]:

$$\text{Cov}(V_k, V_k) = A_k \text{Cov}(F_{[k]}, F_{[k]}) A_k^T, 1 \leq k \leq n \quad (20)$$

式中, $\text{Cov}(F_{[k]}, F_{[k]})$ 为 $F_{[k]}$ 的协方差矩阵, 它可以表示为:

$$\text{Cov}(F_{[k]}, F_{[k]}) = E(F_{[k]} F_{[k]}^T) = \begin{bmatrix} R_F(t_1, t_1) & R_F(t_1, t_2) & \cdots & R_F(t_1, t_k) \\ R_F(t_2, t_1) & R_F(t_2, t_2) & \cdots & R_F(t_2, t_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_F(t_k, t_1) & R_F(t_k, t_2) & \cdots & R_F(t_k, t_k) \end{bmatrix}, 1 \leq k \leq n \quad (21)$$

式中, $E(\cdot)$ 为数学期望; $R_F(t, \tau)$ 为非平稳随机激励向量 $F(t)$ 的互相关函数矩阵。

4 数值算例

4.1 确定性分析

以图1所示含主动控制装置的三层剪切型结构为数值算例, 验证本文所提出的时滞显式最优控制方法的有效性, 其中 $a_g(t)$ 表示地震激励。结构各层的质量和刚度分别取为 $m_i = 4.0 \times 10^5 \text{ kg}$ 和 $k_i = 2.5 \times 10^8 \text{ N/m}$ ($i = 1, 2, 3$), 结构的基本周期为 0.4 s。采用瑞利阻尼模型, 取结构第1和3阶振型的阻尼比为 $\zeta = 2\%$ 。考虑结构分别受到 El-Centro 波、Northridge 波和天津波三条地震波的作用, 峰值加速度均调幅为 2 m/s^2 , 持时均取 $T = 10 \text{ s}$, 分别如图2~4所示。

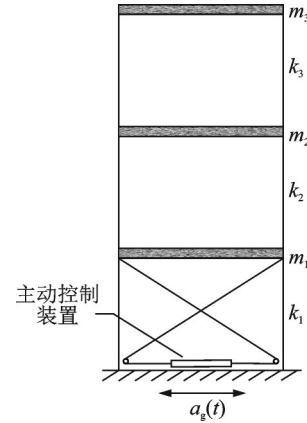


图1 含主动控制装置的三层剪切型结构

Fig.1 A three-storey shear-type structure with active controller

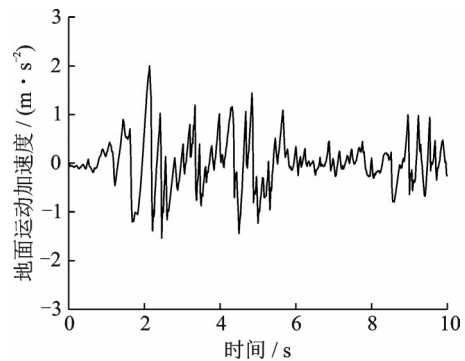


图2 El-Centro地震波

Fig.2 El-Centro earthquake wave

采用本文提出的时滞显式最优控制(time-delay explicit optimal control, TD-EOC)方法进行结构最优控制律设计。在式(9)所示性能指标中, 控制响应向量 $v(t)$ 考虑为结构状态向量 $V(t)$, 最大控制步数取为 $q = 20$, 权矩阵取为:

$$Q = 100 \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, R = 10^{-9} \quad (22)$$

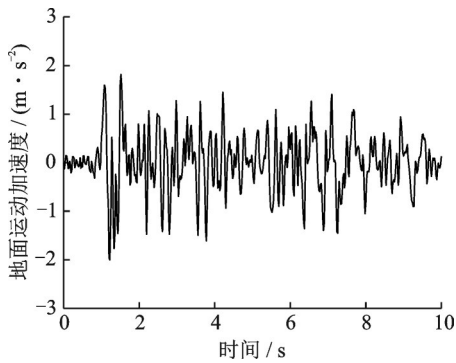


图 3 Northridge地震波

Fig. 3 Northridge earthquake wave

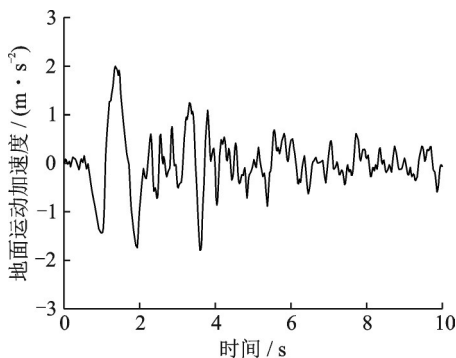


图 4 天津地震波

Fig. 4 Tianjin earthquake wave

式中, θ 为控制律权参数, 用于调节控制力水平, 本文考虑 $\theta = 7.0$ 和 $\theta = 7.5$ 两种情况, 分别对应低控制力水平和高控制力水平。

为了进行对比, 同时考虑无时滞补偿的显式最优控制 (non-compensatory explicit optimal control, NC-EOC) 方法, 即按无时滞显式最优控制方法^[22]确定最优控制力后, 将其延后 t_D 时间并作用至结构上, 而未做任何补偿。NC-EOC 所取的控制参数同 TD-EOC 的控制参数。

取时间步长 $\Delta t = 0.02$ s。分别考虑控制力时滞 t_D 为 0.02、0.04、 \dots 、2.00 s, 相应的时滞步数分别为 $\lambda = 1, 2, \dots, 100$ 。对于图 2 所示 El-Centro 波, 采用 TD-EOC 和 NC-EOC 两种控制方法所得到的结构顶层位移峰值随时滞 t_D 变化的曲线如图 5 所示。为方便比较, 在图 5 中还给出了无控情况下顶层位移峰值的计算结果。对于图 3 和 4 所示 Northridge 波和天津波, 相应的计算结果分别如图 6 和 7 所示。

从图 5~7 中可以看出, NC-EOC 所得顶层位移峰值随着时滞的增大而呈振荡变化, 在大部分时滞范围内 NC-EOC 所得顶层位移峰值大幅超过了无控情况下的顶层位移峰值, 这表明在结构主动控制中考虑控制力时滞影响是非常有必要的。事实上, NC-EOC 是将无时滞条件下得到的最优控制力延后 t_D 时间并直接作用至结构上, 这意味着作用至结构上各时刻的控制力均不是最优的, 因此 NC-EOC 方法的控制效果是无法得到保证的, 甚至劣于无控

情况下的效果。相比而言, TD-EOC 所得顶层位移峰值仅随着时滞的增大而缓慢增大。以图 5 所示 El-Centro 波作用下的顶层位移峰值为例, 在 $t_D \leq 0.48$ s ($\lambda = 24$) 时, TD-EOC 的控制效果仍然可以达到无时滞控制效果的 30% 以上, 这充分说明了本文提出的 TD-EOC 方法的有效性。

此外, 从图 5~7 中还可以看出, NC-EOC 会出现高控制力水平 ($\theta = 7.5$) 的顶层位移峰值超过低控制力水平 ($\theta = 7.0$) 的现象, 而 TD-EOC 在高控制力水平下所得顶层位移峰值始终小于在低控制力水平下所得顶层位移峰值, 验证了本文提出的 TD-EOC 方法在不同控制力水平下的合理性。

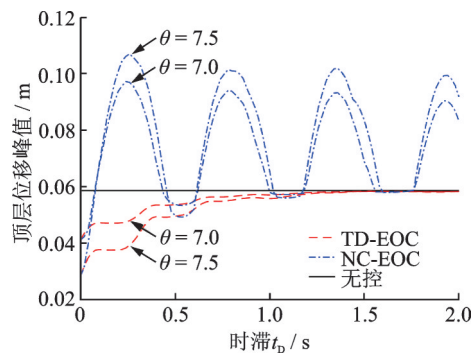


图 5 顶层位移峰值随时滞 t_D 变化的曲线 (El-Centro 地震波)

Fig. 5 Maximum top-storey displacement varying with time-delay t_D (El-Centro earthquake wave)

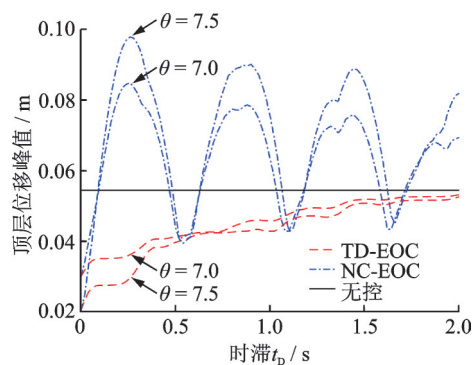


图 6 顶层位移峰值随时滞 t_D 变化的曲线 (Northridge 地震波)

Fig. 6 Maximum top-storey displacement varying with time-delay t_D (Northridge earthquake wave)

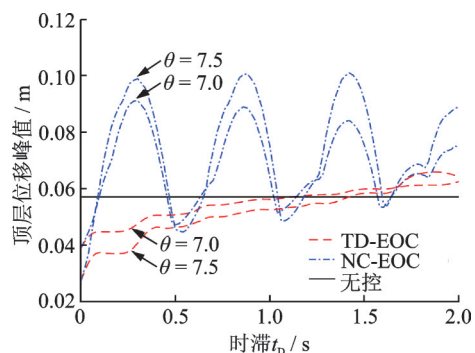


图 7 顶层位移峰值随时滞 t_D 变化的曲线 (天津地震波)

Fig. 7 Maximum top-storey displacement varying with time-delay t_D (Tianjin earthquake wave)

4.2 随机分析

由于TD-EOC方法也适用于随机激励情况,因此进一步考虑图1所示结构受到随机地震激励的作用,并假定地震激励为零均值均匀调制非平稳随机过程,它可以表示为:

$$a_g(t) = g(t)a_g^0(t) \quad (23)$$

式中, $g(t) = e^{-0.2t} - e^{-0.4t}$ 为均匀调制函数; $a_g^0(t)$ 为零均值平稳随机过程,其功率谱密度函数取为Kanai-Tajimi谱^[27],即

$$S_{a_g^0}(\omega) = \frac{\omega_g^4 + 4\zeta_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_g^2 \omega_g^2 \omega^2} S_0 \quad (24)$$

式中, $\omega_g = 15.708$ rad/s, $\zeta_g = 0.6$, $S_0 = 0.1$ m²/s³。 $a_g^0(t)$ 的相关函数可以表示为^[28]:

$$R_{a_g^0}(\tau) = \frac{\pi S_0}{2} e^{-\zeta_g \omega_d |\tau|} [\mu_1 \cos(\omega_d \tau) + \mu_2 \sin(\omega_d |\tau|)] \quad (25)$$

其中:

$$\omega_d = \omega_g \sqrt{1 - \zeta_g^2}, \mu_1 = \frac{\omega_g (1 + 4\zeta_g^2)}{\zeta_g}, \mu_2 = \frac{\omega_g (1 - 4\zeta_g^2)}{\sqrt{1 - \zeta_g^2}} \quad (26)$$

相应地, $a_g(t)$ 的相关函数可以表示为:

$$R_{a_g}(t, \tau) = g(t)g(t + \tau)R_{a_g^0}(\tau) \quad (27)$$

采用TD-EOC和NC-EOC两种控制方法对结构进行控制,控制参数如前所述,其中权参数取为 $\theta = 7.5$ 。在时滞步数 $\lambda = 4$ 和 $\lambda = 8$ 两种情况下,结构顶层位移标准差时程分别如图8和9所示。为了方便比较,在上述两图中,还同时给出无时滞情况 ($t_b = 0$) 下显式最优控制 (explicit optimal control, EOC) 方法得到的顶层位移标准差时程,以及无控情况下的顶层位移标准差时程。

从图8和9中可以看出,无论 $\lambda = 4$ 还是 $\lambda = 8$, TD-EOC的控制效果均仅次于无时滞理想情况下EOC的控制效果,验证了TD-EOC在随机激励情况

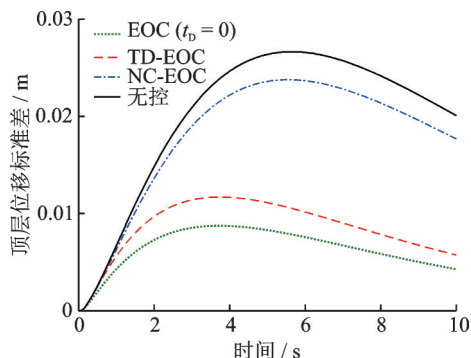


图8 顶层位移标准差时程 ($\lambda = 4$)

Fig. 8 Time-history of standard deviation of top-storey displacement ($\lambda = 4$)

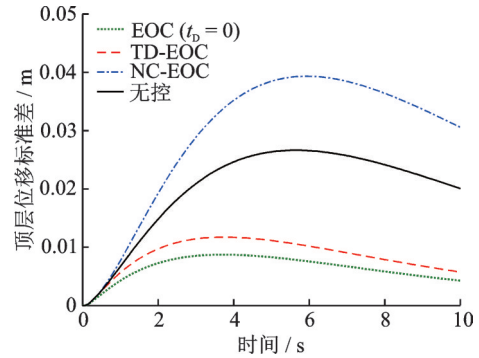


图9 顶层位移标准差时程 ($\lambda = 8$)

Fig. 9 Time-history of standard deviation of top-storey displacement ($\lambda = 8$)

下的有效性。相比之下,NC-EOC的控制效果则远不如无时滞情况下EOC的控制效果,尤其是 $\lambda = 8$ 时,NC-EOC得到的顶层位移标准差甚至比无控情况下的结果还大,这说明NC-EOC在较长时滞下已完全失去控制效果。这与4.1节得到的结论相一致。

在上述控制过程中,控制响应向量 $v(t)$ 考虑为结构状态向量 $V(t)$,为6维控制向量。为了考察TD-EOC的降维控制能力,控制响应仅取为结构顶层位移。在保证控制力水平相一致的情况下,分别考察各层位移的控制效果。以 $\lambda = 8$ 为例,TD-EOC全维控制和降维控制得到的各层位移标准差时程如图10所示。从图10中可见,降维控制也能得到良好的控制效果,其中顶层位移和二层位移控制效果更好。这说明对于剪切型结构,无需对整个结构状态向量 $V(t)$ 进行控制,仅针对顶层位移进行降维控制即能获得理想的控制效果。

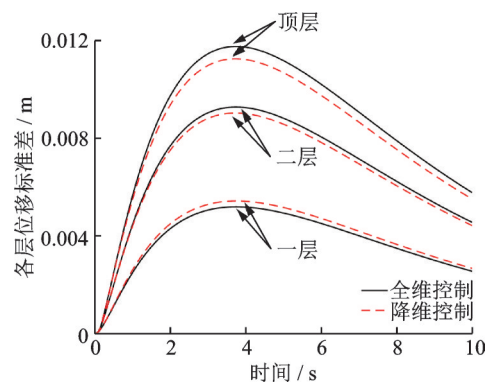


图10 全维控制和降维控制下各层位移标准差时程 (TD-EOC, $\lambda = 8$)

Fig. 10 Time-history of standard deviations of different storeys with full-dimension and dimension-reduced control (TD-EOC, $\lambda = 8$)

5 结论

本文在时滞系统动力响应时域显式表达式的基

基础上,建立了关于时滞最优控制力向量的无约束线性二次型优化问题,从而解析地推导了时滞显式最优控制律,提出了一种考虑时滞的结构显式最优控制方法。由于在显式表达式中可以方便地考虑时滞控制力对任意受控响应的影响,因此时滞显式最优控制律的推导过程无需引入扩维状态向量,且无需求解 Riccati 方程,还可以实现针对任意受控响应的降维控制。数值算例结果表明,采用不考虑时滞的显式最优控制方法时,在大部分时滞范围内,结构响应均大幅增加,甚至超过无控时的结构响应,表明时滞对于主动控制效果具有显著的影响;而采用考虑时滞的显式最优控制方法时,结构响应随着时滞的增加而缓慢增大,在较大的时滞范围内仍然可以获得理想的控制效果,验证了本文所提时滞显式最优控制方法的有效性。

参考文献:

- [1] YAO J T P. Concept of structural control[J]. Journal of the Structural Division, 1972, 98(7): 1567-1574.
- [2] HOUSNER G W, BERGMAN L A, CAUGHEY T K, et al. Structural control: past, present, and future [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1997, 123(9): 897-971.
- [3] HU H Y, WANG Z H. Dynamics of Controlled Mechanical Systems with Delayed Feedback[M]. Berlin: Springer, 2002.
- [4] YANG J N, AKBARPOUR A, ASKAR G. Effect of time delay on control of seismic-excited buildings[J]. Journal of Structural Engineering, 1990, 116(10): 2801-2814.
- [5] AGRAWAL A K, YANG J N. Effect of fixed time delay on stability and performance of actively controlled civil engineering structures[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1997, 26(11): 1169-1185.
- [6] ABDEL-ROHMAN M. Time-delay effects on actively damped structures[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1987, 113(11): 1709-1719.
- [7] CHUNG L L, REINHORN A M, SOONG T T. Experiments on active control of seismic structures[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1988, 114(2): 241-256.
- [8] LOH C H, LIN P Y. Kalman filter approach for the control of seismic-induced building vibration using active mass damper systems[J]. The Structural Design of Tall Buildings, 1997, 6(3): 209-224.
- [9] AGRAWAL A K, YANG J N. Compensation of time-delay for active control of civil engineering structures[C]// Proceedings of 12th Engineering Mechanics Conference. La Jolla, California, 1998: 225-228.
- [10] AGRAWAL A K, YANG J N. Compensation of time-delay for control of civil engineering structures[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2000, 29(1): 37-62.
- [11] KWON W, PEARSON A. Feedback stabilization of linear systems with delayed control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1980, 25(2): 266-269.
- [12] ARTSTEIN Z. Linear systems with delayed controls: a reduction[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1982, 27(4): 869-879.
- [13] 蔡国平, 黄金枝. 时滞线性系统振动主动控制的最优化方法[J]. 上海交通大学学报, 2002, 36(11): 1596-1599.
CAI Guoping, HUANG Jinzhi. Optimal control method for linear vibration systems with time delay in control [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2002, 36(11): 1596-1599.
- [14] 安方, 陈卫东. 时滞加速度反馈的振动主动控制方法研究[J]. 振动工程学报, 2012, 25(4): 401-410.
AN Fang, CHEN Weidong. Active vibration control using time-delayed acceleration feedback[J]. Journal of Vibration Engineering, 2012, 25(4): 401-410.
- [15] CAI G P, HUANG J Z. Instantaneous optimal method for vibration control of linear sampled-data systems with time delay in control[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 262(5): 1057-1071.
- [16] 李卫, 孙增圻. 包含延时的采样系统的最优控制[J]. 控制理论与应用, 1987, 4(2): 10-18.
LI Wei, SUN Zengqi. The linear quadratic optimal control for sampled-data systems with delay in control[J]. Control Theory and Applications, 1987, 4(2): 10-18.
- [17] CAI G P, HUANG J Z. Optimal control method for seismically excited building structures with time-delay in control[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2002, 128(6): 602-612.
- [18] 谭述君, 吴志刚, 钟万勰. 考虑控制器时滞的建筑结构减振 H_{∞} 控制方法[J]. 振动工程学报, 2006, 19(4): 537-542.
TAN Shujun, WU Zhigang, ZHONG Wanxie. H_{∞} control for vibration attenuation of seismic-excited buildings with controller delays foundation [J]. Journal of Vibration Engineering, 2006, 19(4): 537-542.
- [19] CHU S Y, LIN C C, CHUNG L L, et al. Optimal performance of discrete-time direct output-feedback structural control with delayed control forces[J]. Structural Control and Health Monitoring, 2008, 15(1): 20-42.
- [20] PENG Y B, ZHANG Z K, SUN P F. Optimal stochastic compensator for time-delayed active structural control systems subjected to random excitations[J]. Journal of Sound and Vibration, 2021, 515: 116507.
- [21] HARAGUCHI M, HU H Y. Using a new discretization approach to design a delayed LQG controller[J]. Journal

- of Sound and Vibration, 2008, 314(3-5): 558-570.
- [22] GUO H Z, SU C, CHEN T C. Stochastic optimal control of structures based on explicit time-domain method [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2022, 148(6): 04022024.
- [23] CHEN T C, GUO H Z, SU C. Structural optimal control based on explicit time-domain method [J]. Structural Engineering and Mechanics, 2023, 85(5): 607-620.
- [24] XIAN J H, SU C. Stochastic optimization of uncertain viscous dampers for energy-dissipation structures under random seismic excitations [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2022, 164: 108208.
- [25] NEWMARK N M. A method of computation for structural dynamics [J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1959, 85(3): 67-94.
- [26] SU C, XIAN J H, HUANG H. An iterative equivalent linearization approach for stochastic sensitivity analysis of hysteretic systems under seismic excitations based on explicit time-domain method [J]. Computers and Structures, 2021, 242: 106396.
- [27] KANAI K. Semi-empirical formula for the seismic characteristics of the ground [J]. Bulletin of the Earthquake Research Institute, 1957, 35(2): 309-325.
- [28] 孙广俊, 李鸿晶. 平稳随机地震地面运动过程模型及其统计特征 [J]. 地震工程与工程振动, 2004, 24(6): 21-26.
- SUN Guangjun, LI Hongjing. Stationary models of random earthquake ground motion and their statistical properties [J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2004, 24(6): 21-26.

第一作者: 林晓祥(1996—), 男, 博士研究生。

E-mail: 823185048@qq.com

通信作者: 苏成(1968—), 男, 博士, 教授。

E-mail: cvchsu@scut.edu.cn

附录:

式(13)的推导过程:

令 $\partial J_k / \partial U_k = 0 (\lambda + 1 \leq k \leq n)$, 并利用权矩阵 Q 和 R 的对称性, 由式(12)可以推导得到:

$$\sum_{i=k}^{k+q} \left[(a_{i,k}^U)^T Q \left(\sum_{j=1}^{k-\lambda} a_{i,j}^F F_j \right) + (a_{i,k}^U)^T Q \left(\sum_{j=\lambda+1}^{k-1} a_{i,j}^U U_j \right) \right] \Delta t + \left[\sum_{i=k}^{k+q} (a_{i,k}^U)^T Q (a_{i,k}^U) \Delta t + R \right] U_k = 0, \lambda + 1 \leq k \leq n \quad (A1)$$

调整式(A1)中的求和顺序并求逆, 可以推导得到时滞最优控制力向量为:

$$U_k = \sum_{j=1}^{k-\lambda} \left[- \left(\sum_{i=k}^{k+q} (a_{i,k}^U)^T Q (a_{i,k}^U) \Delta t + R \right)^{-1} \sum_{i=k}^{k+q} (a_{i,k}^U)^T Q (a_{i,j}^F) \Delta t \right] F_j + \sum_{j=\lambda+1}^{k-1} \left[- \left(\sum_{i=k}^{k+q} (a_{i,k}^U)^T Q (a_{i,k}^U) \Delta t + R \right)^{-1} \sum_{i=k}^{k+q} (a_{i,k}^U)^T Q (a_{i,j}^U) \Delta t \right] U_j, \lambda + 1 \leq k \leq n \quad (A2)$$

进一步, 式(A2)可以简写为:

$$U_k = \sum_{j=1}^{k-\lambda} G_{k,j}^F F_j + \sum_{j=\lambda+1}^{k-1} G_{k,j}^U U_j, \lambda + 1 \leq k \leq n \quad (A3)$$

其中, 增益矩阵 $G_{k,j}^F$ 和 $G_{k,j}^U$ 如式(14)所示。当 $k = \lambda + 1$ 时, 式(A3)等号右边仅有第一项。因此, 最终所得时滞最优控制力向量如式(13)所示。