

# 考虑多状态柔性啮合的齿轮系统动态特性研究

张武红, 石建飞, 韩 闯, 张 欢, 靳伍银

(兰州理工大学机电工程学院, 甘肃 兰州 730050)

**摘要:** 周期性交变动载作用下轮齿柔性会诱发齿轮副啮合冲击和非线性振动, 揭示考虑轮齿柔性的直齿轮系统多状态啮合特性和非线性动态特性为传动系统的安全可靠运行奠定基础。根据悬臂梁理论和齿轮啮合原理, 计算啮合轮齿柔性变形量, 推导齿轮副柔性时变啮合参数的计算方法; 根据齿轮副的接触状态及受力环境, 提取多状态柔性啮合的特征, 进而建立多状态柔性啮合的直齿轮系统非线性动力学模型; 研究柔性时变啮合参数的演化规律和轮齿柔性变形量在多参数关联下的分布特性, 揭示了齿侧间隙变化时系统的全局分岔与混沌特性。结果表明, 轮齿柔性减小了双齿啮合区域, 影响齿轮系统的啮合参数和多状态啮合的特征, 并诱发齿轮副线外啮合; 齿侧间隙变化引起周期运动和混沌运动共存现象, 多初值下不完全分岔是引起动态行为共存的根本原因。

**关键词:** 直齿轮系统; 轮齿柔性啮合; 多状态啮合; 时变参数; 共存行为

**中图分类号:** TH132.41 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202411036

## Dynamic characteristics of a gear system with multi-status flexible meshing

ZHANG Wuhong, SHI Jianfei, HAN Chuang, ZHANG Huan, JIN Wuyin

(School of Mechanical and Electrical Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

**Abstract:** The flexibility of gear teeth under cyclic varying loads can induce meshing impact and nonlinear vibration of gear pairs. Revealing the multi-state meshing characteristics and nonlinear dynamic characteristics of spur gear systems considering teeth flexibility lays the foundation for the safe and reliable operation of transmission systems. Based on the cantilever beam theory and gear meshing principles, the flexible deformation of meshing teeth is calculated, and the calculation method for flexible time-varying meshing parameters of gear pairs is derived; based on the contact states and loading conditions of the gear pairs, extract the characteristics of multi-state flexible meshing, and a nonlinear dynamic model of the spur gear system with multi-status flexible meshing is established; study the evolution laws of flexible time-varying meshing parameters and the distribution characteristics of flexible deformation of gear teeth under multi-parameters correlation, and uncover the global bifurcation and chaos characteristics of the system when the teeth flank clearance changes. The results indicate that the flexibility of the gear teeth reduces the double teeth meshing area, affects the meshing parameters and multi-status meshing characteristics of the gear system, and induces out-of-line meshing of the gear pair; the variation of teeth flank clearance causes the coexistence of periodic motions and chaotic motions, and incomplete bifurcation under multiple initial conditions is the fundamental cause for such dynamic behavior coexistence.

**Keywords:** spur gear system; flexibility teeth engagement; multi-status engagement; time-varying parameters; coexistence behavior

齿轮作为重要的机械传动元件,能够高效地传递动力和运动,被广泛应用于各种机械装备<sup>[1-2]</sup>。在齿轮啮合过程中,轮齿柔性是必然存在的,而这种柔性所引发的变形会致使啮合过程偏离理论位置。研究考虑轮齿柔性的外啮合直齿轮系统多状态啮合非线性动力学行为,对提高齿轮系统传动性能和稳定运行具有重要意义。

近年来,国内外学者考虑轮齿柔性,研究扩展齿

接触效应和结构耦合效应等对齿轮系统传动性能的影响。如 LIU 等<sup>[3-4]</sup>提出考虑轮齿柔性的等效基圆半径,研究了齿距偏差对直齿圆柱齿轮系统分岔与混沌特性的影响。莫帅等<sup>[5-6]</sup>研究了齿圈柔性和时变啮合刚度等因素对非线性动力学模型的影响。XIE 等<sup>[7]</sup>建立了考虑齿体耦合柔度和齿形误差的时变啮合刚度模型。陈渊钊等<sup>[8]</sup>将机械臂等效为悬臂梁模型,采用浮动坐标系法建立柔性大变形梁的动

力学模型。XU 等<sup>[9]</sup>计算了考虑扩展齿接触的内啮合齿轮副的时变啮合刚度,并对基体刚度进行了修正。ZHENG 等<sup>[10]</sup>建立一种将扩展齿面接触和齿轮非线性动力学相结合模型,扩展了目前流行的圆角基础刚度的应用范围。LI 等<sup>[11]</sup>揭示扩展齿接触和齿轮邻齿间的耦合效应对齿轮系统分岔特性的影响。姚廷强等<sup>[12]</sup>建立了考虑轴承外圈结构弹性变形的多体接触动力学模型。CHEN 等<sup>[13]</sup>提出了一种考虑单个轮齿柔性变形、齿体变形、轮齿局部接触变形和相邻轮齿受载变形的直齿圆柱齿轮系统改进的动力学模型。以上模型考虑的因素越来越全面,但关于轮齿柔性变形对时变啮合参数(如啮合点半径、啮合点压力角、曲率半径、时变啮合刚度和载荷分配系数等)影响的研究少有文献报道,啮合参数计算模型的精确程度,直接决定着齿轮系统动力学分析与评价模型准确与否。

基于以上分析,本文构建了考虑轮齿柔性变形的齿轮副时变啮合参数计算模型,并提取了多状态柔性啮合的特征,最终建立了考虑多状态柔性啮合的齿轮系统非线性动力学模型,揭示了柔性啮合参数的演化规律和多状态啮合的齿轮系统非线性动态特性。

## 1 齿轮副轮齿柔性时变啮合参数

齿轮轮齿在动载荷和交变应力作用下的柔性变形包括:弯曲变形、轴向压缩变形、剪切变形、赫兹接触变形和基体变形,这些变形的矢量合成形成轮齿综合柔性变形,对齿轮副的啮合参数(如啮合点半径、啮合点压力角、啮合点曲率半径、重合度等)产生影响,进而影响时变啮合刚度和时变载荷分配系数以及齿轮系统的多状态啮合非线性动力学性能。

### 1.1 啮合轮齿柔性变形量计算

齿轮啮合过程中,轮齿可视为承受动载荷的悬臂梁模型,其受力如图 1 所示,其中  $R_{bi}$  ( $i=p, g$  分别代表主、从动轮)是齿轮基圆半径; $R_{fi}$  是齿根圆半径; $F$  为齿轮负载, $F$  可分解为  $F_x$  和  $F_y$  两个正交分量; $\beta_i$  为分量  $F_y$  和作用力  $F$  之间的夹角; $\theta_{bi}$  表示基圆上的半齿角; $\theta_{fi}$  表示齿根圆上的半齿角;其余参数的物理含义详见图 1。

考虑轮齿弯曲变形量  $\delta_b(t)$ 、轴向压缩变形量  $\delta_a(t)$ 、剪切变形量  $\delta_s(t)$ 、赫兹接触变形量  $\delta_{hi}(t)$  和基体变形量  $\delta_{fi}(t)$  沿啮合线方向的综合柔性变形量  $\delta_i$ ,由下式计算可得,矢量合成图如图 2 所示。

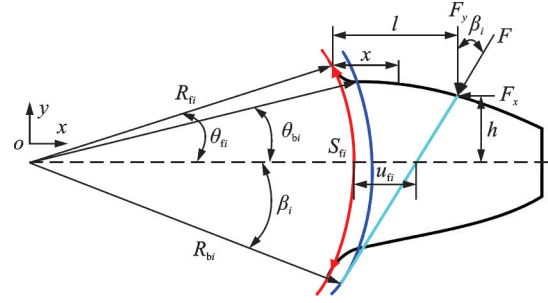


图 1 轮齿受力示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the force on the gear tooth

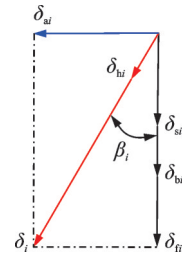


图 2 综合变形量合成图

Fig. 2 Total deformation synthesis diagram

$$\delta_i = \delta_{bi} + \delta_{ai} + \delta_{si} + \delta_{hi} + \delta_{fi} \quad (1)$$

其中,根据悬臂梁的挠曲线方程可解得弯曲变形量:针对挠曲线的曲率公式  $1/\rho = M/(EI)$  ( $1/\rho, M, I$  和  $E$  分别为曲率、弯矩、惯性矩和杨氏模量)积分可得  $\delta_{bi}$  ( $i=p, g$ ),如下式所示:

$$\delta_{bi} = \int_{-\beta_i}^{\theta_{bi}} \frac{F\varphi(x)R_{bi}(\theta_{bi} - \theta) \cos \theta}{\sqrt{1 - \varphi^2(x)}} d\theta \quad (2)$$

式中,  $\theta$  为齿轮角位移;中间函数  $\varphi(x)$  由下式计算可得:

$$\varphi(x) = \frac{1.5[(lx - 0.5x^2) \cos \beta_i + hx \sin \beta_i]}{E[R_{bi}(\theta_{bi} - \theta) \cos \theta + R_{bi} \cos \theta]} \quad (3)$$

其中,  $l, x, h$  的描述详见图 1,分别由下式计算:

$$l = R_{bi}[(\beta_i + \theta_{bi}) \sin \beta_i + \cos \beta_i - \cos \theta_{bi}] \quad (4)$$

$$x = R_{bi}[\cos \theta - (\theta_{bi} - \theta) \sin \theta - \cos \theta_{bi}] \quad (5)$$

$$h = R_{bi}[(\beta_i + \theta_{bi}) \cos \beta_i - \sin \beta_i] \quad (6)$$

式(1)中的压缩变形量  $\delta_{ai}$ 、剪切变形量  $\delta_{si}$ 、赫兹接触变形量  $\delta_{hi}$  和基体变形量  $\delta_{fi}$  根据力与刚度的关系计算可得,压缩刚度、剪切刚度、赫兹接触刚度、基体刚度详细计算见文献[2],考虑轮齿受载荷力  $F$ ,则  $\delta_{ai}$ 、 $\delta_{si}$ 、 $\delta_{hi}$  和  $\delta_{fi}$  由下式计算可得:

$$\delta_{ai} = \int_{-\beta_i}^{\theta_{bi}} \frac{F(\theta_{bi} - \theta) \cos \theta}{2Eb[(\theta_{bi} - \theta) \cos \theta + \sin \theta]} d\theta \quad (7)$$

$$\delta_{si} = \int_{-\beta_i}^{\theta_{bi}} \frac{1.2F(1 + \mu)(\theta_{bi} - \theta) \cos \theta}{Eb[(\theta_{bi} - \theta) \cos \theta + \sin \theta]} d\theta \quad (8)$$

$$\delta_{hi} = \frac{4F(1 - \mu^2)}{\pi Eb} \quad (9)$$

$$\delta_{fi} = \frac{F \cos^2 \alpha}{Eb} \left\{ L^* \left( \frac{u_{fi}}{S_{fi}} \right)^2 + M^* \left( \frac{u_{fi}}{S_{fi}} \right) + P^* [1 + Q^* \tan^2 \alpha] \right\} \quad (10)$$

式中,  $\mu$  为泊松比;  $\alpha$  为压力角;  $b$  为齿宽;  $L^*$ 、 $M^*$ 、 $P^*$ 、 $Q^*$  为基体变形修正系数;  $u_{fi}$  和  $S_{fi}$  的描述见图1, 以上参数详细计算见文献[1]; 式(2)、(7)和(8)中的积分上下限由以下式子计算可得:

$$\theta_{fi} = \frac{1}{z_i} \left[ \frac{\pi}{2} + 2(h_a - \bar{r}_c) \tan \alpha + \frac{2\bar{r}_c}{\cos \alpha} \right] \quad (11)$$

式中,  $h_a$  为齿顶高系数;  $\bar{r}_c$  为刀尖圆角半径;  $z_i$  为齿数。

$$\beta_i = \sqrt{\frac{R_{ci}^2(t)}{R_{bi}^2} - 1} - \theta_{bi} \quad (12)$$

式中,  $R_{ci}(t)$  为啮合点半径;  $\theta_{bi}$  由下式计算可得:

$$\theta_{bi} = \frac{\pi}{2z_i} + \text{inv} \alpha \quad (13)$$

式中,  $\text{inv}(\cdot)$  为渐开线函数。

### 1.2 考虑轮齿柔性的时变啮合参数建模

图3为考虑轮齿柔性的齿轮副啮合线细节图, 蓝色线AD为齿轮理论啮合线, A点和D点分别为理论啮合线的啮入、啮出点; 由于轮齿柔性诱发齿轮副非标准啮合, 引起系统滞后啮入和提前啮出, 因此考虑轮齿柔性的实际啮合线为红色线A<sub>1</sub>D<sub>1</sub>, A<sub>1</sub>点和D<sub>1</sub>点分别为实际啮合线的啮入、啮出点。O<sub>p</sub>和O<sub>g</sub>为主、从动轮旋转中心。

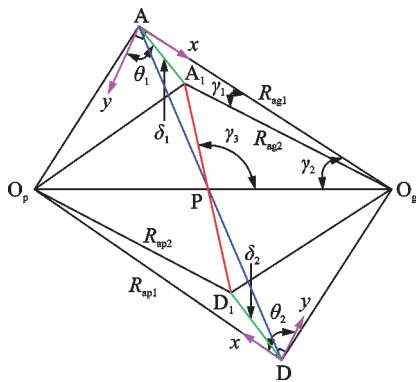


图3 考虑轮齿柔性的齿轮副啮合线细节图

Fig. 3 Detail diagram of the gear pairs meshing line considering the flexibility of teeth

轮齿柔性使A点和D点偏离理论位置, 因此重新计算啮入、啮出点的位置至关重要。A<sub>1</sub>点的位置由从动轮等效齿顶圆半径  $R_{ag2}$  确定:

$$R_{ag2} = \sqrt{R_{ag1}^2 + \delta_1^2 - 2R_{ag1} \delta_1 \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta_1 \right)} \quad (14)$$

式中,  $R_{ag1}$  为标准齿顶圆半径;  $\delta_1$  为啮入点轮齿综合变形量;  $\theta_1$  为  $\delta_1$  与  $y$  轴之间的夹角。

同理, D<sub>1</sub>点的位置由主动轮等效齿顶圆半径  $R_{ap2}$  确定,  $R_{ap2}$  由下式计算可得:

$$R_{ap2} = \sqrt{R_{ap1}^2 + \delta_2^2 - 2R_{ap1} \delta_2 \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta_2 \right)} \quad (15)$$

式中,  $R_{ap1}$  为主动轮标准齿顶圆半径;  $\delta_2$  为啮出点轮齿综合变形量;  $\theta_2$  为  $\delta_2$  与  $y$  轴之间的夹角(见图3)。

直线AO<sub>g</sub>与直线A<sub>1</sub>O<sub>g</sub>和直线O<sub>g</sub>O<sub>p</sub>之间的夹角分别为  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$ :

$$\gamma_1 = \arccos \left( \frac{R_{ag1}^2 + R_{ag2}^2 - \delta_1^2}{2R_{ag1} R_{ag2}} \right) \quad (16)$$

$$\gamma_2 = \arccos \left( \frac{R_{bg}}{R_{ag1}} \right) - \alpha \quad (17)$$

直线A<sub>1</sub>P的距离由下式计算可得:

$$d_{A_1P} = \sqrt{2R_{ag2} R_g \cos(\gamma_2 - \gamma_1) - R_{ag2}^2 - R_g^2} \quad (18)$$

式中,  $R_g$  为从动轮分度圆半径。

直线A<sub>1</sub>P与直线O<sub>g</sub>P之间的夹角  $\gamma_3$  由下式计算可得:

$$\gamma_3 = \arccos \left( \frac{d_{A_1P}^2 + R_g^2 - R_{ag2}^2}{2d_{A_1P} R_g} \right) \quad (19)$$

式中,  $d_{A_1P}$  为A<sub>1</sub>点和节点P之间的距离。

考虑轮齿柔性的齿轮副曲率半径由下式计算可得:

$$\begin{cases} S_{dp}(t) = (R_{bp2} + R_{bg2}) \tan \alpha_3 - \sqrt{R_{ag2}^2 - R_{bg2}^2} + R_{bp2} \omega_p t \\ S_{dg}(t) = \sqrt{R_{ag2}^2 - R_{bg2}^2} - R_{bp2} \omega_p t \end{cases} \quad (20)$$

式中,  $S_{di}(t)$  ( $i=p, g$ ) 为齿轮副的曲率半径;  $\omega_p$  为主动轮角速度;  $t$  为时间;  $R_{bi2}$  ( $i=p, g$ ) 和  $\alpha_3$  为齿轮等效基圆半径和等效压力角, 分别由下式计算可得:

$$R_{bi2} = R_i \sin(\pi - \gamma_3) \quad (21)$$

$$\alpha_3 = \gamma_3 - \frac{\pi}{2} \quad (22)$$

考虑轮齿柔性的齿轮副啮合点半径由下式计算可得:

$$\begin{cases} R_{dp}(t) = \sqrt{R_{bp2}^2 + S_{dp}^2(t)} \\ R_{dg}(t) = \sqrt{R_{bg2}^2 + S_{dg}^2(t)} \end{cases} \quad (23)$$

式中,  $R_{di}(t)$  ( $i=p, g$ ) 为齿轮副的啮合点半径。

考虑轮齿柔性的齿轮副啮合点压力角由下式计算可得:

$$\begin{cases} \alpha_{dp}(t) = \arccos [R_{bp2}/R_{dp}(t)] \\ \alpha_{dg}(t) = \arccos [R_{bg2}/R_{dg}(t)] \end{cases} \quad (24)$$

式中,  $\alpha_{di}(t)$  ( $i=p, g$ ) 为齿轮副的啮合点压力角。

轮齿柔性变形不但诱发齿轮副非标准啮合, 而且影响齿轮系统的啮合点半径、重合度等时变啮合参数。图4为齿轮重合度示意图,  $\epsilon_m$  和  $\epsilon$  分别为理论

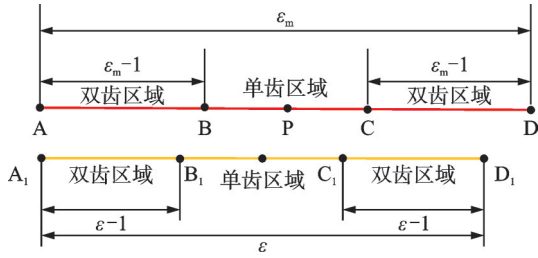


图 4 齿轮重合度示意图

Fig. 4 Schematic diagram of gear contact ratio

重合度和考虑轮齿柔性的实际重合度,如下式所示,其余参数描述见图 3。

$$\epsilon = l_{A_1D_1} / p_b \quad (25)$$

式中,  $l_{A_1D_1}$  和  $p_b$  分别为考虑轮齿柔性的啮合线长度和基圆齿距。式(25)表示为:

$$\epsilon = \frac{z_p(\tan \alpha_{ap2} - \tan \alpha_3) + z_g(\tan \alpha_{ag2} - \tan \alpha_3)}{2\pi} \quad (26)$$

式中,  $\alpha_{ai2}$  ( $i=p, g$ ) 为齿轮系统提前啮出点、滞后啮入点的等效齿顶圆压力角,由下式计算可得:

$$\begin{cases} \alpha_{ap2} = \arccos(R_{bp2}/R_{ap2}) \\ \alpha_{ag2} = \arccos(R_{bg2}/R_{ag2}) \end{cases} \quad (27)$$

### 1.3 考虑轮齿柔性的动态啮合参数计算

#### 1.3.1 时变啮合刚度

沿啮合线方向的综合柔性刚度  $k(t)$  包括弯曲刚度  $k_b(t)$ 、剪切刚度  $k_s(t)$ 、压缩刚度  $k_a(t)$ 、赫兹接触刚度  $k_h(t)$ 、基体刚度  $k_f(t)$ 、结构体耦合刚度  $k_{jn}$  和  $k_{nj}$  表示由于轮齿  $n$  ( $n=1, 2$  分别表示第一对轮齿和第二对轮齿) 受到载荷而在轮齿  $j$  ( $j=1, 2$  分别表示第一对轮齿和第二对轮齿) 中产生的等效刚度和轮齿  $j$  ( $j=1, 2$ ) 受到载荷而在轮齿  $n$  ( $n=1, 2$ ) 中产生的等效刚度。综上所述,  $k(t)$  由下式计算可得:

$$\frac{1}{k(t)} = \left[ \frac{1}{k_{bi}(t)} + \frac{1}{k_{si}(t)} + \frac{1}{k_{ai}(t)} + \frac{1}{k_{fi}(t)} + \frac{1}{k_{nj}(t)} + \frac{1}{k_{mi}(t)} + \frac{1}{k_{hi}(t)} \right] \quad (28)$$

式中,  $k_{xi}$  ( $x=b, s, a, f, h$  分别表示弯曲、剪切、压缩、基体、赫兹接触), 根据  $F$  的增量  $\Delta F$  与柔性变形量  $\delta_{x1i}$  的增量  $\Delta\delta_{x1i}$  之间的关系可得,如下式所示:

$$k_{xi} = \frac{\Delta F}{\Delta\delta_{x1i}} \quad (29)$$

$k_{jn}$  和  $k_{nj}$  分别由下式计算可得:

$$\frac{1}{k_{nj}} = \frac{\cos \beta_j \cos \beta_n}{bE} \left[ L_j \frac{u_j u_n}{S^2} + (M_j \tan \beta_n + P_j) \frac{u_j}{S} + (Q_j \tan \beta_j + R_j) \frac{u_n}{S} (S_j \tan \beta_j + T_j) \tan \beta_n + U_j \tan \beta_j + V_j \right] \quad (30)$$

$$\frac{1}{k_{jn}} = \frac{\cos \beta_j \cos \beta_n}{bE} \left[ L_n \frac{u_j u_n}{S^2} + (M_n \tan \beta_j + P_n) \frac{u_n}{S} + (Q_n \tan \beta_n + R_n) \frac{u_j}{S} (S_n \tan \beta_n + T_n) \tan \beta_j + U_n \tan \beta_n + V_j \right] \quad (31)$$

式(30)和(31)的计算式见文献[11]。式(30)和(31)中,  $\beta_n$  和  $\beta_j$  的计算同式(12)中  $\beta_i, \beta_j$  见图 1, 其余参数详见文献[9-11]。

#### 1.3.2 时变载荷分配系数

根据能量法计算载荷分配系数  $LSR$ , 考虑轮齿柔性对重合度的影响, 结合图 4 中的区域划分,  $LSR$  的计算如下式所示:

$$LSR = \begin{cases} \frac{1}{k_1}, & A_1B_1 \text{ 区域} \\ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, & B_1C_1 \text{ 区域} \\ 1, & B_1C_1 \text{ 区域} \\ \frac{1}{k_1}, & C_1D_1 \text{ 区域} \\ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, & C_1D_1 \text{ 区域} \end{cases} \quad (32)$$

式中,  $k_n$  ( $n=1, 2$ ) 为第  $n$  对啮合轮齿的综合柔性刚度, 由式(28)计算可得。

## 2 齿轮副柔性啮合动力学建模

本文以外啮合直齿轮副为研究对象, 假设齿轮副为刚性支撑, 考虑轮齿柔性的齿面、齿背简化物理模型如图 5 所示, 本文简化物理模型不同于理论的简化物理模型, 主要区别在于  $R_{bi2}$  ( $i=p, g$  表示主、从动轮) 和  $k_r(t)$  ( $r=d, k$  表示齿面、齿背)。

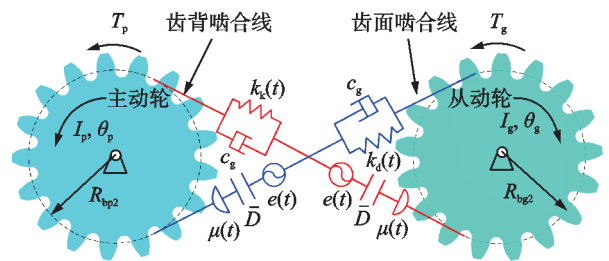


图 5 考虑轮齿柔性的齿面、齿背简化物理模型

Fig. 5 Simplified physical model of the drive-side and back-side considering the flexibility of teeth

图 5 中,  $c_g$  为啮合阻尼, 由下式计算可得, 计算式见文献[10];  $\bar{D}$  为齿侧间隙的一半;  $\mu(t)$  为干摩擦工况下的摩擦系数;  $e(t)$  为动态传递误差;  $k_d(t)$  为齿面时变啮合刚度,  $k_k(t)$  为齿背时变啮合刚度;  $T_i, \theta_i$  和  $I_i$  ( $i=p, g$ ) 分别为转矩、转动角位移和转动惯

量。表1为齿轮几何参数。

$$c_g = 2\zeta \sqrt{m_e k(t)} \quad (33)$$

式中,  $\zeta$ 为阻尼比(通常为定值且取值范围为0.03~0.17);  $m_e$ 为当量质量。

表 1 齿轮几何参数

Tab. 1 Gear geometric parameters

| 几何参数                | 主动轮 p | 从动轮 g |
|---------------------|-------|-------|
| 齿数 $z_i (i=p, g)$   | 30    | 45    |
| 模数 $m/\text{mm}$    | 3     | 3     |
| 齿顶高系数 $h_a$         | 1     | 1     |
| 顶隙系数 $c$            | 0.25  | 0.25  |
| 压力角 $\alpha/^\circ$ | 20    | 20    |
| 杨式模量 $E/\text{MPa}$ | 206   | 206   |

## 2.1 多状态柔性啮合行为划分

轮齿柔性不但影响齿轮系统的双齿啮合区域而且对多状态啮合的边界条件有较大的影响。考虑轮齿柔性的齿轮相对位移  $\bar{x} = R_{bp2}\theta_p - R_{bg2}\theta_g - e(t)$ , 运动时间  $t = q\bar{T}_0 (q \in \mathbb{N})$ , 啮合周期  $\bar{T}_0 = 2\pi/(\omega_p z_p)$ 。重合度与齿侧间隙之间的交互作用诱发齿轮系统的多状态啮合, 根据  $\bar{x}$  与  $\pm \bar{D}$  的数值关系, 齿轮副多状态柔性啮合特征划分为以下5种类型。

(1) 单齿齿面啮合:

$$\bar{x} \geq \bar{D}, (n + \epsilon - 1)\bar{T}_0 < t < (n + 1)\bar{T}_0;$$

(2) 双齿齿面啮合:

$$\bar{x} \geq \bar{D}, n\bar{T}_0 < t < (n + \epsilon - 1)\bar{T}_0;$$

(3) 轮齿脱啮:

$$-\bar{D} < \bar{x} < \bar{D}, n\bar{T}_0 < t < (n + 1)\bar{T}_0;$$

(4) 单齿齿背啮合:

$$\bar{x} \leq -\bar{D}, (n + \epsilon - 1)\bar{T}_0 < t < (n + 1)\bar{T}_0;$$

(5) 双齿齿背啮合:

$$\bar{x} \leq -\bar{D}, n\bar{T}_0 < t < (n + \epsilon - 1)\bar{T}_0.$$

## 2.2 系统多状态柔性啮合动力学建模

根据直齿轮副5种柔性啮合状态下的动力学模型及其边界条件, 通过引入啮合力函数  $F_m$ 、啮合状态函数  $\bar{h}(t, \bar{x})$ 、当量质量  $m_e$ 、内部误差激励  $\bar{F}_h(t)$ 、负载  $\bar{F}_m$  和相对加速度  $\ddot{x}$ , 构建了考虑轮齿柔性的5状态啮合模型, 如下式所示:

$$m_e \ddot{x} - \bar{h}(t, \bar{x}) F_m = \bar{F}_m + \bar{F}_h(t) \quad (34)$$

式中,  $m_e$ 、 $\bar{F}_h(t)$ 、 $F_m$ 、 $\bar{F}_m$  和  $\bar{h}(t, \bar{x})$  分别由以下各式计算得到:

$$m_e = I_p I_g / (R_{bp2}^2 I_p + R_{bg2}^2 I_g) \quad (35)$$

$$\bar{F}_h(t) = -m_e \ddot{e}(t) \quad (36)$$

$$F_m = \begin{cases} k_d(t)(\bar{x} - \bar{D}) + c_g \dot{\bar{x}}, & \bar{x} \geq \bar{D} \\ 0, & -\bar{D} < \bar{x} < \bar{D} \\ k_k(t)(\bar{x} + \bar{D}) + c_g \dot{\bar{x}}, & \bar{x} \leq -\bar{D} \end{cases} \quad (37)$$

$$\bar{F}_m = (R_{bp2} I_p T_p - R_{bg2} I_g T_g) / (R_{bp2}^2 I_p + R_{bg2}^2 I_g) \quad (38)$$

$$\bar{h}(t, \bar{x}) = \begin{cases} \bar{h}_{st}(t, \bar{x}), & (n + \epsilon - 1)\bar{T}_0 < t < (n + 1)\bar{T}_0 \\ \bar{h}_{dt}(t, \bar{x}), & n\bar{T}_0 < t < (n + \epsilon - 1)\bar{T}_0 \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (39)$$

式中,  $\bar{h}_{st}(t, \bar{x})$  和  $\bar{h}_{dt}(t, \bar{x})$  分别为单、双齿啮合状态的方程, 由下式计算可得:

$$\bar{h}_{st}(t, \bar{x}) = \begin{cases} 1 + \lambda_{d2}(t) \mu_{d2}(t) g_{d2}(t), & \bar{x} \geq \bar{D} \\ 0, & -\bar{D} < \bar{x} < \bar{D} \\ 1 + \lambda_{k2}(t) \mu_{k2}(t) g_{k2}(t), & \bar{x} \leq -\bar{D} \end{cases} \quad (40)$$

$$\bar{h}_{dt}(t, \bar{x}) =$$

$$\begin{cases} 1 + \lambda_{d1}(t) \mu_{d1}(t) g_{d1}(t) L_{d1}(t) + \\ \lambda_{d2}(t) \mu_{d2}(t) g_{d2}(t) L_{d2}(t), & \bar{x} \geq \bar{D} \\ 0, & -\bar{D} < \bar{x} < \bar{D} \\ 1 + \lambda_{k1}(t) \mu_{k1}(t) g_{k1}(t) L_{k1}(t) + \\ \lambda_{k2}(t) \mu_{k2}(t) g_{k2}(t) L_{k2}(t), & \bar{x} \leq -\bar{D} \end{cases} \quad (41)$$

式中,  $\lambda_{rn}(t)$  和  $g_{rn}(t) (r=d, k; n=1, 2)$  分别为摩擦方向系数、等效摩擦力臂;  $L_{rn}(t)$ 、 $\lambda_{rn}(t)$  和  $g_{rn}(t)$  分别由式(32)和下式计算可得:

$$\lambda_{rn}(t) = \begin{cases} \text{sgn}[v_{dn}(t)], & \bar{x} \geq \bar{D} \\ 0, & -\bar{D} < \bar{x} < \bar{D} \\ \text{sgn}[v_{kn}(t)], & \bar{x} \leq -\bar{D} \end{cases} \quad (42)$$

式中,  $\text{sgn}(\cdot)$  为符号函数;  $v_{dn}(t)$  和  $v_{kn}(t)$  为齿轮副的相对滑动速度, 详细计算见文献[2]。

$$g_{rn}(t) = \begin{cases} g_{dn}(t), & \bar{x} \geq \bar{D} \\ 0, & -\bar{D} < \bar{x} < \bar{D} \\ g_{kn}(t), & \bar{x} \leq -\bar{D} \end{cases} \quad (43)$$

其中,  $g_{rn}(t) (r=d, k)$  的详细计算见文献[2]。

系统固有频率  $\omega_n = \sqrt{k_{av}/m_e}$ ,  $k_{av}$  为平均啮合刚度; 无量纲时间  $\tau = \omega_n t$ ; 无量纲啮合频率  $\omega = \omega_n/\omega_h$ ,  $\omega_h$  为啮合频率。引入特征尺寸  $D_c$ , 系统无量纲参数如下:  $x = \bar{x}/D_c$ ,  $D = \bar{D}/D_c$ ,  $c = c_g/(m_e \omega_n)$ ,  $F(\tau) = \bar{F}_m/(m_e D_c \omega_n^2)$ ,  $k_m(\tau) = k_m(t)/(m_e \omega_n^2)$ ,  $F_h(\tau) = \bar{F}_h(t)/(m_e D_c \omega_n^2) = \epsilon \omega^2 \cos(\omega \tau)$ , 式(34)可无量纲化为:

$$\ddot{x} - h(\tau, x) F_m = F(\tau) + \epsilon \omega^2 \cos(\omega \tau) \quad (44)$$

式中,  $F_m$  和  $h(\tau, x)$  为无量纲动态啮合力函数和状态函数, 分别由下式计算可得:

$$F_m = \begin{cases} k_d(\tau)(x-D) + c\dot{x}, & x \geq D \\ 0, & -D < x < D \\ k_k(\tau)(x+D) + c\dot{x}, & x \leq -D \end{cases} \quad (45)$$

$$h(\tau, x) = \begin{cases} h_{st}(\tau, x), & (n + \epsilon - 1)\bar{T}_0 < \tau < (n + 1)\bar{T}_0 \\ h_{dt}(\tau, x), & n\bar{T}_0 \leq \tau \leq (n + \epsilon - 1)\bar{T}_0 \end{cases} \quad (46)$$

式中,  $h_{st}(\tau, x)$  和  $h_{dt}(\tau, x)$  分别为无量纲单、双齿啮合状态方程, 由下式计算可得:

$$h_{st}(\tau, x) = \begin{cases} 1 + \lambda_{d2}(\tau)\mu_{d2}(\tau)g_{d2}(\tau), & x \geq D \\ 0, & -D < x < D \\ 1 + \lambda_{k2}(\tau)\mu_{k2}(\tau)g_{k2}(\tau), & x \leq -D \end{cases} \quad (47)$$

$$h_{dt}(\tau, x) = \begin{cases} 1 + \lambda_{d1}(\tau)\mu_{d1}(\tau)g_{d1}(\tau)L_{d1}(\tau) + \lambda_{d2}(\tau)\mu_{d2}(\tau)g_{d2}(\tau)L_{d2}(\tau), & x \geq D \\ 0, & -D < x < D \\ 1 + \lambda_{k1}(\tau)\mu_{k1}(\tau)g_{k1}(\tau)L_{k1}(\tau) + \lambda_{k2}(\tau)\mu_{k2}(\tau)g_{k2}(\tau)L_{k2}(\tau), & x \leq -D \end{cases} \quad (48)$$

综上可得包含双齿齿面啮合、单齿齿面啮合、双齿齿背啮合、单齿齿背啮合和轮齿脱啮的直齿圆柱齿轮系统非线性动力学无量纲归一化表达式, 如式(44)所示。

### 3 数值仿真与动态分析

#### 3.1 啮合轮齿柔性变形量的变化规律

图 6 和 7 分别为轮齿柔性变形量图、考虑载荷分配和单双齿啮合的轮齿柔性变形量图。图 6 中, 红色曲线和绿色曲线为本文模型和传统模型的主动轮柔性变形量, 蓝色曲线和蓝绿色曲线为本文模型和传统模型的从动轮柔性变形量, 黑色曲线和粉色曲线为本文模型和传统模型的一对轮齿副综合柔性变形量, 沿着啮合线, 主动轮柔性变形量持续增大, 而从动轮柔性变形量持续减小, 综合柔性变形量先减小后增大。图 7 中, 紫色曲线和蓝绿色曲线为本文模型和传统模型考虑载荷分配的轮齿柔性变形量, 橙色曲线和绿色曲线为本文模型和传统模型考虑载荷分配和单双齿啮合的轮齿柔性变形量, 沿着啮合线, 紫色曲线、蓝绿色曲线、橙色曲线和绿色曲线先增大后减小, 在单齿区域变形量趋于最大, 由于双齿区域的两对轮齿载荷分配不均匀, 故在单双齿交替处曲线发生了跳跃。综上, 本文模型与传统模型在趋势上具有一致性, 从而验证了本文模型的正确性。

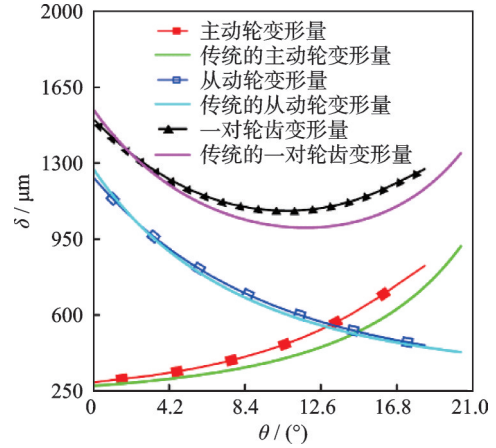


图 6 轮齿柔性变形量

Fig. 6 The teeth flexible deformation quantity

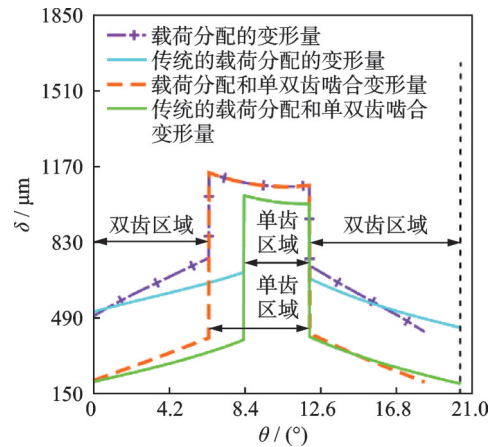


图 7 考虑载荷分配和单双齿啮合的轮齿柔性变形量

Fig. 7 The teeth flexible deformation quantity considering load distribution and single/double teeth engagement

#### 3.2 时变啮合参数的演化规律

图 8~13 分别为时变的啮合点半径、啮合点压力角、曲率半径、啮合刚度、单双齿啮合和结构体耦合效应刚度、载荷分配系数。图 8~11 中, 蓝色曲线和蓝绿色曲线分别为考虑与不考虑轮齿柔性的主动轮啮合点半径、主动轮啮合点压力角、主动轮曲率半径、从动轮啮合刚度; 红色曲线和绿色曲线分别为考虑与不考虑轮齿柔性的从动轮啮合点半径、从动轮啮合点压力角、从动轮曲率半径、主动轮啮合刚度。沿着啮合线, 蓝色曲线和蓝绿色曲线不断增大, 红色曲线和绿色曲线不断减小, 黑色曲线和粉色曲线分别为考虑与不考虑轮齿柔性的一对轮齿副综合刚度, 沿着啮合线先增大后减小。图 12 中, 蓝色曲线和红色曲线为考虑和不考虑结构体耦合效应的时变啮合刚度, 蓝绿色曲线为不考虑轮齿柔性的单双齿啮合刚度, 单齿区域的轮齿刚度较小, 双齿区域的轮齿刚度较大, 且在考虑轮齿柔性后双齿区域占比减小。图 13 中, 红色曲线和蓝绿色曲线分别为考虑与不考虑轮齿柔性的载荷分配系数。沿着啮合线,

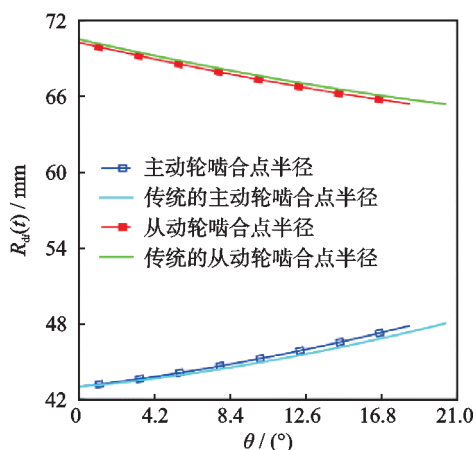


图8 啮合点半径图

Fig. 8 Engagement point radius diagram

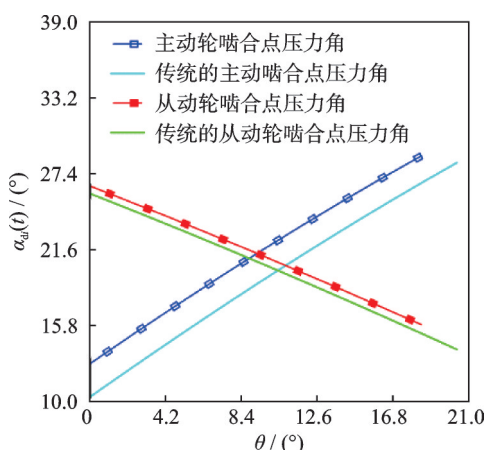


图9 啮合点压力角图

Fig. 9 Engagement point pressure angle diagram

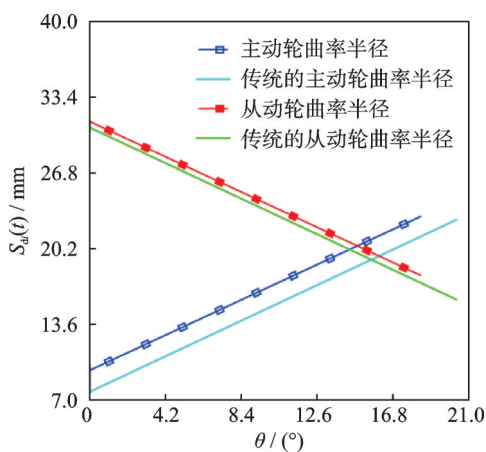


图10 曲率半径图

Fig. 10 Curvature radius diagram

红色曲线和蓝绿色曲线在第1个双齿区域先增大,单齿区域始终保持不变,第2个双齿区域不断减小。图12和13中,因为双齿区域内两对轮齿载荷分配不均匀,所以在单双齿切换时曲线发生跳跃现象。

从图8~13中不难看出,考虑轮齿柔性时齿轮系统的重合度减小,进而影响啮合点的半径、压力角和重合度等啮合参数。曲线在考虑轮齿柔性后变得

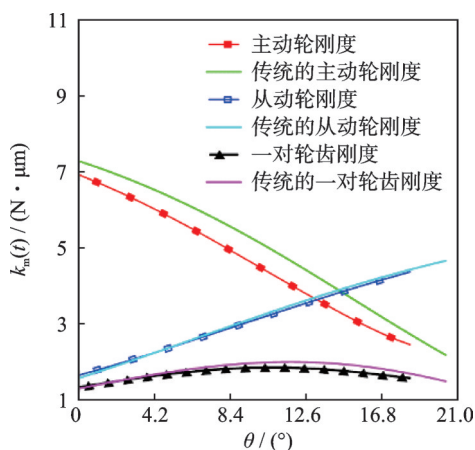


图11 啮合刚度图

Fig. 11 Engagement stiffness diagram

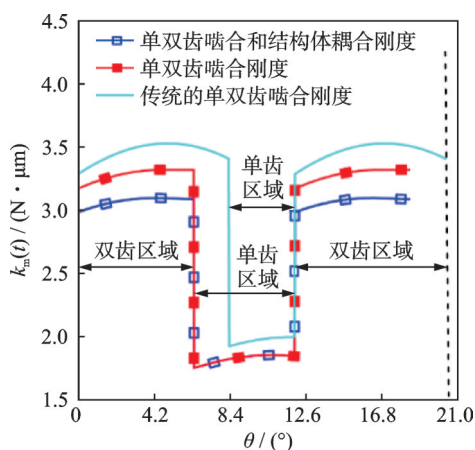


图12 考虑单双齿啮合和结构体耦合效应刚度图

Fig. 12 Stiffness diagram considering the single and double teeth engagement, and structural coupling effects

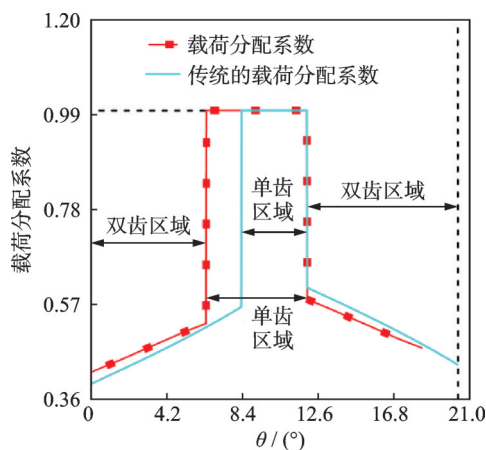


图13 载荷分配系数图

Fig. 13 Load distribution coefficient diagram

更加平滑,且经过与传统模型的对比,两对比曲线趋势上具有一致性。

### 3.3 参数平面上轮齿柔性变形量分布特性

图14为压力角和主动轮啮合点半径组成平面上最大柔性变形量分布图,图15为压力角和主动轮

曲率半径组成平面上最大柔性变形量分布图。图中,  $R_{dp}(t)$ 、 $S_{dp}(t)$ 、 $\delta$  和  $\alpha$  分别为主动轮的啮合点半径、曲率半径、柔性变形量的幅值和压力角。红色区域中, 轮齿发生较大变形,  $\delta$  可能导致轮齿出现非标准啮合、断裂和齿面磨损等病害现象; 蓝色区域的  $\delta$  最小, 相比红色区域, 蓝色区域齿轮性能较优。可见,  $\alpha$ 、 $R_{dp}(t)$  和  $S_{dp}(t)$  与  $\delta$  的变化成正相关, 在设计齿轮系统时, 选择较小的  $\alpha$ 、 $R_{dp}(t)$  和  $S_{dp}(t)$  时系统性能较优, 此双参数图可对齿轮结构优化设计、性能提升提供参考。

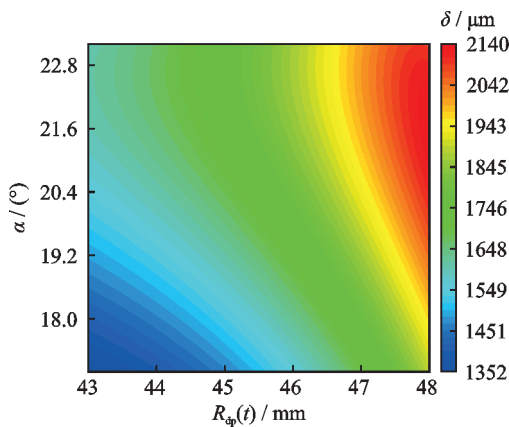


图 14 压力角和主动轮啮合点半径影响的最大柔性变形量分布图

Fig. 14 Maximum flexibility deformation distribution diagram influenced by pressure angle and radius of the meshing point on the driving gear

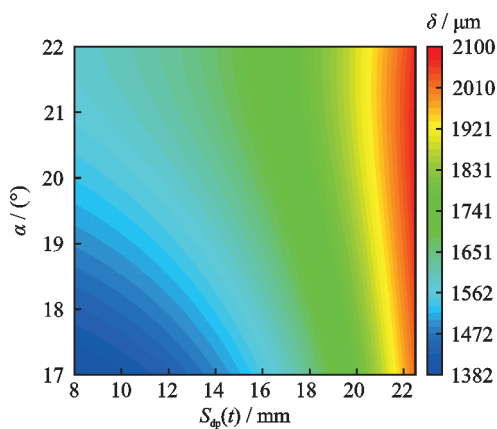


图 15 压力角和主动轮曲率半径影响的最大柔性变形量分布图

Fig. 15 Maximum flexibility deformation distribution diagram influenced by pressure angle and curvature radius on the driving gear

### 3.4 系统全局非线性动态特性分析

为分析齿轮传动系统多状态柔性啮合非线性动态行为, 定义了 1 种 Poincaré 映射截面  $\beta$ :  $\beta = \{(x, \dot{x}, \tau) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{T}, \text{mod}(\tau, 2\pi/\omega) = 0\}$ 。

结合相图、Poincaré 截面图等分析外啮合直齿

轮系统多状态柔性啮合特性。通过相图 ( $x \geq D$ , 系统为齿面啮合;  $-D < x < D$ , 系统为轮齿脱啮;  $x \leq -D$ , 系统为齿背啮合) 和 Poincaré 截面图辨识齿轮系统多状态柔性啮合行为和运动周期, 结合分岔图和最大 Lyapunov 指数 (TLE) 图, 揭示齿轮系统随齿侧间隙  $D$  变化的全局分岔与混沌特性。

取系统参数  $\omega = 1.8, D \in (0, 1.5]$ , 分析  $D$  对非线性动态行为的影响。图 16 为多状态柔性啮合的齿轮系统随  $D$  变化的分岔图和 TLE 图, 图 17 为与图 16 相对应的分岔树状图, 圆圈代表齿轮系统的运动类型, 矩形框代表分岔点, 图 18 为不同  $D$  对应的相图和 Poincaré 截面图。图 16 中, A 点之前系统表现为周期 1 运动 (P1), 齿轮系统多状态柔性啮合交替进行; 在 A 点时, 一部分 P1 运动转迁为周期 3 运动 (Q3), 系统发生不完全分岔现象; A 点与 B 点之间, P1 和 Q3 共存, 其相轨迹和 Poincaré 截面图见图 18(a); 经过分岔点 B 后, P1 运动完全转迁为周期 3 运动 (P3), Q3 运动完全转迁为周期 5 运动 (P5), P3 与 P5 共存, 见图 18(b), 则 B 为双重分岔点, 在该点附近齿轮系统运动状态极不稳定; D 点, P3 和 P5 同时转迁为混沌运动 (QN1), 随后 QN1 在 E 点完全转迁为周期 4 运动 (P4); 在 F 点, 周期 4 运动 (P4) 完全转迁为周期 2 运动 (P2); 在 G 点, P2 在部分初值下转迁为混沌运动 (QN2), 而在余下初值内保持原始状态, 进而引起 P2 与 QN2 共存现象, 见图 18(c); 穿越 H 点时, QN2 完全转迁为新的周期 2 运动 (Q2), 从而导致 P2 和 Q2 的共存现象, 见图 18(d); 在 I 点, Q2 转迁为新的混沌运动 (QN3), 引起 P2 和 QN3 共存, 见图 18(e); J 点之后, QN3 运动转迁为新

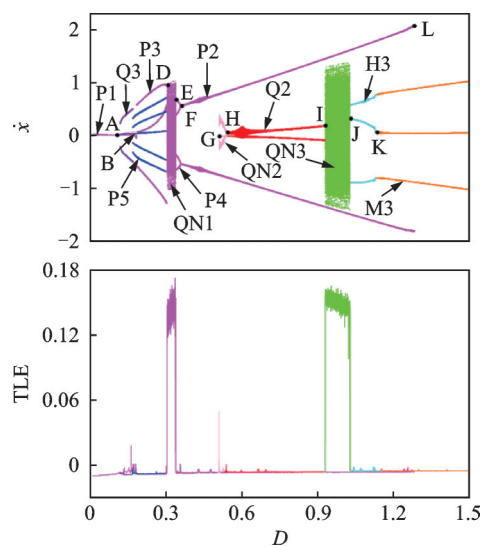


图 16 多状态柔性啮合的齿轮系统随  $D$  变化的分岔图和 TLE 图

Fig. 16 Bifurcation diagram and TLE diagram of a multi-status flexible meshing gear system as a function of  $D$

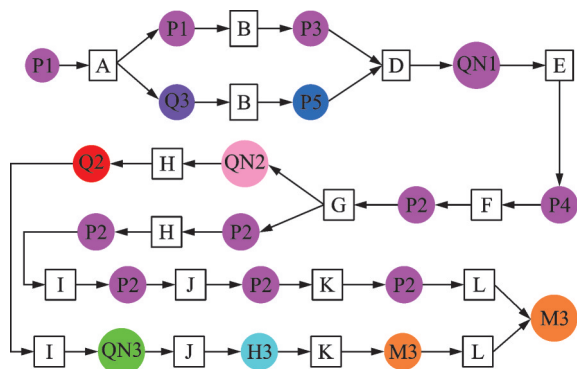
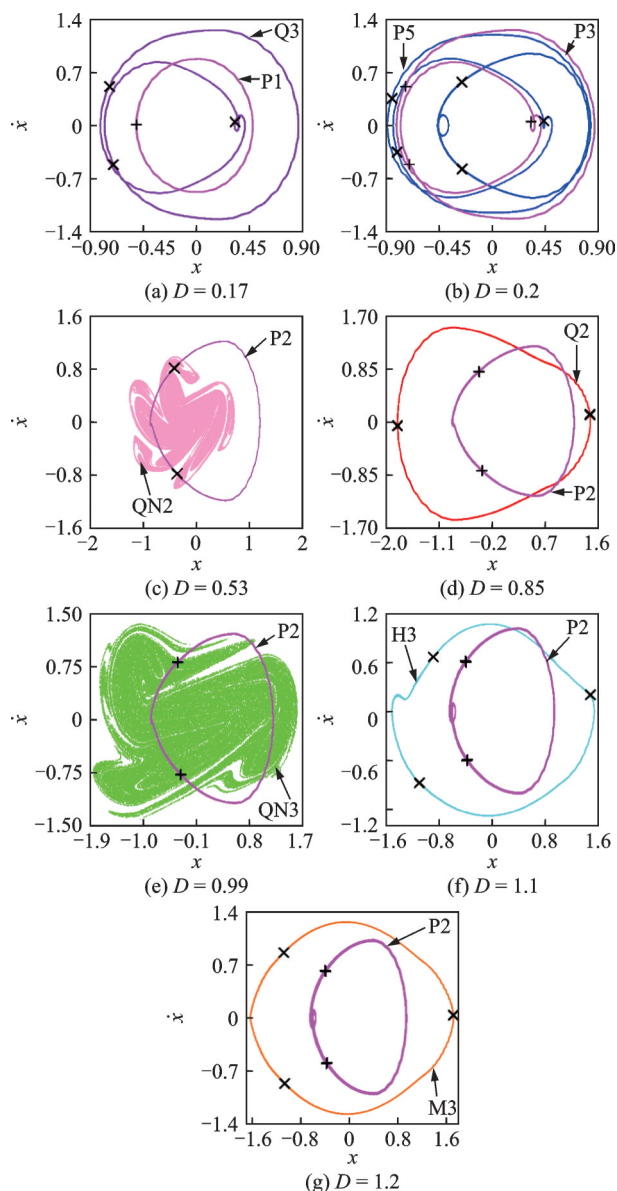


图17 分岔树状图

Fig. 17 Bifurcation tree diagram

图18 不同 $D$ 对应的相图和Poincaré截面图Fig. 18 Phase and Poincaré section diagrams for different values of  $D$ 

的周期3运动(H3),此时P2运动和H3共存,见图18(f);随后在K点,H3完全迁为新的周期3运动(M3),此时H3运动的拓扑结构与M3运动的拓扑结构略有不同,P2与M3共存,见图18(g);L点之

后,齿轮系统的运动全部迁为M3运动。图16中共存运动的具体分岔与演化过程可通过分岔树状图清晰地揭示,如图17所示。

综上所述,当间隙 $D$ 较小时,系统表现为稳定的P1运动;随着 $D$ 的增大,系统动力学行为相对复杂,且出现周期运动与混沌运动共存现象,发现非完全分岔是引起系统运动共存的根本原因,如分岔点A、B和G;当间隙 $D$ 较大时,系统呈现出稳定的M3运动,但振幅较大,系统振动强度较大。

## 4 结论

本文首先计算了啮合轮齿柔性变形量,进而推导了考虑轮齿柔性的时变啮合参数,最终构建了多状态柔性啮合非线性动力学模型,揭示轮齿柔性对啮合参数的影响规律,并讨论了齿轮系统随齿侧间隙 $D$ 变化的全局分岔与混沌特性,具体结论如下:

(1) 轮齿柔性减小了双齿啮合区域,进而影响重合度、啮合点半径、曲率半径、时变啮合刚度等时变啮合参数。

(2) 齿侧间隙对齿轮系统共存响应的分岔与演化有较大的影响,随着齿侧间隙的增大,稳定的周期运动经非完全分岔产生共存响应,包括周期运动与周期运动的共存,周期运动与混沌运动的共存。当间隙较大时,尽管系统表现为稳定的周期运动,但其振幅较大,系统振动强度仍然较大,工程实际中应尽可能避免。

本文所建立的模型考虑了轮齿柔性变形,能在一定程度上反映齿轮系统的实际传动过程,为进一步研究考虑轮齿柔性的齿轮系统冲击碰撞特性奠定了基础。

## 参考文献:

- [1] SHI J F, GOU X F, ZHU L Y. Calculation of time-varying backlash for an involute spur gear pair[J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 152: 103956.
- [2] SHI J F, GOU X F, ZHU L Y. Modeling and analysis of a spur gear pair considering multi-state mesh with time-varying parameters and backlash[J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 134: 582-603.
- [3] LIU P F, ZHU L Y, GOU X F, et al. Dynamics modeling and analyzing of spur gear pair with pitch deviation considering time-varying contact ratio under multi-state meshing[J]. Journal of Sound and Vibration, 2021, 513: 116411.
- [4] LIU P F, ZHU L Y, GOU X F, et al. Neighboring periodic motion in spur gear pair and its identification

- methods[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2021, 106(4): 2991-3023.
- [5] 莫帅,刘翊恒,黄轩,等. NW 风电传动系统非线性动力学[J]. *振动工程学报*, 2025, 38(4): 722-730.  
MO Shuai, LIU Yiheng, HUANG Xuan, et al. Nonlinear dynamics of NW wind power transmission system [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2025, 38(4): 722-730.
- [6] 莫帅,黄轩,刘文斌,等. 面齿轮-行星齿轮耦合传动系统非线性动力学研究[J]. *华中科技大学学报(自然科学版)*, 2024, 52(10): 40-46.  
MO Shuai, HUANG Xuan, LIU Wenbin, et al. Study on nonlinear dynamics of face gear-planetary gear coupling transmission system[J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition)*, 2024, 52(10): 40-46.
- [7] XIE C Y, SHU X D. A new mesh stiffness model for modified spur gears with coupling tooth and body flexibility effects[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, 91: 1194-1210.
- [8] 陈渊钊,朱健成,吴文军,等. 浮动坐标系下大变形柔性梁的变形梯度单元[J]. *力学学报*, 2025, 57(1): 249-260.  
CHEN Yuanzhao, ZHU Jiancheng, WU Wenjun, et al. Deformation gradient element for flexible beams with large deformation in a floating frame reference[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2025, 57(1): 249-260.
- [9] XU Z L, YU W N, SHAO Y M, et al. Dynamic modeling of the planetary gear set considering the effects of positioning errors on the mesh position and the corner contact[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2022, 109(3): 1551-1569.
- [10] ZHENG X Y, HU Y M, HE Z, et al. On the extended tooth contact and nonlinear dynamics for spur gears: an analytical model[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2022, 175: 104958.
- [11] LI Z F, CHEN Z G, ZHAI W M. Nonlinear dynamic characteristics of a spur gear pair considering extended tooth contact and coupling effect between gear neighboring teeth[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2023, 111(3): 2395-2414.
- [12] 姚廷强,薛翔露,韩佳轩,等. 考虑外圈变形和轴承座支承作用的球轴承动力学研究[J]. *振动与冲击*, 2024, 43(18): 42-56.  
YAO Tingqiang, XUE Xianglu, HAN Jiaxuan, et al. Ball bearing dynamics considering outer ring deformation and housing support[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2024, 43(18): 42-56.
- [13] CHEN Z G, NING J Y, WANG K Y, et al. An improved dynamic model of spur gear transmission considering coupling effect between gear neighboring teeth[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2021, 106(1): 339-357.

第一作者:张武红(2001—),男,硕士研究生。

E-mail: 13893372691@163.com

通信作者:石建飞(1990—),男,博士,副教授。

E-mail: sjf0214286@126.com