

# 端齿同轴度误差对双锥度叶片-机匣系统加速特性分析

金 森<sup>1,2</sup>, 王艾伦<sup>2</sup>, 王青山<sup>2</sup>, 尹伊君<sup>2</sup>, 陈雅孺<sup>2</sup>, 衡 星<sup>2</sup>

(1. 中国北方车辆研究所, 北京 100072; 2. 中南大学高性能复杂制造国家重点实验室, 湖南长沙 410083)

**摘要:** 在航空涡轮发动机装配过程中, 端齿同轴度误差是一个重要的技术指标, 对整机系统的性能和使用寿命有重要的影响。以航空涡轮发动机涡轮叶片-机匣为研究对象, 考虑将端齿同轴度误差(定位误差和定向角误差)引入到叶尖-机匣的间隙方程中, 基于 Hamilton 能量原理和 Galerkin 方法建立了考虑双锥度叶片-机匣系统的非线性动力学模型, 通过 ANSYS 有限元方法验证了理论模型的正确性。在此基础上, 运用 Newmark- $\beta$  数值求解方法分析了不同端齿同轴度误差对系统在定值加速函数(函数 1)与余弦波加速函数(函数 2)下的瞬态响应的影响, 数值计算结果表明: 增加同轴度误差, 会进一步缩小叶尖与机匣之间的最小间隙, 导致碰摩诱发的振幅更加严重; 与函数 1 相比, 采用函数 2 的加速度可以更快地通过系统临界转速, 导致碰摩开始时间提前, 当靠近目标转速时, 减速作用可以有效减少最大碰摩力和侵入量, 以减缓系统的隆起现象和跳跃现象。

**关键词:** 转子动力学; 叶片-机匣碰摩; 端齿同轴度误差; 余弦波加速函数; 跳跃和隆起现象

**中图分类号:** V231.96; V232.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2025)02-0420-12

**DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2025.02.021

## Acceleration characteristics of double taper blade-casing system considering the coaxiality errors of the curvic couplings

JIN Miao<sup>1,2</sup>, WANG Ailun<sup>2</sup>, WANG Qingshan<sup>2</sup>, YIN Yijun<sup>2</sup>, CHEN Yaru<sup>2</sup>, HENG Xing<sup>2</sup>

(1. China North Vehicle Research Institute, Beijing 100072, China;

2. State Key Laboratory of High Performance Complex Manufacturing, Central South University, Changsha 410083, China)

**Abstract:** In the assembly process of an aero-turboshaft engine, the coaxiality errors of the curvic couplings are an important technical index, significantly affecting the performance and service life of the whole system. This study takes the turbine blade-casing of an aero-turboshaft engine as an example. The coaxiality errors (including both positional and orientation errors) of the curvic couplings are introduced into the clearance function of the blade tip-casing, the nonlinear dynamic model of a rotating taper-blade casing system is then proposed based on the Hamilton variational principle and the Galerkin method. The effectiveness of the proposed model is verified using ANSYS software. Two different acceleration functions are proposed: Function 1 assumes a constant acceleration value, while Function 2 adopts a cosine wave form for acceleration. The effects of different coaxiality errors of the curvic couplings on the transient response during both acceleration functions are further investigated using Newmark- $\beta$  numerical method. Simulation results show that an increase in the coaxiality error of the curvic coupling leads to a reduction in the minimum clearance between the blade tip and casing, resulting in a more serious amplitude amplification induced by blade-tip casing rubbing. Compared with Function 1, Function 2 enables the system to pass through the critical speed more quickly, which advances the start time of rubbing. In addition, the maximum rubbing force and penetration depth can be effectively reduced due to the effects of the deceleration, weakening the rising and jumping phenomena in the system.

**Keywords:** rotor dynamics; blade-casing rubbing; coaxiality errors of the curvic couplings; cosine wave acceleration function; rising and jumping phenomena

**收稿日期:** 2023-01-20; **修订日期:** 2023-06-26

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(52075554); 高性能复杂制造国家重点实验室资助项目(ZZYJKT2021-07); 东北大学航空动力装备振动及控制教育部重点实验室研究基金资助项目(VCAME202006); 中南大学研究生创新基金资助项目(No.2019zzts256)

航空涡轴发动机是现代先进直升机的“心脏”<sup>[1-2]</sup>,含有端齿连接结构的转子-双锥度叶片系统是其重要的组成部分,其中端齿连接结构是系统的高精密定心元件,通过中心拉杆对端齿连接结构施加预紧力,使得多盘转子连接成一体<sup>[3-4]</sup>。双锥度叶片主要应用于涡轴发动机的涡轮叶片,其设计思想是通过宽度和厚度的锥度比来调节叶片的气动载荷分布,从而降低叶片的弯曲应力和应力集中程度,提高叶片的承载能力和耐久性。端齿连接结构在装配中或机器长期运行中,不可避免地需要经常拆卸,由于其具有多个齿啮合,导致装配工艺复杂,定位要求更高,需要高精度零点定位装置分多工序完成装配。因此,端齿连接结构在装配过程中,难免会产生端齿同轴度误差,包括定位误差和定向角误差,这会使得叶尖与机匣之间的间隙逐渐缩小。此外,根据航空涡轴发动机的设计要求,转子系统需要快速通过前2阶临界转速,因此转子系统经常处于启停或者加减速的状态,此时系统的加速度随时间变化,导致高转速旋转的叶片在加速过程中与机匣系统之间发生碰摩的可能性增大。因此,对含有端齿同轴度误差的转子-双锥度叶片系统的加速响应特性进行分析,对中国航空涡轴发动机的理论研究和安全运行具有重要的指导意义。

近年来,国内外学者对于连接结构的定位装配进行了理论研究,发现定位精度不仅关系到转子装配质量,还影响转子的动力学特性。关于定位误差和装夹误差的相关研究,崔相武<sup>[5]</sup>以端齿连接结构为定位元件设计了一种可重复、高精度、适合回转工况的随行夹具,并对其进行了理论分析。王哲<sup>[6]</sup>以端齿连接结构作为高精度零点定位装置,发现定位误差中不仅存在端齿的加工误差,还包括了装夹过程的误差。为了减少端齿装配误差的影响,CROCCOLO等<sup>[7-8]</sup>采用有限元软件对端齿连接结构装配过程中的定位误差进行了仿真分析,并且推导了端齿装配过程中的定位误差与端齿角不对中之间的数学表达式,并通过实验验证了表达式的准确性。关于同轴度误差的相关研究,WANG等<sup>[9]</sup>提出了一种间接测量端齿连接结构的定位和定向角误差的方法,并在此基础上,推导了一种快速测量端齿同轴度误差的优化模型,通过实验验证了其效果。CHAI等<sup>[10]</sup>提出了一种非接触式光学测量方案,可用于快速测量锥齿轮和花键之间的同轴度误差。ZHANG等<sup>[11]</sup>提出了一种用于测量航空发动机装配过程中多级转子之间同轴度的方法,通过比较基于中心基准线、单一测量基准以及公共基准轴的三种测量模型,并结合实验表明,基于公共基准轴的同轴度测试值比另外两个方法的测量值更精确。关于端齿连接结

构的加工误差方面的研究,基于弹性平均原理,刘恒等<sup>[12]</sup>推导了端齿连接结构的轴向偏差和同心偏差的计算方法。孙帅等<sup>[13]</sup>基于端齿连接结构的加工原理,分析了关键结构参数(节距偏差和初始齿面间隙)对接触状态的影响规律,并通过优化安装相位误差,减少了初始齿面间隙的方差和均值。

国内外学者还对于转子-叶片动力学建模展开了一系列的研究。关于碰摩方面的研究,靳玉林等<sup>[14]</sup>采用理论和实验相结合的方法建立了含有叶片-机匣碰摩、滚动轴承游隙、联轴器不对中及不平衡响应等因素的双转子-轴承非线性系统,并分析了其碰摩响应。张力等<sup>[15]</sup>考虑碰摩造成的约束作用,建立了碰摩约束条件的涡扇叶片-机匣的微分方程。基于小波转换时-频信号的分析方法,梁智超等<sup>[16]</sup>对转子-支撑-机匣碰摩模拟试验器的机匣振动响应进行了提取。太兴宇等<sup>[17]</sup>采用理论和实验的方法模拟了转子-叶片-定子系统的碰摩响应,研究表明,由于定子的约束,系统的响应有明显的“削峰”现象。基于多尺度摄动理论,李炳强等<sup>[18]</sup>模拟了不同法向碰摩力、圆盘偏心以及阻尼系数对转子-叶片系统在主共振状态下稳定性的影响规律。基于相似设计理论,赵璐等<sup>[19]</sup>和侯理臻等<sup>[20]</sup>搭建了含有叶片飞脱装置的叶片-机匣碰摩实验器模型,研究表明增大不平衡量会引发超次谐波。马辉等<sup>[21]</sup>和郭旭民等<sup>[22]</sup>采用Timoshenko梁和圆柱壳理论,构建了旋转叶片-柔性机匣动力学有限元模型,并分析了定加速度过程中,由于碰摩导致的叶片振动和机匣振动响应。关于双锥度叶片方面的研究,MADI等<sup>[23]</sup>对比了锥形叶片和无锥度叶片在风机涡轮叶片中动力学特性的差异,结果表明锥形叶片在高转速下具有更高的效率,能够降低压力损失和气动损失。HU等<sup>[24]</sup>基于平均Navier-Stokes方程,建立了无人机旋翼系统的数值模型,并分析了长宽比和锥度比对系统悬停性能的影响。研究结果表明,适当的锥度比可以增加叶片的弦长,从而提高系统的效率。ZHANG等<sup>[25]</sup>研究了失谐量对叶片-轮盘-机匣碰摩特性的影响,并在建立旋转叶片的有限元模型中考虑了双锥度叶片的变截面特征和陀螺效应。

综上所述,关于端齿连接结构装配过程中同轴度误差的研究,相关学者主要集中在连接结构的测量方法方面,目前尚缺乏端齿安装过程中所产生的定位误差和定向角误差对动力学特性影响方面的研究。此外,针对转子-叶片碰摩问题,虽然一些学者考虑了定加速过程中的振动响应,但是关于余弦加速函数下振动响应的研究仍然鲜有报道。特别地,端齿连接结构的设计、加工以及装配等技术已成为新一代航空涡轴发动机的核心技术。然而,国内的

相关研究相对薄弱,端齿连接结构的同轴度误差对转子系统的装配精度和力学特性的影响尚不明确。此外,在直升机执行任务时,不同加速环境下的振动特性呈现明显差异,这已成为中国亟待解决的科学难题。

基于上述研究背景,本文首先分析了端齿盘的定位原理,并推导出了端齿装配过程中的同轴度误差(包括定位误差和定向角误差)的数学表达式。然后,针对航空涡轴发动机中叶片的复杂形面特征,基于Hamilton能量原理和Galerkin法建立了含有变截面的双锥度叶片-机匣系统模型,并通过有限元方法验证了模型的有效性和正确性。最后,采用数值积分方法模拟了两种加速函数下端齿同轴度误差对叶片-机匣碰摩响应在瞬态过程中的影响规律。

### 1 动力学模型的建立

图1为含有端齿连接结构的叶片-机匣示意图,其耦合系统主要由双锥度叶片、机匣、端齿连接结构、轮盘等组成,其中圆弧段AD表示机匣弧长,弧长对应的角度为60°。

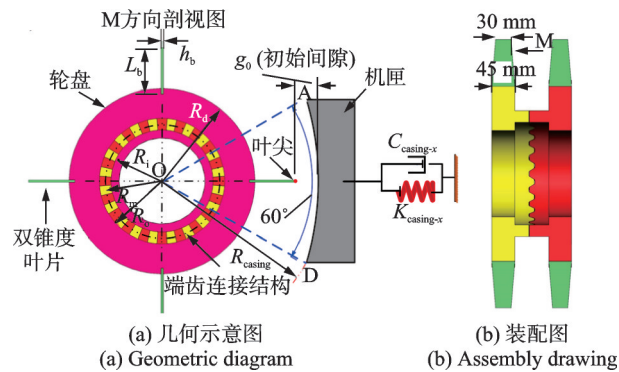


图1 含有端齿连接结构的叶片-机匣系统示意图  
Fig.1 The schematic diagram of the blade-casing system with curv couplings

为了建模方便,本文在建立理论模型时采用了以下假设条件:

- (1) 各结构的材料均为各向同性材料,其本构关系满足胡克定律,受力状态满足不变性公理。
- (2) 不考虑轮盘的柔性变形,将轮盘视为刚性盘。
- (3) 叶片简化为双锥度悬臂梁,机匣简化为集中质量模型,叶片-机匣碰摩采用点-点接触来模拟接触特征,碰摩范围仅发生在圆弧段AD内。
- (4) 忽略碰摩过程中的摩擦热效应。
- (5) 不考虑端齿连接结构啮合过程中的接触效应。

#### 1.1 端齿同轴度误差的模型

端齿连接结构的定位和装配过程主要分为三个

步骤:首先是端齿基准盘的定位;其次是旋转工作转台与端齿下盘的啮合(随行夹具与端齿上盘的装夹);最后是端齿上齿盘和下齿盘的预紧装配。在完成端齿定位和安装过程中可能存在两种装配误差:第一种误差是端齿定位误差,即端齿上、下齿盘在预紧啮合过程中,由于加工误差以及预紧滑移,会引起端齿下齿盘和上齿盘的形心与基准盘中心线之间存在轴向偏移  $P_{mis}$ ,如图2(a)所示;第二种误差是端齿定向角误差,即端齿的上齿盘和下齿盘在完成啮合之前,端齿下齿盘和旋转工作转台一起转动  $N$  个齿,产生了旋转角  $\theta_m$ 。由于轴向偏移的作用,导致旋转角与转动中心线之间存在角偏差  $\gamma_{mis}$ ,如图2(b)所示。

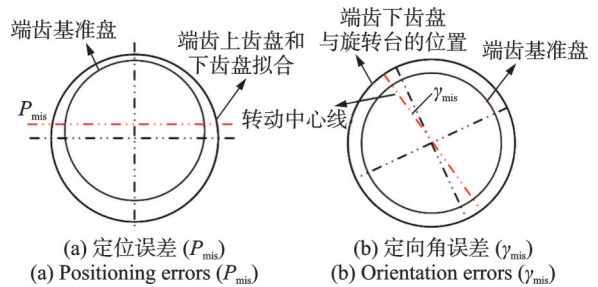


图2 端齿连接结构同轴度误差示意图  
Fig.2 Schematic diagram of coaxiality errors of curvic couplings

上述两种误差在端齿安装过程中同时存在,因此将它们统称为同轴度误差  $C_{mis}$ ,如图3所示,根据几何位置关系,预紧前、后的端齿基准半径差  $r$  和定向角误差  $\gamma_{mis}$  的数学表达式如下:

$$r = \sqrt{R_m^2 + P_{mis}^2 - 2R_m P_{mis} \cos \theta_m}$$

$$\gamma_{mis} = \arcsin \left[ \frac{P_{mis}}{r} \sin \theta_m \right] \tag{1}$$

式中,  $R_m$  表示端齿圆盘的节圆半径,  $R_m = (R_1 + R_0) / 2$ ,  $R_1$  和  $R_0$  分别表示端齿圆盘的内半径和外半径;  $\theta_m$  表示端齿下齿盘的旋转角。

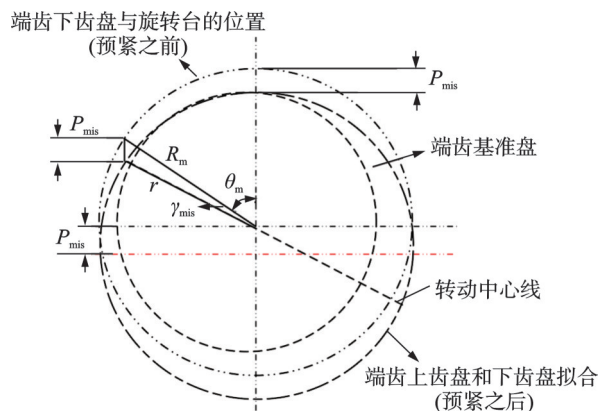


图3 端齿定位误差和定向角误差之间的关系  
Fig.3 The relationship between the positioning errors and orientation errors

通过式(1)可知,端齿下齿盘与转动中心线之间的定向度误差呈 90°对称分布,并且在旋转角  $\theta_m = 90^\circ$  时,定向角误差达到最大值。此外,为了满足端齿连接结构的装配条件,最大定向角误差  $\gamma_{\text{mis-max}}$  必须小于端齿圆盘相邻齿间的角度步长,因此,得到以下数学表达式:

$$\gamma_{\text{mis-max}} < \frac{360^\circ}{z} \quad (2)$$

式中,  $z$  表示端齿连接结构的齿数。

结合式(1)和(2),为确保正确安装,可以计算出最大定位误差  $P_{\text{mis-max}}$  的上限阈值需要满足最大定向角误差  $\gamma_{\text{mis-max}}$  ( $\theta_m = 90^\circ$ ) 的情况,表达式为:

$$P_{\text{mis-max}} < r \cdot \sin\left(\frac{360^\circ}{z}\right) \approx R_m \sin\left(\frac{360^\circ}{z}\right) \quad (3)$$

### 1.2 双锥度叶片的建模

双锥度叶片如图 4 所示,其中  $L_b$  表示叶片的总长度,  $b_1$ 、 $b_2$  分别为叶根和叶尖处的宽度,  $h_1$ 、 $h_2$  分别为叶根和叶尖处的厚度。  $u$ 、 $v$ 、 $w$  分别表示双锥度叶尖上任意位置 Q 点在径向、横向和摆动方向上的变形。  $X_b$ 、 $Y_b$ 、 $Z_b$  分别为双锥度叶片在局部坐标系下的径向、横向、摆动方向上的位移。  $\xi_b$  为叶片上无量纲轴向位置 ( $\xi_b = x/L_b$ ),  $b_b(\xi_b)$  和  $h_b(\xi_b)$  分别表示叶片在轴向位置  $\xi_b$  上任意截面相对于叶根处的宽度和厚度,具体的表达式如下:

$$b_b(\xi_b) = b_1 [1 + (1 - \eta_b) \xi_b] \quad (4)$$

$$h_b(\xi_b) = h_1 [1 + (1 - \eta_h) \xi_b] \quad (5)$$

式中,  $\eta_b$  和  $\eta_h$  分别为双锥度叶片沿着宽度方向、厚度方向的锥度比<sup>[26]</sup>,具体表达式为:  $\eta_b = 1 - b_2/b_1$  和  $\eta_h = 1 - h_2/h_1$ 。

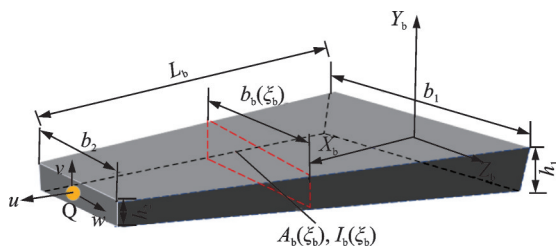


图 4 双锥度旋转叶片示意图

Fig. 4 Schematic diagram of the double taper rotating blade

假设轴向位置  $\xi_b$  处的变截面面积  $A_b(\xi_b)$  为具有两个待定系数的函数模式,变截面惯性矩  $I_b(\xi_b)$  为具有四个待定系数的函数模式,其表达式如下:

$$A_b(\xi_b) = A_{b1} (1 + \epsilon_1 \xi_b + \epsilon_2 \xi_b^2) \quad (6)$$

$$I_b(\xi_b) = I_{b1} (1 + \gamma_1 \xi_b + \gamma_2 \xi_b^2 + \gamma_3 \xi_b^3 + \gamma_4 \xi_b^4) \quad (7)$$

式中,  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  为变截面面积的二次待定系数;  $\gamma_1$ 、 $\gamma_2$ 、

$\gamma_3$ 、 $\gamma_4$  为变截面惯性矩的四次待定系数;  $A_{b1}$ 、 $I_{b1}$  分别为叶根处的变截面面积、变截面惯性矩,表达式分别为:  $A_{b1} = b_1 h_1$  和  $I_{b1} = (1/12) b_1 h_1^3$ 。

进一步,将式(4)和(5)代入到式(6)和(7)中,求得待定系数表达式为:

$$\epsilon_1 = -(\eta_b + \eta_h), \epsilon_2 = \eta_b \eta_h \quad (8)$$

$$\gamma_1 = -3\eta_h - \eta_b, \gamma_2 = 6\eta_h^2,$$

$$\gamma_3 = -4\eta_h^3, \gamma_4 = \eta_b \eta_h^3 \quad (9)$$

双锥度叶片的总动能表达式如下<sup>[27]</sup>:

$$T_{\text{blade}} = \frac{1}{2} \rho_b \int_0^{L_b} \dot{r}_Q^2 A_b(\xi_b) dx \quad (10)$$

式中,  $\rho_b$  表示双锥度叶片的密度;  $r_Q$  表示固定坐标下的位移矢量,符号“ $\cdot$ ”表示时间的一阶偏导,其具体的符号描述和表达式参见文献[3,28]。

考虑到双锥度叶片在旋转过程中的离心载荷、旋转软化、叶片-机匣的碰摩特征,其势能可以表示为:

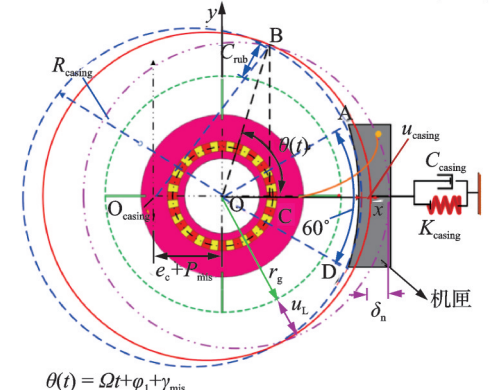
$$U_{\text{blade}} = \frac{1}{2} \int_0^{L_b} f_c(x) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{L_b} E_b I_b(\xi_b) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{L_b} E_b A_b(\xi_b) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{L_b} \kappa_b A_b(\xi_b) G_b \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \varphi \right)^2 dx + \frac{1}{2} F_n \int_0^{L_b} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \quad (11)$$

式中,  $\varphi$  表示叶片在局部坐标系下的截面转角;  $f_c(x)$ 、 $F_n$ 、 $E_b$ 、 $G_b$ 、 $\kappa_b$  分别表示双锥度叶片的离心载荷、叶片法向碰摩力、弹性模量、剪切模量、剪切因子,具体符号描述参见文献[3]。

### 1.3 间隙函数

图 5 为含有同轴度误差的双锥度叶片与机匣之间的间隙示意图。图中, O 为端齿连接结构的中心,

— 碰摩发生前机匣位置  
— 碰摩发生后机匣位置  
— 叶尖轨迹 ( $\Omega = 0$ )  
— 叶尖轨迹 ( $\Omega \neq 0$ )



$$\theta(t) = \Omega t + \varphi_1 + \gamma_{\text{mis}}$$

图 5 双锥度叶片与机匣之间的间隙示意图

Fig. 5 Schematic diagram of the gap between the double taper blade and casing

$O_{\text{casing}}$  为机匣中心,  $r_g (r_g = L_b + R_d)$  为静态 (转速  $\Omega = 0$ ) 时叶尖轨迹半径, 其中  $R_d$  表示轮盘半径,  $u_l$  表示叶尖径向位移,  $e_c$  表示静态平行不对中量,  $\delta_n$  表示旋转叶片和机匣之间的侵入深度,  $g_0 (g_0 = R_{\text{casing}} - R_d - L_b)$  表示旋转叶片与机匣之间的间隙函数,  $u_{\text{casing}}$  和  $R_{\text{casing}}$  分别表示机匣径向位移和机匣半径,  $\varphi_1$  为初始相位角,  $K_{\text{casing}}$  和  $C_{\text{casing}}$  分别表示机匣在径向方向的刚度和阻尼。

根据碰摩发生前后的几何位置关系, B点、C点、 $O_{\text{casing}}$  点三点构成了一个直角三角形, 它们之间的关系式为:

$$(CB)^2 + (CO_{\text{casing}})^2 = (BO_{\text{casing}})^2 \quad (12)$$

因此, 根据上式, 得到以下表达式:

$$\begin{aligned} & [e_c + P_{\text{mis}} + (r_g + C_{\text{rub}}) \cos(\Omega t + \varphi_1 + \gamma_{\text{mis}})]^2 + \\ & [(r_g + C_{\text{rub}}) \sin(\Omega t + \varphi_1 + \gamma_{\text{mis}})]^2 = R_{\text{casing}}^2 \end{aligned} \quad (13)$$

对上式求解, 得到含有端齿同轴度误差的叶片与机匣之间的间隙函数表达式为:

$$\begin{aligned} C_{\text{rub}} = & -(e_c + P_{\text{mis}}) \cos(\Omega t + \varphi_1 + \gamma_{\text{mis}}) + \\ & \sqrt{R_{\text{casing}}^2 - (e_c + P_{\text{mis}})^2 \sin^2(\Omega t + \varphi_1 + \gamma_{\text{mis}})} \end{aligned} \quad (14)$$

#### 1.4 两种加速度函数

为了考虑端齿同轴度对叶片-机匣系统在升速过程中的影响, 本文在建立航空涡轴发动机的数学模型时, 采用了两种不同的加速度函数来模拟速度的变化率。其中, 函数1是传统的定加速度形式, 适用于描述加速过程和稳态过程。这种方式简单易行, 但也有缺点。在飞行过程中, 从加速过程到稳态过程, 速度会突变, 导致加速度理论上无穷大, 容易产生刚性冲击。函数2是余弦函数形式, 适用于描述加速度的正弦波变化。这种方式可以使系统在加速过程到稳态过程中, 转速变化平缓, 避免过大的冲击力, 保证发动机的稳定性和可控性。但也有风险, 余弦函数使转速先加速后减速的变化, 可以短时间内达到最大推力, 提高直升机的机动性能, 但也可能导致压气机喘振或涡轮叶片损坏。

(1) 函数1: 加速度函数  $\dot{\Omega}_1(t)$ 、速度函数  $\Omega_1(t)$  以及角位移函数  $\theta_1(t)$  分别为:

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_1(t) = \frac{\Omega_{\text{end}} - \Omega_0}{t_{\text{acc}}}, & 0 \leq t \leq t_{\text{acc}} \\ \Omega_1(t) = \Omega_0 + \frac{\Omega_{\text{end}} - \Omega_0}{t_{\text{acc}}} t, & 0 \leq t \leq t_{\text{acc}} \\ \theta_1(t) = \theta_0 + \Omega_0 t + \frac{\Omega_{\text{end}} - \Omega_0}{2t_{\text{acc}}} t^2, & 0 \leq t \leq t_{\text{acc}} \end{cases} \quad (15)$$

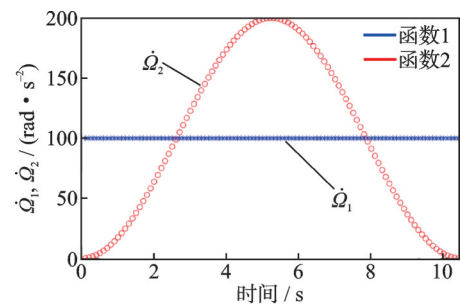
式中,  $\Omega_{\text{end}}$ 、 $\Omega_0$  分别表示稳定后的目标转速以及初始速度;  $t_{\text{acc}}$  为加速时间;  $\theta_0$  表示初始角位移。

(2) 函数2: 加速度函数  $\dot{\Omega}_2(t)$ 、速度函数  $\Omega_2(t)$  以及角位移函数  $\theta_2(t)$  分别为:

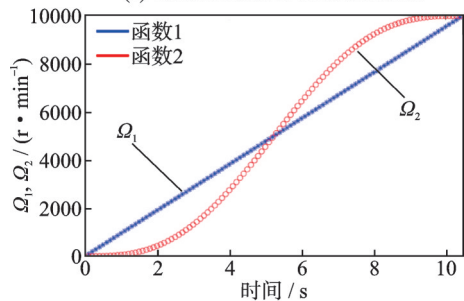
$$\begin{cases} \dot{\Omega}_2(t) = \frac{\Omega_{\text{end}} - \Omega_0}{t_{\text{acc}}} - \frac{\Omega_{\text{end}} - \Omega_0}{t_{\text{acc}}} \cos\left(\frac{2\pi}{t_{\text{acc}}} t\right), & 0 \leq t \leq t_{\text{acc}} \\ \Omega_2(t) = \Omega_0 + \frac{\Omega_{\text{end}} - \Omega_0}{t_{\text{acc}}} t - \frac{\Omega_{\text{end}} - \Omega_0}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{t_{\text{acc}}} t\right), & 0 \leq t \leq t_{\text{acc}} \\ \theta_2(t) = \theta_0 + \Omega_0 t + \frac{\Omega_{\text{end}} - \Omega_0}{2t_{\text{acc}}} t^2 + \frac{(\Omega_{\text{end}} - \Omega_0)t_{\text{acc}}}{(2\pi)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{t_{\text{acc}}} t\right), & 0 \leq t \leq t_{\text{acc}} \end{cases} \quad (16)$$

根据式(15)和(16), 两种函数的加速度变化曲线和速度变化曲线如图6(a)和图6(b)所示。

从图6(a)和(b)可以看出, 函数1和函数2分别用定值和余弦波来模拟加速度随时间的变化, 用固定斜率和正弦波斜率来模拟速度随时间的变化。相比于函数1, 函数2的速度变化刚开始缓慢, 在时间历程的1/3处, 其加速度逐渐超过函数1, 在时间历程的1/2处, 其速度开始超过函数1, 在时间历程的2/3处, 加速度落后于函数1, 在时间历程为10.47 s时, 速度最终减速达到目标转速。



(a) 加速度变化曲线  
(a) Variation curves of acceleration



(b) 速度变化曲线  
(b) Variation curves of velocity

图6 两种加速函数变化曲线

Fig. 6 Variation curves of two kinds of acceleration function

### 1.5 外力所做的功

叶尖与机匣之间外力所做的功为双锥度叶片所承受的气动载荷和叶尖与机匣接触时产生的摩擦力所做的功之和:

$$W_{\text{non}} = \int_0^{L_b} F_e \cdot v dx + W_{\text{rub}} \quad (17)$$

式中,  $F_e$  为双锥度叶片所承受的气动载荷, 其表达式为:

$$\begin{aligned} F_e = & F_0 + F_{m1} \sin \left[ k_1 \left( \Omega t + \frac{1}{2} \dot{\Omega} t^2 \right) \right] + \\ & F_{m2} \sin \left[ 2k_1 \left( \Omega t + \frac{1}{2} \dot{\Omega} t^2 \right) \right] + \\ & F_{m3} \sin \left[ 3k_1 \left( \Omega t + \frac{1}{2} \dot{\Omega} t^2 \right) \right] + \dots + \\ & F_{mj} \sin \left[ jk_1 \left( \Omega t + \frac{1}{2} \dot{\Omega} t^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

式中,  $F_0$  为气动载荷的常量;  $k_1$  为叶片障碍数目;  $F_{mj}$  为单位面积的气动载荷的幅值,  $j$  表示第  $j$  次的谐波分量。

叶片与机匣接触时产生的摩擦力所做的功  $W_{\text{rub}}$  的表达式为:

$$W_{\text{rub}} = \frac{1}{2} F_n u_L + \frac{1}{2} \mu_c F_n u_L \quad (19)$$

式中,  $\mu_c$  为叶片与机匣之间的摩擦系数。  $F_n$  为法向碰摩力, 表达式为:

$$F_n = L_b \Gamma_1 K_{\text{casing}} \chi \quad (20)$$

式中,

$\chi =$

$$\frac{-5 \left( \alpha_c \Gamma_1 - 2 \frac{\delta_n}{L_b} \right) + \sqrt{5} \alpha_c \sqrt{5 \Gamma_1 \left( \Gamma_1 + \frac{4}{\alpha_c} \frac{\delta_n}{L_b} \right) + 12 \mu_c^2 \frac{\delta_n}{L_b}}}{20 \Gamma_1 - \frac{10}{\alpha_c} \frac{\delta_n}{L_b} + 6 \alpha_c \mu_c^2},$$

$$\alpha_c = (R_d + L_b) / R_d, \Gamma_1 = \Gamma_0 / K_{\text{casing}},$$

$$\begin{aligned} \Gamma_0 = & E_b I_b (\xi_b)^3 \frac{3}{L_b^3} + \rho_b A_b (\xi_b) \Omega^2 \left( \frac{81}{280} L_b + \frac{3}{8} R_d \right) - \\ & \frac{1}{3} \rho_b A_b (\xi_b) \Omega^2 \frac{1 + c_e + c_e^2}{1 + c_e}, \end{aligned}$$

其中,  $c_e$  为速度限制系数, 本文取  $c_e = 0.9$ 。

### 1.6 系统建模

将上述旋转叶片-机匣系统的动能、势能、外力所做的功代入到静态 Hamilton 原理表达式中, 得到:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T_{\text{blade}} + T_{\text{casing}} - U_{\text{blade}} - U_{\text{casing}} + W_{\text{non}}) dt = 0 \quad (21)$$

式中,  $\delta$  表示变分积分;  $t_1$  和  $t_2$  表示任意时间;  $T_{\text{casing}}$ 、 $U_{\text{casing}}$  分别表示机匣的动能和势能。

可以通过 Galerkin 方法对旋转叶片的叶片径向位移  $u(x, t)$ 、叶片横向位移  $v(x, t)$  以及叶片摆动方向位移  $\varphi(x, t)$  进行离散化处理, 其表达式为:

$$\begin{cases} u(x, t) = \sum_{i=1}^{N_{\text{mod}}} \phi_{1i}(x) p_i(t) \\ v(x, t) = \sum_{i=1}^{N_{\text{mod}}} \phi_{2i}(x) q_i(t) \\ \varphi(x, t) = \sum_{i=1}^{N_{\text{mod}}} \phi_{3i}(x) w_i(t) \end{cases} \quad (22)$$

式中,  $p_i(t)$ 、 $q_i(t)$ 、 $w_i(t)$  分别为叶片径向、横向以及摆动方向对应的正则坐标;  $\phi_{1i}$ 、 $\phi_{2i}$ 、 $\phi_{3i}$  分别为径向、横向、摆动方向位移的振型函数, 其具体表达式为:

$$\begin{cases} \phi_{1i} = \frac{\sin(\alpha_i x)}{\alpha_i} \\ \phi_{2i} = (\cosh(\lambda_i x) - \cos(\lambda_i x)) - \\ \quad \frac{\sinh \lambda_i - \sin \lambda_i}{\cosh \lambda_i + \cos \lambda_i} (\sinh(\lambda_i x) - \sin(\lambda_i x)) \\ \phi_{3i} = \frac{1 - \cos(\alpha_i x)}{\alpha_i} \end{cases} \quad (23)$$

式中,  $\alpha_i = (2i-1)\pi/2$ ,  $i=1, 2, 3, \dots, N_{\text{mod}}$  为模态截断阶数, 本文取  $N_{\text{mod}}=4$ ;  $\lambda_i$  为第  $i$  阶振型函数的特征值, 其值由以下特征方程来决定:

$$1 + \cosh \lambda_i - \cos \lambda_i = 0 \quad (24)$$

将式(22)和(24)代入到式(21)中, 旋转叶片-机匣系统离散后的运动微分方程为:

$$\mathbf{M}_B \ddot{\mathbf{q}}_B + (\mathbf{C}_B + \mathbf{G}_B) \dot{\mathbf{q}}_B + \mathbf{K}_B \mathbf{q}_B = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_e \quad (25)$$

式中,  $\mathbf{M}_B$ 、 $\mathbf{C}_B$ 、 $\mathbf{G}_B$ 、 $\mathbf{K}_B$ 、 $\mathbf{q}_B$ 、 $\mathbf{F}_B$  分别为双锥度叶片的质量矩阵、阻尼矩阵、陀螺矩阵、刚度矩阵、广义坐标向量以及广义外载荷。其中阻尼矩阵  $\mathbf{C}_B$  采用瑞利阻尼矩阵, 其表达式如下:

$$\mathbf{C}_B = \nu \mathbf{M}_B + \eta \mathbf{K}_B \quad (26)$$

式中,

$$\nu = 4\pi f_{(n1)} f_{(n2)} (\xi_1 f_{(n2)} - \xi_2 f_{(n1)}) / (f_{(n2)}^2 - f_{(n1)}^2),$$

$$\eta = (\xi_2 f_{(n2)} - \xi_1 f_{(n1)}) / [\pi (f_{(n2)}^2 - f_{(n1)}^2)],$$

其中, 模态阻尼比为  $\xi_1=0.01$ 、 $\xi_2=0.02$ ,  $f_{(n1)}$  和  $f_{(n2)}$  为系统的第一阶和第二阶固有频率。

在式(26)中,  $\mathbf{K}_B = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_{\text{centrifuge}} + \mathbf{K}_{\text{spin}} + \mathbf{K}_{\text{acc}} + \mathbf{K}_F$ , 其中  $\mathbf{K}_e$ 、 $\mathbf{K}_{\text{centrifuge}}$ 、 $\mathbf{K}_{\text{spin}}$ 、 $\mathbf{K}_{\text{acc}}$ 、 $\mathbf{K}_F$  分别为双锥度叶片的结构刚度矩阵、应力刚化刚度矩阵、旋转软化矩阵、加速刚度矩阵以及外力刚度矩阵。其中叶片结构刚度矩阵为:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{e1} & \mathbf{K}_{e2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{e4} & \mathbf{K}_{e5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{e9} \end{bmatrix} \quad (27)$$

式中, 矩阵中各个元素表达式为:

$$\begin{aligned}
K_{e1}(j, i) &= E_b A_b(\xi_b) \phi'_{1i} \phi_{1j} \Big|_{x=0}^{x=L_b} - \\
&\int_0^{L_b} E_b [A'_b(\xi_b) \phi'_{1i} \phi_{1j} + A_b(\xi_b) \phi''_{1i} \phi_{1j}] dx, \\
K_{e2}(j + N_{\text{mod}}, i + 2N_{\text{mod}}) &= \\
&\kappa_b A_b(\xi_b) G_b (-\phi_{3i} \phi_{2j}) \Big|_{x=0}^{x=L_b} + \\
&\int_0^{L_b} \kappa_b G_b [A'_b(\xi_b) \phi_{3i} \phi_{2j} + A_b(\xi_b) \phi'_{3i} \phi_{2j}] dx, \\
K_{e4}(j + 2N_{\text{mod}}, i + N_{\text{mod}}) &= \\
&-\kappa_b G_b \int_0^{L_b} [A_b(\xi_b) - A'_b(\xi_b)] \phi'_{2i} \phi_{3j} dx, \\
K_{e5}(j + N_{\text{mod}}, i + N_{\text{mod}}) &= \kappa_b A_b(\xi_b) G_b \phi'_{2i} \phi_{2j} \Big|_{x=0}^{x=L_b} - \\
&\kappa_b G_b \int_0^{L_b} [A'_b(\xi_b) \phi_{2i} \phi_{2j} + A_b(\xi_b) \phi''_{2i} \phi_{2j}] dx, \\
K_{e9}(j + 2N_{\text{mod}}, i + 2N_{\text{mod}}) &= E_b I_b(\xi_b) \phi'_{3i} \phi_{3j} \Big|_{x=0}^{x=L_b} - \\
&\int_0^{L_b} E_b [I'_b(\xi_b) \phi'_{3i} \phi_{3j} + I_b(\xi_b) \phi''_{3i} \phi_{3j}] dx + \\
&\kappa_b G_b \int_0^{L_b} [A_b(\xi_b) - A'_b(\xi_b)] \phi_{3i} \phi_{3j} dx - \\
&\int_0^{L_b} \kappa_b A_b(\xi_b) G_b \phi'_{3i} \phi_{3j} dx.
\end{aligned}$$

叶片应力刚度矩阵为:

$$K_{\text{centrifuge}} = \text{diag}(0 \quad K_{c1} \quad 0) \quad (28)$$

式中,

$$\begin{aligned}
K_{c1}(j + N_{\text{mod}}, i + N_{\text{mod}}) &= f_c(x) (\phi'_{2i} \phi_{2j}) \Big|_{x=0}^{x=L_b} - \\
&\int_0^{L_b} [f'_c(x) \phi'_{2i} \phi_{2j} + f_c(x) \phi''_{2i} \phi_{2j}] dx.
\end{aligned}$$

叶片旋转软化矩阵为:

$$K_{\text{spin}} = \text{diag}(K_{s1} \quad K_{s2} \quad K_{s3}) \quad (29)$$

式中, 矩阵中各个元素表达式为:

$$\begin{aligned}
K_{s1}(j, i) &= -\int_0^{L_b} A_b(\xi_b) \rho_b \Omega^2 \phi_{1i} \phi_{1j} dx, \\
K_{s2}(j + N_{\text{mod}}, i + N_{\text{mod}}) &= \\
&-\int_0^{L_b} A_b(\xi_b) \rho_b \Omega^2 \phi_{2i} \phi_{2j} dx, \\
K_{s3}(j + 2N_{\text{mod}}, i + 2N_{\text{mod}}) &= \\
&-\int_0^{L_b} I_b(\xi_b) \rho_b \Omega^2 \phi_{3i} \phi_{3j} dx.
\end{aligned}$$

叶片加速度导致的刚度矩阵为:

$$K_{\text{acc}} = \begin{bmatrix} 0 & K_{a1} & 0 \\ K_{a2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

式中, 矩阵中各个元素表达式为:

$$\begin{aligned}
K_{a1}(j, i + N_{\text{mod}}) &= -\rho_b \dot{\Omega} \int_0^{L_b} A_b(\xi_b) \phi_{2i} \phi_{1j} dx, \\
K_{a2}(j + N_{\text{mod}}, i) &= \rho_b \dot{\Omega} \int_0^{L_b} A_b(\xi_b) \phi_{1i} \phi_{2j} dx.
\end{aligned}$$

叶片外力导致的刚度矩阵为:

$$K_F = \text{diag}(0 \quad K_{F1} \quad 0) \quad (31)$$

式中,

$$\begin{aligned}
K_{F1}(j + N_{\text{mod}}, i + N_{\text{mod}}) &= F_n (\phi'_{2i} \phi_{2j}) \Big|_{x=0}^{x=L_b} - \\
&\int_0^{L_b} (F_n \phi'_{2i} \phi_{2j} + F'_n \phi''_{2i} \phi_{2j}) dx.
\end{aligned}$$

假设机匣简化为集中质量点, 叶尖与机匣碰摩特征为静态接触过程, 其运动微分方程为:

$$M_{\text{casing}} \ddot{q}_{\text{casing}} + C_{\text{casing}} \dot{q}_{\text{casing}} + K_{\text{casing}} q_{\text{casing}} = F_{\text{casing}} \quad (32)$$

式中,  $M_{\text{casing}}$ 、 $C_{\text{casing}}$ 、 $K_{\text{casing}}$ 、 $F_{\text{casing}}$  分别为机匣的质量矩阵、阻尼矩阵、径向刚度矩阵以及叶尖对机匣的碰摩反力矩阵;  $q_{\text{casing}}$  为机匣的广义坐标向量。本文旋转叶片-机匣系统的材料参数和结构参数如不作特殊说明, 具体数值如表1所示。

## 2 模型验证

本文以端齿连接结构的叶片-机匣系统为研究对象, 其具体几何尺寸和材料参数分别如图1和表1所示。叶片-机匣碰摩简化为一个准静态接触过程, 其中机匣假设为刚性结构, 叶片被视为柔性结构。因此, 碰摩过程可以看成是柔性叶尖与局部刚性机匣的接触, 其碰摩范围发生在机匣圆弧段AD内, 其弧长对应的角度为 $60^\circ$ 。该系统由端齿连接结构、双锥度叶片、轮盘、机匣系统等部件组成, 其中双锥度叶片被视为悬臂梁结构, 采用 Timoshenko 梁单元

表1 端齿连接旋转叶片-机匣系统材料参数和结构参数

Tab. 1 The material and structural parameters of the rotating blade-casing system with curvic couplings

端齿连接结构的参数	数值	转子-叶片结构参数	数值	叶片材料参数	数值	机匣相关参数	数值
型号	CC1033	叶片长度 $L_b$ /mm	80	弹性模量 $E_b$ /GPa	131	机匣半径 $R_{\text{casing}}$ /mm	224
齿数 $z$	20	叶根宽度 $b_1$ /mm	45	剪切模量 $G_b$ /GPa	46.16	机匣径向刚度 $K_{\text{casing}}$ / (MN·m <sup>-1</sup> )	20
端齿盘外半径 $R_o$ /mm	62	叶尖宽度 $b_2$ /mm	30	密度 $\rho_b$ /(kg·m <sup>-3</sup> )	8700	机匣阻尼 $C_{\text{casing}}$ /(N·s·m <sup>-1</sup> )	100
端齿盘内半径 $R_i$ /mm	44	叶根厚度 $h_1$ /mm	5	泊松比 $\nu$	0.419	机匣间隙 $g_o$ /mm	2
端齿分度圆半径 $R_m$ / mm	52.8	叶尖厚度 $h_2$ /mm	4.5	剪切系数 $\kappa_b$	0.86	机匣密度 $\rho_c$ /(kg·m <sup>-3</sup> )	4380
压力角 $\alpha$ /(°)	30	轮盘半径 $R_d$ /mm	142			机匣厚度 $h_c$ /mm	3
齿形角/(°)	60	相位角 $\varphi_1$ /(°)	180			机匣长度 $L_c$ /mm	30

(ANSYS中的Beam188单元)进行模拟,其被划分为4个单元,5个节点。机匣被视为刚性单元,采用集中质量单元(ANSYS中的Mass21单元)进行模拟。为了验证本文建模方法的正确性和有效性,本文将理论模型与ANSYS有限元软件获得的系统固有频率进行对比分析,图7显示了双锥度叶片在 $\Omega=0$ 时的振型图,表2给出了对应的固有频率对比结果。从表2中可知,本文的理论模型与有限元软件结果吻合良好,仅在一阶振型存在最大误差1.06%,这验证了理论模型固有频率的准确性。

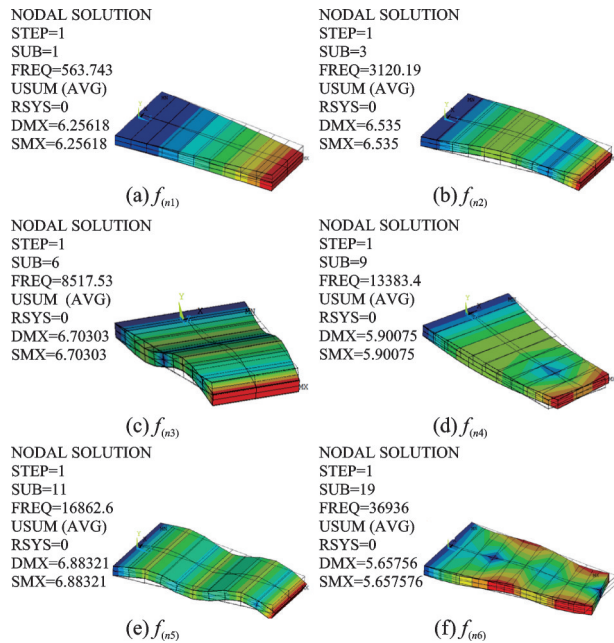


图7 双锥度叶片在 $\Omega=0$ 时的振型图

Fig. 7 Mode of vibration diagram of the double taper blade at  $\Omega=0$

表2 双锥度叶片-机匣系统在 $\Omega=0$ 的固有频率

Tab. 2 Natural frequencies of the double taper blade-casing system at  $\Omega=0$

阶数	固有频率/Hz		误差/ %	振型描述
	理论解	有限元解		
$f_{(n1)}$	540.27	563.74	1.06	叶片一阶振型
$f_{(n1)}$	2351.20	2351.20	0.00	机匣固有频率
$f_{(n2)}$	3114.10	3120.20	0.05	叶片二阶振型
$f_{(n3)}$	8403.50	8517.50	0.34	叶片三阶振型
$f_{(n4)}$	13152.40	13383.00	0.43	叶片四阶振型
$f_{(n5)}$	17412.60	16863.00	0.80	叶片五阶振型
$f_{(n6)}$	36707.84	36697.00	0.01	叶片六阶振型

为了验证本文法向碰摩力模型的准确性,使用式(20)与文献[29]中实验测试结果进行对比验证,实验参数设置如下:转速 $\Omega=1000$  r/min,钢制机匣径向刚度 $K_{\text{casing}}$ 为 $3.5 \times 10^7$  N/m,叶片的弹性模量 $E_0$ 为210 GPa,密度 $\rho_0$ 为 $7800$  kg/m<sup>3</sup>,泊松比为0.3,长度 $L_0$ 为82 mm,叶尖与机匣之间的摩擦系数 $\mu_c$ 为0.274,叶尖和叶根宽度为44 mm,叶尖和叶根厚度为3 mm。

图8展示了在 $\Omega=1000$  r/min时,法向碰摩力随侵入量的变化曲线。对于叶片和钢制机匣而言,在侵入量 $\in(20,60)$   $\mu\text{m}$ 之间时,理论模型和实验结果吻合较好。然而,在侵入量 $\in(60,80)$   $\mu\text{m}$ 之间时,实验测试值大于理论值。理论模型和实验方法都表明随着侵入量的增加,法向碰摩力随之增加,并且二者呈非线性变化。造成大侵入量存在误差的原因可能是随着侵入量的增加,机匣刚度发生了改变,另外一个原因是,随着伺服进给量的增加,叶尖与机匣之间的摩擦系数也发生了改变。综上所述,本文模型可为后续开展瞬态响应分析提供可靠的理论基础。

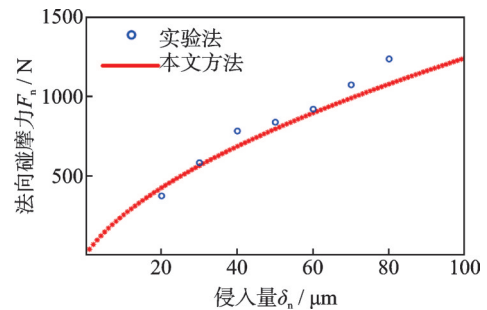


图8 法向碰摩力和侵入量之间的关系( $\Omega=1000$  r/min)

Fig. 8 The relationship between normal rubbing force and penetration depth( $\Omega=1000$  r/min)

### 3 数值模拟与讨论

本节讨论了双锥度叶片在两种加速函数和端齿同轴度误差 $C_{\text{mis}}$ (包括定向角误差 $\gamma_{\text{mis}}$ 和定位误差 $P_{\text{mis}}$ )下的瞬态响应。其中,静态平行不对中量 $e_c$ 设置为1.975 mm,加速区间为0~10000 r/min,稳态转速为10000 r/min。根据文献[5]可知,国内外主流快速随行夹具的定位精度为3~5  $\mu\text{m}$ 。为了更直观地区分同轴度误差的差异,本文分别选取5、10和15  $\mu\text{m}$ 三种同轴度误差进行分析。叶片的几何尺寸和材料参数与第2节相同,详细的运行工况以及仿真参数如表3所示。需要说明的是 $k_1=10$ 表示气动载荷的激振频率为转频的10倍,用以模拟气动载荷的影响。在本节中,气动载荷 $F_c$ 表示作用在叶片表面的压力,并取气动载荷的第一次谐波,即 $F_c=F_{m1}\sin(k_1\Omega t)$ 。

表3 仿真工况参数

Tab. 3 Simulation case parameters

参数	变化的参数	不变的参数
端齿同轴度 误差	$C_{\text{mis}}=5$ $\mu\text{m}$	$F_{m1}=20$ N/m,
	$C_{\text{mis}}=10$ $\mu\text{m}$	$\dot{\Omega}_1=100$ rad/s <sup>2</sup> ,
	$C_{\text{mis}}=15$ $\mu\text{m}$	$k_1=10$

注:同轴度误差 $C_{\text{mis}}$ 表示同时存在定位误差和定向角误差。例如,当 $C_{\text{mis}}=5$   $\mu\text{m}$ 时,定位误差为 $P_{\text{mis}}=5$   $\mu\text{m}$ ,且对应相应的定向角误差。

图9展示了不同端齿同轴度误差下,系统在两种函数下的叶尖径向振动响应曲线。图中,叶尖与机匣之间的最小间隙 $C_{min}$ 与初始间隙、不对中量和同轴度误差有关,当叶尖径向振幅超过最小间隙 $C_{min}$ 时,系统会发生碰摩现象,其对应的最小间隙 $C_{min}$ 的值已在图中用红色虚线表示。

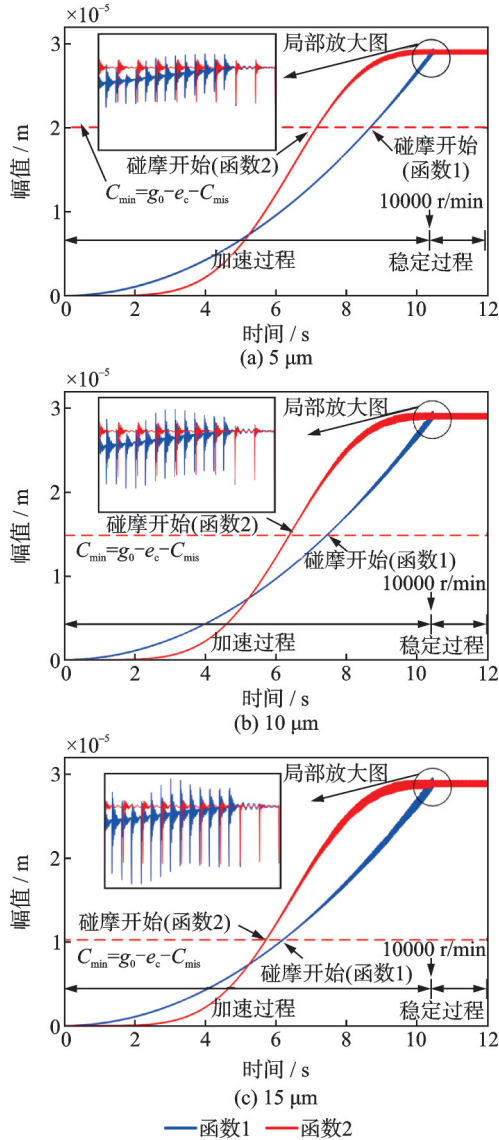


图9 两种函数下不同同轴度误差对叶尖径向振动的影响  
Fig.9 The influence of different coaxiality errors on the blade tip in radial direction vibration under two functions

由图9可知,随着端齿同轴度误差 $C_{mis}$ 的增加,最小间隙 $C_{min} = g_0 - e_c - C_{mis}$ 减少,叶尖径向位移的幅值放大现象变得更加明显。当升速到5.2 s时,函数2的叶尖径向位移超过了函数1的值,这表明此时函数2的速度开始超过函数1,因此函数2的碰摩开始时间将早于函数1。此外,随着端齿同轴度误差的增加,函数1和函数2的碰摩开始间距逐渐缩小,说明系统的碰摩程度随着端齿同轴度误差的提高而增强,碰摩力增加,碰摩加剧。从图9中还可知,函数1与函数2的叶尖径向振动响应与图6(b)的速度变

化趋势相似。叶尖径向位移在加速过程中逐渐增加,在10000 r/min达到最大,并且系统转速达到10000 r/min时进入到稳态过程。此外,与函数2相比,函数1在目标转速10000 r/min处时有明显的隆起现象,这是一种典型的碰摩故障<sup>[30-31]</sup>,这主要是因为函数1在升速过程到稳定过程中,其加速度由100 rad/s<sup>2</sup>直接降到0 rad/s<sup>2</sup>,加速度的变化有明显的突变,导致机匣给予叶片一个明显的反弹冲击力,使系统出现隆起现象。这表明加速函数2采用的余弦函数在加速过程到稳态过程中可以起到有效的缓冲作用。图9中的局部放大图展示了不同同轴度误差下的径向振动响应。从局部放大图中可以看出,随着同轴度误差的增加,叶片径向方向的振幅会加剧,函数1的径向位移在正、负方向都有明显的幅值放大现象,而函数2的径向位移仅在负方向有明显的幅值放大现象,这归因于函数2在从加速到稳态过程中有减速作用,因此函数1产生的隆起现象也更为突出。

为了更清楚地分析两种函数下端齿同轴度误差对叶尖弯曲方向振动特性的影响,考虑同轴度误差(5 μm)下叶尖弯曲方向的振动响应曲线和三维瀑布图如图10和11所示。

从图10中可以看出,函数2的共振峰之间的间隔时间 $\Delta t_2$ 要小于函数1的 $\Delta t_1$ ,这说明函数2可以更快地通过临界转速。因此,函数2的碰摩范围比函数1的更长。

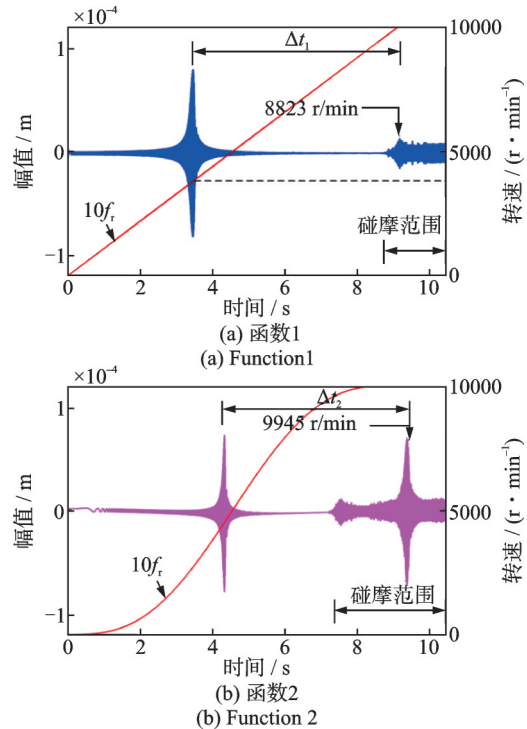


图10 两种函数下同轴度误差对叶尖弯曲振动的影响(5 μm)  
Fig.10 The influence of coaxiality error (5 μm) on the blade tip in bending direction vibration under two functions

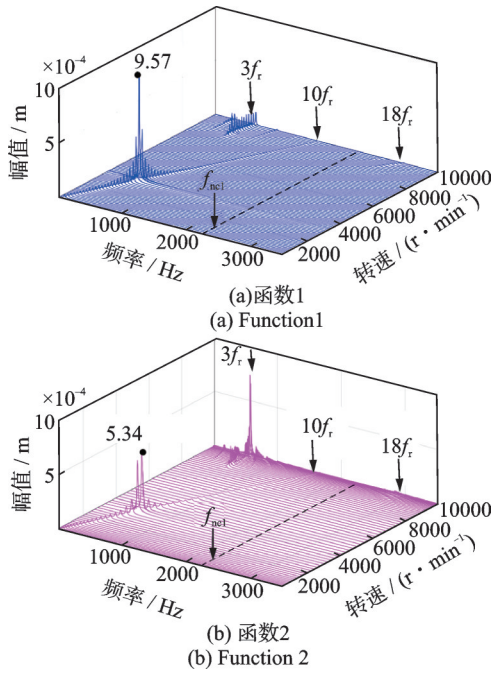


图 11 两种函数同轴度误差对叶尖弯曲振动的影响(5 μm)  
 Fig. 11 The influence of different coaxiality errors on blade tip in bending direction (5 μm) under two functions

结合图 10 和 11 可以看出,在气动载荷作用下,系统在 3300 r/min(此时转频  $f_r=55$  Hz)转速处会出现叶片一阶弯曲共振,这是因为气动激励频率  $10f_r$  接近于叶片第一阶弯曲频率(见图 11 和表 2)。在 8823 r/min 处出现幅值放大现象,这是因为  $3f_r$  与叶片一阶弯曲振动  $f_{(n1)}$  十分接近(见图 11 和表 2)。在 9945 r/min(此时  $f_r=166$  Hz)转速处出现了超谐波共振现象,这是由于  $18f_r$  与叶片的二阶固有频率  $f_{(n2)}$  相接近所致(见图 11 和表 2)。

通过对比两种函数的叶尖弯曲振动响应,发现第二种函数的气动幅频引起的幅值放大现象比第一种函数略微降低,这主要是因为第二种函数通过临界转速的加速度值略大,使得加速度刚度矩阵  $K_{acc}$  增加,导致振幅较小。与函数 1 相比,函数 2 在 9945 r/min 时有更明显的幅值放大现象,这是由两个原因所造成:(1) 在加速到 9 s 时,函数 2 的加速度值小于函数 1 的值,使得加速度刚度矩阵  $K_{acc}$  减少,导致共振峰的振幅增加;(2) 在该转速下,系统处于碰摩阶段,由于函数 2 的转速大于函数 1 的转速,高转速导致函数 2 的碰摩力大于函数 1 的碰摩力,这也导致了共振峰的幅值放大现象更加明显。

图 12 和 13 为在两种函数下,不同端齿同轴度误差对系统的侵入量和法向碰摩力的影响。从图中可以看出,在加速过程中,两种函数的侵入量  $\delta_n$  和法向碰摩力  $F_n$  与叶尖径向位移的变化趋于一致,均在 10000 r/min 时达到最大,并且在稳态过程中趋于平稳。

如图 12(a) 和图 13(a) 所示,函数 1 的侵入量  $\delta_n$  和法向碰摩力  $F_n$  在加速过程中呈线性增加趋势,其

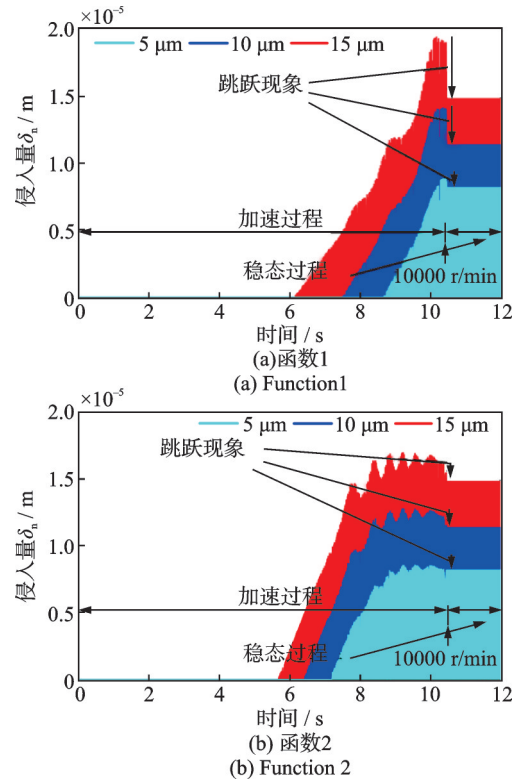


图 12 两种函数下不同轴度误差对侵入量的影响  
 Fig. 12 The influence of different coaxiality errors on penetration depth under two functions

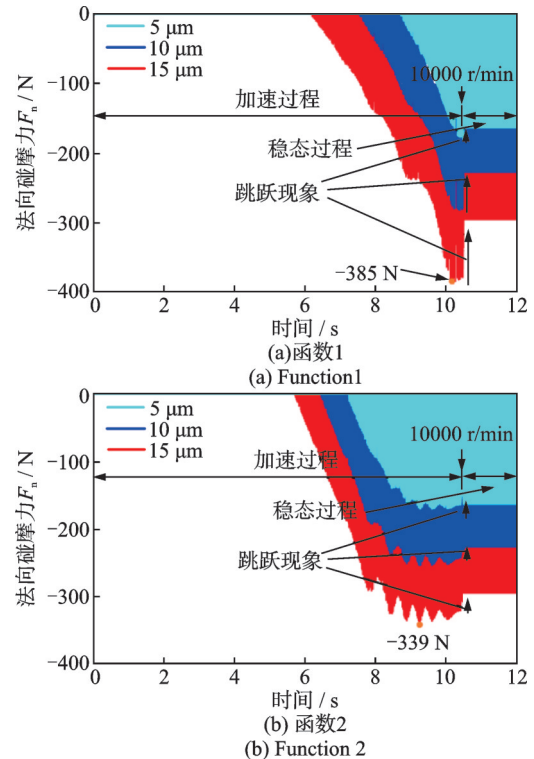


图 13 两种函数下不同轴度误差对法向碰摩力的影响  
 Fig. 13 The influence of different coaxiality errors on normal rubbing force under two functions

时域曲线呈锯齿状,在加速到 10000 r/min 时达到最大值。从图中还可以发现,在进入稳态过程的瞬间,可以观察到侵入量  $\delta_n$  和法向碰摩力  $F_n$  均发生了显著的幅值突变,表明系统在从加速度过程到稳态过

程中出现了跳跃现象,并且随着同轴度误差的增加,跳跃现象愈加明显。如图 12(b)和 13(b)所示,函数 2 的侵入量  $\delta_n$  和法向碰摩力  $F_n$  在加速过程中刚开始呈线性增加趋势,其增长速率超过函数 1。但是当升速接近于 8900 r/min 时,其侵入量和法向碰摩力增长速率开始减缓,其时域曲线呈背鳍状。这是由于函数 2 的加速度逐渐减小,因此每次发生碰摩后,叶片振动都会衰减,导致幅值出现反复回弹现象。此外,在通过最大转速 10000 r/min 时,函数 2 的跳跃现象明显低于函数 1,这主要因为函数 2 的加速度采用余弦函数形式,在靠近最大转速时,其加速度值趋近于零,使得跳跃现象程度减弱。

在叶片-机匣系统中,引入一个与碰摩力和碰摩时间相关的冲量来表征碰摩程度,其数值大小表示每个旋转周期内最大法向碰摩力与最小碰摩时间的乘积。对于端齿同轴度误差为  $C_{\text{mis}}=5、10$  和  $5 \mu\text{m}$ , 函数 1 的冲量分别为 0.3255、0.5058 和 0.6930 N·s, 表示函数 1 的冲量与端齿同轴度误差之间存在线性关系。函数 2 的冲量分别为 0.3089、0.4572 和 0.6084 N·s, 表明随着端齿同轴度误差的增加,函数 2 的冲量逐渐减缓,这也说明在相同端齿同轴度误差下,函数 2 的最大冲量明显小于函数 1,因此函数 2 的碰摩程度更小。

## 4 结 论

本文以含有端齿同轴度误差的转子-叶片系统为例,对端齿连接结构在装配过程中产生的端齿同轴度误差(包括端齿定位误差和端齿定向角误差)进行了定量描述,基于 Timoshenko 梁理论和 Galerkin 方法,建立了双锥度叶片-机匣动力学模型,并通过 ANSYS 商用软件验证了模型的有效性,分析了端齿同轴度误差对双锥度叶片-机匣系统在两种加速函数下的瞬态响应的影响规律,并得出了以下结论:

(1) 通过比较函数 1 和函数 2,函数 2 的共振峰间隔时间  $\Delta t_2$  明显小于函数 1 的共振峰间隔时间  $\Delta t_1$ 。这表明与函数 1 相比,函数 2 可以更快地通过临界转速,从而导致碰摩开始时间提前。

(2) 随着端齿同轴度误差的增加,叶尖与机匣之间的间隙减少,叶尖碰摩区域逐渐增加。在升速过程中,转子共振现象在  $3f_r、18f_r$  处出现明显的幅值放大现象,其中  $3f_r$  引起的超谐波共振现象最为明显。

(3) 端齿同轴度误差的增加会导致叶尖碰摩范围增大,碰摩时间延长,碰摩加剧,系统的侵入量和法向碰摩力在最高转速处出现明显的跳跃现象,并伴有明显的隆起现象,函数 2 可以有效地减少高转速时的跳跃现象和隆起现象。

## 参考文献:

- [1] 邹望之,郑新前. 航空涡轴发动机发展趋势[J]. 航空动力学报, 2019, 34(12): 2577-2588.  
ZOU Wangzhi, ZHENG Xinqian. Development trends of aero turboshaft engines[J]. Journal of Aerospace Power, 2019, 34(12): 2577-2588.
- [2] 金森,王艾伦,王青山,等. 航空涡轴发动机复杂转子叶片系统动力学特性研究[J]. 航空动力学报, 2024, 39(10): 59-75.  
JIN Miao, WANG Ailun, WANG Qingshan, et al. Dynamic characteristics analysis of the complex rotor-blade system for the aero-turboshaft engine[J]. Journal of Aerospace Power, 2024, 39(10): 59-75.
- [3] 金森,王艾伦,王青山,等. 考虑端齿预紧的新型中心拉杆-转子-叶片耦合系统动力学特性分析[J]. 机械工程学报, 2021, 57(23): 124-136.  
JIN Miao, WANG Ailun, WANG Qingshan, et al. Dynamic characteristics a analysis of a new type of central tie rod rotor-blade-bearing coupling system considering the end-tooth connection structure[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2021, 57(23): 124-136.
- [4] JIN M, WANG A L, WANG Q S, et al. The vibration characteristics of central tie rod rotor-blade-bearing coupling system considering the influence of the Hirth couplings[J]. Archive of Applied Mechanics, 2022, 92(12): 3533-3561.
- [5] 崔相武. 基于端齿盘定位的高精度快速随行夹具研制及应用[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2021.  
CUI Xiangwu. Manufacture and application of the high accuracy quick-change follow fixture positioned by end-toothed disc[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2021.
- [6] 王哲. 用于精密微小零件加工换位的高精度零点定位装置研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2019.  
WANG Zhe. Research on high precision zero-point positioning device for processing and transposition of precision micro parts[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2019.
- [7] CROCCOLO D, DE AGOSTINIS M, FINI S, et al. On hirth ring couplings: design principles including the effect of friction[J]. Actuators, 2018, 7(4): 79.
- [8] CROCCOLO D, CAVALLI O, DE AGOSTINIS M, et al. A methodology for the lightweight design of modern transfer machine tools[J]. Machines, 2018, 6(1): 2.
- [9] WANG X M, CAO Z F, SUN C Z, et al. Positioning and orientation error measurement and assembly coaxiality optimization in rotors with curvic couplings[J]. Measurement, 2021, 186: 110167.
- [10] CHAI Z, LU Y H, LI X Y, et al. Non-contact measurement method of coaxiality for the compound gear shaft composed of bevel gear and spline[J]. Measurement, 2021, 168: 108453.
- [11] ZHANG M W, LIU Y M, WANG D W, et al. A coaxiality measurement method for the aero-engine rotor

- based on common datum axis[J]. Measurement, 2022, 191: 110696.
- [12] 刘恒,洪杰,李垒栋,等. 圆弧端齿联轴器定位机理研究[J]. 推进技术, 2019, 40(6): 1382-1388.  
LIU Heng, HONG Jie, LI Leidong, et al. Positioning mechanism of curvic coupling[J]. Journal of Propulsion Technology, 2019, 40(6): 1382-1388.
- [13] 孙帅,孙惠斌,付玄,等. 圆弧端齿齿面加工偏差对配合状态的影响[J]. 航空动力学报, 2024, 39(5): 253-261.  
SUN Shuai, SUN Huibin, FU Xuan, et al. Influence of machining deviation of curvic couplings tooth surface on fitting state[J]. Journal of Aerospace Power, 2024, 39(5): 253-261.
- [14] 靳玉林,刘治汶,陈予恕. 航空发动机双转子系统叶片-机匣碰摩故障模拟[J]. 航空学报, 2022, 43(12): 492-505.  
JIN Yulin, LIU Zhiwen, CHEN Yushu. Fault simulation of blade-casing rubbing for dual-rotor system of aero-engines[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2022, 43(12): 492-505.
- [15] 张力,马艳红,梁智超,等. 转子系统碰摩约束模型与振动响应分析[J]. 北京航空航天大学学报, 2015, 41(9): 1631-1637.  
ZHANG Li, MA Yanhong, LIANG Zhichao, et al. Constraint model and vibration response analysis of rotor rub-impact[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2015, 41(9): 1631-1637.
- [16] 梁智超,张振波,刘书国,等. 转子-支承-机匣系统碰摩试验及特征提取[J]. 航空动力学报, 2014, 29(3): 604-611.  
LIANG Zhichao, ZHANG Zhenbo, LIU Shuguo, et al. Experiment and characteristics extraction of rub-impact in rotor-support-case system[J]. Journal of Aerospace Power, 2014, 29(3): 604-611.
- [17] 太兴宇,杨树华,马辉,等. 叶尖碰摩诱发的转子系统振动响应数值分析与试验研究[J]. 机械工程学报, 2019, 55(19): 112-120.  
TAI Xingyu, YANG Shuhua, MA Hui, et al. Numerical analysis and experimental investigation of blade tip rubbing-induced vibration responses of rotor system[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(19): 112-120.
- [18] 李炳强,马辉,曾劲,等. 转子-叶片系统非线性振动和动态稳定性分析[J]. 振动与冲击, 2019, 38(6): 15-22.  
LI Bingqiang, MA Hui, ZENG Jin, et al. Nonlinear vibration and dynamic stability analysis of a rotor-blade system[J]. Journal of Vibration and Shock, 2019, 38(6): 15-22.
- [19] 赵璐,廖明夫,洪亮,等. 突加不平衡下发动机振动响应分析[J]. 航空动力学报, 2022, 37(2): 251-262.  
ZHAO Lu, LIAO Mingfu, HONG Liang, et al. Analysis of aero-engine vibration response under sudden unbalance[J]. Journal of Aerospace Power, 2022, 37(2): 251-262.
- [20] 侯理臻,廖明夫,王卫国,等. 叶片飞脱下转子动力学响应实验[J]. 航空动力学报, 2019, 34(5): 1010-1019.  
HOU Lizhen, LIAO Mingfu, WANG Weiguo, et al. Experiment of rotor dynamics under fan blade off[J]. Journal of Aerospace Power, 2019, 34(5): 1010-1019.
- [21] 马辉,吴志渊,太兴宇,等. 含碰摩故障的转子-盘片-机匣系统动力学特性分析[J]. 航空动力学报, 2015, 30(8): 1950-1957.  
MA Hui, WU Zhiyuan, TAI Xingyu, et al. Dynamic characteristics analysis of rotor-blade-casing system with rub-impact fault[J]. Journal of Aerospace Power, 2015, 30(8): 1950-1957.
- [22] 郭旭民,孙祺,马辉,等. 旋转叶片-柔性机匣碰摩振动响应分析[J]. 振动与冲击, 2019, 38(5): 162-168.  
GUO Xumin, SUN Qi, MA Hui, et al. Rub vibration responses of rotating blade and flexible casing[J]. Journal of Vibration and Shock, 2019, 38(5): 162-168.
- [23] MADIM, TUSWANT, et al. Comparative analysis of taper and taperless blade design for ocean wind turbines in Ciheras Coastline, West Java[J]. Kapal, 2021, 18(1): 8-17.
- [24] HU Y, FU X Y, ZHANG H L, et al. Effects of blade aspect ratio and taper ratio on hovering performance of cycloidal rotor with large blade pitching amplitude[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2019, 32(5): 1121-1135.
- [25] ZHANG H, ZHAO T Y, ZHANG H Y, et al. Dynamic characteristics of mistuned bladed disk system under rub-impact force[J]. Advances in Mechanical Engineering, 2020, 12(11): 1-15.
- [26] 太兴宇,马辉,谭祯,等. 一种新的旋转叶片-机匣碰摩表征模型[J]. 机械工程学报, 2014, 50(21): 180-188.  
TAI Xingyu, MA Hui, TAN Zhen, et al. A new representation model of rotating blade-casing rub-impact[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(21): 180-188.
- [27] MA H, YIN F L, WU Z Y. Nonlinear vibration response analysis of a rotor-blade system with blade-tip rubbing[J]. Nonlinear Dynamic, 2016, 84(3): 1225-1258.
- [28] MA H, LU Y, WU Z Y, et al. A new dynamic model of rotor-blade systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 2015, 357: 168-194.
- [29] LI B Q, MA H, ZENG J, et al. Rotating blade-casing rubbing simulation considering casing flexibility[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2018, 148: 118-134.
- [30] 肖化燧,乐源,谢建华. 两自由度碰撞振动系统的粘滞运动和隆起现象[C]//第九届全国动力学与控制学术会议论文集. 2012: 179.
- [31] 肖化燧. 多自由度碰撞振动系统的粘滞运动和擦边分岔研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2012.  
XIAO Huayi. Research on sticking motion and grazing bifurcation in multi-degree-of-freedom vibro-impact systems[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2012.

第一作者:金 森(1989—),男,博士研究生。

E-mail: jinmiao\_mechanical@163.com

通信作者:王青山(1989—),博士,副教授,博士生导师。

E-mail: qingshanwang@csu.edu.cn