

# 全复合蜂窝夹芯板动态特性分析

许卓<sup>1,3</sup>, 初晨<sup>1</sup>, 许沛尧<sup>1</sup>, 李晖<sup>2,3</sup>, 孙鹏尧<sup>4</sup>, 郑利胜<sup>5</sup>,  
顾大卫<sup>3,6</sup>, 胡长城<sup>7</sup>, 张铭芮<sup>8</sup>, 闻邦椿<sup>2,3</sup>

- (1. 东北电力大学机械工程学院, 吉林 吉林 132012; 2. 东北大学机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819;  
3. 东北大学航空动力装备振动及控制教育部重点实验室, 辽宁 沈阳 110819;  
4. 吉林市特种设备检验中心(吉林市特种设备事故调查服务中心), 吉林 吉林 132089;  
5. 温州市工业科学研究院, 浙江 温州 325028; 6. 浙江工业大学机械工程学院, 浙江 杭州 310014;  
7. 吉林通用航空职业技术学院, 吉林 吉林 132032; 8. 东北电力大学化学工程学院, 吉林 吉林 132012)

**摘要:** 采用理论与试验相结合的方式, 研究了全复合蜂窝芯层三明治板(all-composite honeycomb core sandwich panels, ACHC-SP) 的动态特性。基于高阶剪切变形理论、Gibson 等效理论建立 ACHCSP 结构的理论模型, 利用 Rayleigh-Ritz 法和正交多项式法求解了该结构的动态特性。搭建相关试验平台, 以 ACHCSP 为研究对象进行测试, 验证了理论模型的正确性。结果表明, 该理论模型能够准确地预测结构的固有频率。基于所提模型讨论了纤维板厚度、蜂窝单元壁厚以及壁长对结构固有频率的影响。

**关键词:** 蜂窝结构; 全复合三明治结构; 高阶剪切变形理论; 动态特性

**中图分类号:** TB333.1; O327 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202310050

## Dynamic analysis of all-composite honeycomb core sandwich panel

XU Zhuo<sup>1,3</sup>, CHU Chen<sup>1</sup>, XU Peiyao<sup>1</sup>, LI Hui<sup>2,3</sup>, SUN Pengyao<sup>4</sup>, ZHENG Lisheng<sup>5</sup>,  
GU Dawei<sup>3,6</sup>, HU Changcheng<sup>7</sup>, ZHANG Mingrui<sup>8</sup>, WEN Bangchun<sup>2,3</sup>

- (1. School of Mechanical Engineering, Northeast Electric Power University, Jilin 132012, China;  
2. School of Mechanical Engineering and Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China;  
3. Key Laboratory of Vibration and Control of Aero-Propulsion System Ministry of Education, Northeastern University, Shenyang 110819, China; 4. Special Equipment Inspection Center of Jilin (Special Equipment Accident Investigation Service Center of Jilin), Jilin 132089, China; 5. Wenzhou Institute of Industry & Science, Wenzhou 325028, China;  
6. School of Mechanical Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014, China;  
7. Jilin General Aviation Vocational and Technical College, Jilin 132032, China;  
8. School of Chemical Engineering, Northeast Electric Power University, Jilin 132012, China)

**Abstract:** The intrinsic characteristics of all-composite honeycomb core sandwich panels (ACHCSP) were investigated using a combined approach of theory and experimentation. A theoretical model of the ACHCSP structure was established based on the high-order shear deformation theory and Gibson equivalent theory. The dynamic characteristics of this structure were determined using the Rayleigh-Ritz method and orthogonal polynomial approach. A relevant experimental platform was constructed to conduct tests on ACHCSP as the research subject, thereby confirming the accuracy of the theoretical model. The results indicate that this theoretical model can accurately predict the natural frequencies of ACHCSP plates. Based on the established model, the influence of fiber layer thickness, honeycomb cell wall thickness, and wall length on the natural frequencies of ACHCSP structures is discussed.

**Keywords:** honeycomb structure; all-composite sandwich structure; high-order shear deformation theory; natural characteristic

**收稿日期:** 2023-10-24; **修订日期:** 2024-04-18

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(52175079); 东北大学航空动力装备振动及控制教育部重点实验室研究基金资助项目(VCAME202204); 中央高校基本科研业务费专项(N2103026)

ACHCSP 具有比强度高、减重性能良好、抗振性能好等优点,特别是蜂窝夹层结构的高比刚度和比强度,且其抗冲击性能优于其他传统结构,因此被广泛应用于航空、航天、汽车、体育器械和兵工器械等领域<sup>[1-6]</sup>。目前,工程中存在大量该类型的三明治结构件,它们通常工作在悬臂条件下,且工作条件越来越苛刻,其振动问题也变得尤为显著。近年来,由于振动问题引发的事故不在少数,且由于振动超标而引起的疲劳失效、分层损伤等问题也越来越受到人们的关注。

长期以来,人们对于蜂窝夹层板结构进行了大量的研究,例如 PAIK 等<sup>[7]</sup>、HAZIZAN 等<sup>[8]</sup>对铝制蜂窝层结构进行了研究,并认为铝夹层结构是一种很有应用前景的结构。DHARMASENA 等<sup>[9]</sup>研究了以超奥氏体不锈钢合金材料制成的方形蜂窝结构,并对其进行了动力学分析。基于 Timoshenko 梁理论,吴旋<sup>[10]</sup>针对典型的蜂窝夹层结构,考虑蜂窝胞壁的弯曲、伸缩和剪切变形,推导出了双壁厚正六边形蜂窝芯层等效力学表达式。

由于蜂窝结构较为复杂,因此在计算蜂窝夹层结构时往往将其等效为正交各向异性板来计算。KELSEY 等<sup>[11]</sup>开发了一种针对蜂窝芯剪切刚度的简单理论分析方法,简化了蜂窝夹层芯应变系统和应力系统的假设,得到了蜂窝夹层芯剪切模量的上、下限简单表达式。PENZIEN 等<sup>[12]</sup>研究了蜂窝芯材料有效剪切模量的理论预测问题。BURTON 等<sup>[13]</sup>采用详细的有限元模型对矩形夹芯板的自由振动响应进行预测,并采用三维实体单元和二维平板单元对夹芯和面板进行建模,将有限元模型预测的结果与用高阶夹层理论计算得到的结果进行了比较,但并未进行试验研究。徐胜今等<sup>[14]</sup>基于一阶剪切理论提出了一种正交各向异性蜂窝夹层板的等效分析方法,得到了工程常数和密度,解决了国际上公认的大型有限元程序不能直接计算蜂窝夹层板动、静力学问题的难题。赵金森<sup>[15]</sup>提出了 Y 模型对蜂窝夹芯板进行了研究,通过力学分析推导出夹芯的等效力学参数,用能量法研究正六边形蜂窝夹芯板的面内力学参数,并对力学参数进行了数值模拟,得出了测量铝蜂窝夹层板的弯曲刚度和剪切刚度的方法,总结了静态等效、动态等效、三明治理论等几种铝制蜂窝板的等效方法。MALEK 等<sup>[16]</sup>研究了周期六边形蜂窝在广泛范围的相对密度和细胞几何形状下的弹性行为,并确定了其理论的准确性。EIPAKCHI 等<sup>[17-18]</sup>提出一种具有可调泊松比的蜂窝芯层复合圆柱壳非线性频率的解析方法,并基于 Gibson 等效方

法改变蜂窝层几何参数在负、零和正的泊松比范围内获得具有超材料性能的复合材料结构。基于该理论提出了一种分析蜂窝芯层和泊松比可调组合梁在轴向载荷作用下线性和非线性振动的分析方法,结果表明,采用蜂窝状结构后,结构的质量显著降低,而频率基本保持不变或增大。KARIMIASL 等<sup>[19]</sup>根据 Gibson 蜂窝等效理论确定消磁芯的材料性能,确定了石墨烯血小板增强复合材料(GPLRC)外皮和嵌入压电层的补体芯在热磁电载荷作用下的非线性振动行为,并将数值结果与公开文献中可用的结果进行比较来验证本公式。上述文献均验证了 Gibson 蜂窝等效理论的准确性以及实用性。

由于 ACHCSP 通常具有较大的厚度,因此无法忽略结构中产生的剪切变形,大多数学者对于中厚板,常使用剪切变形理论对其进行研究。REDDY 等<sup>[20-21]</sup>提出了一种改进的高阶剪切变形理论,确定了弹性板的固有频率和屈曲载荷,得到了简支板的精确解,并更精准地预测了固有频率和屈曲载荷。HANNA 等<sup>[22]</sup>提出了一种针对厚板的高阶理论,当板特别厚时为板厚提供了一种额外的自由度,实际上是消除了过校正,并证明了该理论对中厚板是足够精确的。MEUNIER 等<sup>[23]</sup>提出了一种基于 REDDY 精化高阶剪切变形理论的分析方法,利用弹性-黏弹性原理得出了复合夹层板的固有频率和阻尼损耗因子。NAYAK 等<sup>[24]</sup>基于 REDDY 高阶剪切变形理论,采用连续质量矩阵确定了泡沫芯层三明治板的固有频率。钟阳等<sup>[25]</sup>以胡海昌方程为基础,利用辛几何中的分离变量和本征函数展开的方法求出了各项同性中厚板自由振动的精确解。MANTARI 等<sup>[26]</sup>考虑了横向剪切应变在板厚上的分布,提出了一种夹层复合材料板壳高阶剪切变形理论,并给出了简支边界条件下圆柱壳和球壳的静力和动力计算结果。NATARAJAN 等<sup>[27]</sup>基于高阶剪切变形理论研究了夹层功能梯度(FGM)板的弯曲振动,讨论了位移随厚度的变化规律。段铁城等<sup>[28]</sup>提出了一种具有统一高阶剪切变形模型的中面位移模式,建立了变分自洽的高阶厚板理论,理清了不同转角表示时板理论之间的相关关系。荣万崇<sup>[29]</sup>基于高阶剪切变形理论研究了带金属外层的多黏弹性层纤维增强复合材料板的线性和非线性振动特性,并通过试验验证了理论结果的准确性。李晖等<sup>[30]</sup>采用高阶剪切变形理论研究了带金属外层的多黏弹性层纤维增强层合板的动力学特性,但其材料主要用于减振方面,相较于 ACHCSP 材料刚度较低,因此本文与其研究内容具有较大区别。CHESHMEH 等<sup>[31]</sup>采用高阶剪

切变形理论分析了FG-CNTRC矩形板在不同温度分布和边界条件下的屈曲和振动行为。JIN等<sup>[32]</sup>采用REDDY高阶剪切变形理论研究了复合材料层合板和圆形板在复杂弹性边界约束下的自由振动特性。王壮壮等<sup>[33]</sup>基于三阶剪切变形理论分析了FG-GRC矩形板屈曲和弯曲力学行为过程中的差异。LI等<sup>[34]</sup>基于高阶剪切变形理论对简支边界条件下功能梯度板自由振动进行了分析。

学术界对于全复合蜂窝夹芯板仍未建立一套行之有效的动态特性分析方法。并且目前大多数的研究主要集中在单一材料的复合板中,对于复合材料蜂窝夹层复合板的研究也以金属结构的研究为主,使用高阶剪切变形理论研究全复合蜂窝夹芯板动态特性的很少。由于全复合蜂窝夹芯板的众多优点,其在工程实际上的应用越来越广泛。针对上述问题,本文以碳纳米管/短纤维蜂窝为芯层,纤维增强复合板为面板的三明治板为研究对象,考虑复合材料面板层的各向异性,以及蜂窝芯层材料参数无法准确计算的困难,基于Gibson等效弹性模量理论对蜂窝芯层进行处理,利用高阶剪切理论建立理论模型,并通过能量法和正交多项式法对结构的动态特性进行求解;同时为了验证所提方法的正确性,以ACHCSP为研究对象,制备了试验样件,并搭建试验平台,通过试验证明本文理论的可行性。本文所提出的计算方法具有结果准确、计算速度快、适用性广等优点,对工程实践具有指导和参考性价值。

## 1 基于高阶剪切变形理论的ACHCSP动态特性分析

本节以ACHCSP为研究对象,基于高阶剪切变

形理论建立了理论模型,建立了该层合板的动力学方程,采用能量法分层计算不同材料层的动能和应变能,进而得到该层合板的总应变能和总动能,利用正交多项式法求解其固有频率和模态。

### 1.1 ACHCSP的理论建模

本文在基于高阶剪切变形理论求解全复合蜂窝芯层三明治板的固有频率和模态时,主要基于以下假设:

- (1) 夹芯结构在中间平面上是对称的;
- (2) 厚度方向的法向应力可以忽略不计;
- (3) 各层之间完美结合,粘结剂的质量忽略不计。

基于上述假设,在使用高阶剪切变形理论时可以认为层合板各层之间不发生相对滑移,从而使纤维层与蜂窝层之间的位移连续。

所建立的模型如图1所示。首先将其中面作为参考平面建立 $xoy$ 坐标系。纤维方向与整体坐标系 $x$ 轴方向的夹角为 $\theta$ ,板长为 $b$ ,板宽为 $a$ ,板厚为 $h$ ,纤维板厚度为 $h_f$ ,蜂窝板厚度为 $h_c$ 。图1中的1代表纤维方向,2代表纤维横向,3代表垂直于1-2平面的方向。纤维增强复合板平行和垂直于纤维方向的弹性模量分别为 $E_1$ 和 $E_2$ ,1-2平面内截切弹性模量为 $G_{12}$ ,12方向的泊松比为 $\nu_{12}$ ,21方向的泊松比为 $\nu_{21}$ 。其中,蜂窝层单元壁长为 $l_c$ ,壁厚为 $t_c$ ,蜂窝层单元角度为 $\alpha_c$ 。

首先对上、下纤维薄板进行理论建模,由于上、下纤维板属于薄板仍可使用经典层合板理论对其进行建模,因此ACHCSP的纤维层位移场可以表示为:

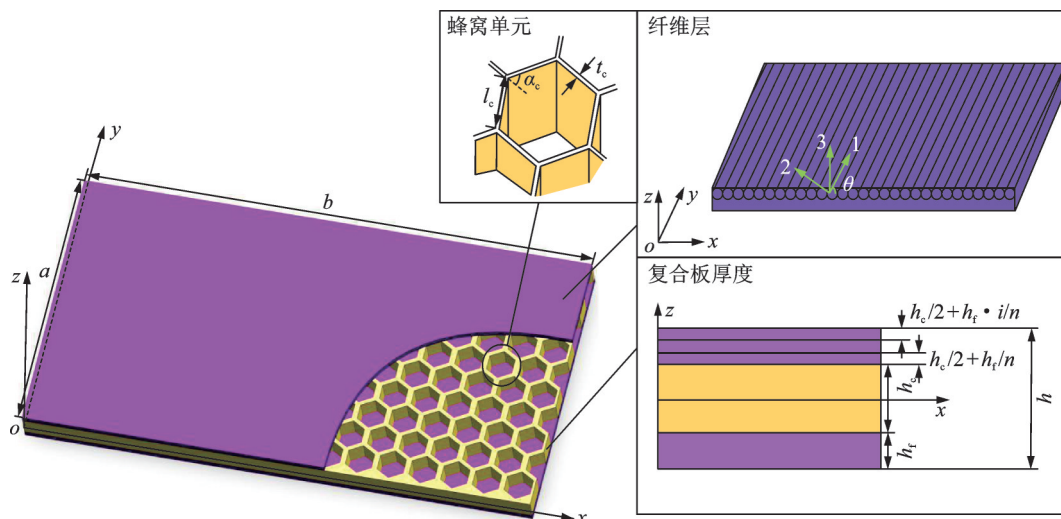


图1 ACHCSP理论模型的几何结构

Fig. 1 Geometric structure of ACHCSP theoretical model

$$\begin{cases} u_f(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} \\ v_f(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} \\ w_f(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (1)$$

引入  $\phi_x$  和  $\phi_y$ , 简化上述位移场公式:

$$\begin{cases} \phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $\phi_x, \phi_y$  为轴向偏转距离<sup>[14]</sup>。

简化位移场公式如下:

$$\begin{cases} u_f(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z(\phi_x - \phi_x) \\ v_f(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z(\phi_y - \phi_y) \\ w_f(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (3)$$

ACHCSP 的应力-应变关系可以表示为<sup>[21]</sup>:

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \epsilon_1^0 + z\epsilon_1^1 + z^3\epsilon_1^2 \\ \epsilon_2 = \epsilon_2^0 + z\epsilon_2^1 + z^3\epsilon_2^2 \\ \epsilon_3 = 0 \\ \epsilon_4 = \epsilon_4^0 + z^2\epsilon_4^2 \\ \epsilon_5 = \epsilon_5^0 + z^2\epsilon_5^2 \\ \epsilon_6 = \epsilon_6^0 + z\epsilon_6^1 + z^3\epsilon_6^2 \end{cases} \quad (4)$$

式中,  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  和  $\epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6$  分别表示  $x, y, z$  方向的线应变以及剪应变, 其中  $\epsilon^0, \epsilon^1, \epsilon^2$  表示如下:

$$\begin{aligned} \epsilon_i^0 &= [\epsilon_1^0 \ \epsilon_2^0 \ \epsilon_4^0 \ \epsilon_5^0 \ \epsilon_6^0]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_x \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \end{bmatrix}, \\ \epsilon_i^1 &= [\epsilon_1^1 \ \epsilon_2^1 \ \epsilon_6^1]^T = \left[ \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \ \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right]^T, \\ \epsilon_i^2 &= [\epsilon_1^2 \ \epsilon_2^2 \ \epsilon_4^2 \ \epsilon_5^2 \ \epsilon_6^2]^T = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3h^2} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ -\frac{4}{3h^2} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ -\frac{4}{h^2} \phi_y \\ -\frac{4}{h^2} \phi_x \\ -\frac{4}{3h^2} \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

通过上式可以推断出 ACHCSP 的应力-应变关系为:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & & & \\ & Q_{12} & Q_{22} & & \\ & & & Q_{44} & \\ & & & & Q_{55} \\ & & & & & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix} \quad (6)$$

式中,  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  分别为  $x$  和  $y$  方向上的应力;  $\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$  分别为  $yz, xz, xy$  方向上的应力;  $\epsilon_i$  对应不同方向上的应变。

对于上、下纤维板, 式(6)中的元素可以表示为:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_{f1}}{1 - \nu_{f12}\nu_{f21}}, \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{f12}E_{f2}}{1 - \nu_{f12}\nu_{f21}} = \frac{\nu_{f21}E_{f1}}{1 - \nu_{f12}\nu_{f21}}, \quad Q_{44} = G_{23}, \\ Q_{21} &= \frac{\nu_{f12}E_{f2}}{1 - \nu_{f12}\nu_{f21}} = \frac{\nu_{f21}E_{f1}}{1 - \nu_{f12}\nu_{f21}}, \quad Q_{66} = G_{12}, \\ Q_{55} &= G_{13} \end{aligned} \quad (7)$$

式中,  $E_{f1}$  和  $E_{f2}$  分别为纤维层沿纤维方向和垂直纤维方向的弹性模量;  $G_{f12}, G_{f13}$  和  $G_{f23}$  分别为平面内各个方向的剪切弹性模量;  $\nu_{f12}, \nu_{f21}$  分别为 1、2 方向的泊松比。

由于纤维材料与板的主轴方向往往存在一定的夹角, 此时使用应力-应变转轴公式可以推导出第  $k$  层的应力-应变关系如下:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & & \\ & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & \\ & \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & \\ & & & & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ & & & & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \end{pmatrix} \quad (8)$$

式中,  $\bar{Q}_{ij}$  为偏轴刚度系数, 其表达式为:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta_k + 2Q_{12} \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + 4Q_{66} \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22} \sin^4 \theta_k, \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{12} (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k), \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta_k + 2Q_{12} \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + 4Q_{66} \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22} \cos^4 \theta_k, \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta_k \cos \theta_k, \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta_k \cos \theta_k + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k, \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{66} (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k), \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \theta_k + Q_{55} \sin^2 \theta_k, \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \sin \theta_k \cos \theta_k, \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{44} \sin^2 \theta_k + Q_{55} \cos^2 \theta_k \end{aligned} \quad (9)$$

式中,  $\theta_k$  为第  $k$  层纤维层夹角。

纤维层的应变能以及动能如下式所示：

$$U_F = \frac{1}{2} \left( \int_A \int_{-\frac{h_f}{2}}^0 \sum_{i=1}^6 \sigma_{F_i} \epsilon_{F_i} dz dA + \int_A \int_0^{\frac{h_f}{2}} \sum_{i=1}^6 \sigma_{F_i} \epsilon_{F_i} dz dA \right) \quad (10a)$$

$$T_F = \frac{1}{2} \left[ \int_A \int_{-\frac{h_f}{2}}^0 \rho_F \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dz dA + \int_A \int_0^{\frac{h_f}{2}} \rho_F \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dz dA \right] \quad (10b)$$

式中,  $\sigma_{F_i}$  和  $\epsilon_{F_i}$  分别为纤维层的应力和应变;  $w$  为  $z$  方向位移;  $t$  为时间;  $\rho_F$  为纤维层板的密度;  $A$  为层合板的面积。

### 1.2 ACHCSP 蜂窝层等效

由于蜂窝芯层厚度较大, 引入高阶剪切变形理论建立理论模型, 并通过等效方法将其等效为单层板, 继而通过能量法计算复合板的固有频率。

根据图 1 能够看到蜂窝单元的基本结构。

根据高阶剪切变形理论, 考虑到厚板的剪切应变问题, 确定蜂窝层的位移场如下：

$$\begin{aligned} u_v(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + H\phi_x(x, y, t) - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x}, \\ v_v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + H\phi_y(x, y, t) - \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x}, \\ w_v(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (11)$$

式中,  $H$  为高阶项系数,  $H = z - 4z^3/(3h^2)$ 。

蜂窝层中的蜂窝单元为正六边形, 通过 Gibson 等效方法将蜂窝层等效为单层板, 等效后其相关的参数也发生改变<sup>[35]</sup>。

$$\rho_c = \frac{t_c}{l_c} \cdot \frac{(1 + \eta)\rho_s}{(\eta + \cos \theta) \sin \theta} \quad (12)$$

式中,  $\rho_c$  为等效后材料的密度<sup>[13-14]</sup>;  $\rho_s$  为等效前材料的密度。

$$\begin{cases} E_1^c = E_s \cdot \frac{t_c^3}{l^3} \cdot \frac{\cos \theta}{(\eta + \sin \theta) \sin^2 \theta} \\ E_2^c = E_s \cdot \frac{t_c^3}{l^3} \cdot \frac{(\eta + \sin \theta)}{\cos^3 \theta} \end{cases} \quad (13)$$

式中,  $t_c$  为六角蜂窝单元细胞壁的厚度;  $\lambda$  暂时取为 1;  $\eta = 2l_2/l_1$ , 其中  $l_1, l_2$  为 1、2 方向壁长;  $E_1^c, E_2^c$  分别为 1、2 方向上的杨氏模量<sup>[13-14]</sup>。

$$G_{12}^c = E_s \left( \frac{t_c}{l_c} \right)^3 \cdot \frac{(\eta + \sin \theta)}{\eta^2 (1 + \eta/4) \cos \theta} \quad (14)$$

式中,  $G_{12}^c$  为 12 方向上的剪切模量<sup>[13-14]</sup>。

$$\nu_{12}^c = \frac{\cos^2 \theta}{(\beta + \sin \theta) \sin \theta} \quad (15)$$

式中,  $\nu_{12}^c$  为等效后 12 方向上的泊松比;  $\beta$  为表征蜂窝形状的常数。

利用等效后的参数可以通过应力-应变关系求出等效后蜂窝板的应变能及动能。

根据高阶剪切变形理论, 蜂窝层的应变能及动能分别为：

$$U_V = \frac{1}{2} \left( \int_A \int_0^{\frac{h_v}{2}} \sum_{i=1}^6 \sigma_{v_i} \epsilon_{v_i} dz dA + \int_A \int_{-\frac{h_v}{2}}^0 \sum_{i=1}^6 \sigma_{v_i} \epsilon_{v_i} dz dA \right) \quad (16a)$$

$$T_V = \frac{1}{2} \left[ \int_A \int_{-\frac{h_v}{2}}^0 \rho_V \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dz dA + \int_A \int_0^{\frac{h_v}{2}} \rho_V \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dz dA \right] \quad (16b)$$

式中,  $\rho_V$  为蜂窝层密度。

蜂窝夹层板的总应变能和动能可以表示为：

$$\begin{cases} U = U_F + U_V \\ T = T_F + T_V \end{cases} \quad (17)$$

### 1.3 ACHCSP 动态特性求解

上节中计算出了 ACHCSP 整体的动能以及应变能, 通过动能和应变能可以求解 ACHCSP 的固有频率。

假设层合板中面层的振动位移可以表示为：

$$w_0(x, y, t) = e^{i\omega t} W(\xi, \eta) \quad (18)$$

式中,  $\xi$  为正交多项式参数。

根据 Rayleigh-Ritz 法, 将中面位移表示为：

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn} P_m(\xi) P_n(\eta) \sin(\omega t), \\ v_0 &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N b_{mn} P_m(\xi) P_n(\eta) \sin(\omega t), \\ w_0 &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} P_m(\xi) P_n(\eta) \sin(\omega t), \\ \phi_x &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N d_{mn} P_m(\xi) P_n(\eta) \sin(\omega t), \\ \phi_y &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N e_{mn} P_m(\xi) P_n(\eta) \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (19)$$

式中,  $M, N$  为 Rayleigh-Ritz 法求解时的截断系数;  $a_{mn}, b_{mn}, c_{mn}, d_{mn}, e_{mn}$  为待定参数;  $\omega$  为板的固有频率;  $P_m(\xi)$  和  $P_n(\eta)$  为正交特征多项式, 具体表达式如下：

$$\begin{cases} P_1(\tau) = \phi(\tau) \\ P_1(\eta) = \varphi(\eta) \\ P_2(\zeta) = (\zeta - B_2) P_1(\zeta), \zeta = \tau, \eta \\ P_k(\zeta) = (\zeta - B_k) P_{k-1}(\zeta) - C_k P_{k-2}(\zeta), k > 2 \end{cases} \quad (20)$$

式中,  $B_k$  和  $P_k$  为系数参数;  $\phi(\tau)$  和  $\varphi(\eta)$  为正交的特征多项式, 其表达式如下:

$$B_k = \frac{\int_0^1 W(\zeta) [P_{k-1}(\zeta)]^2 \zeta d\zeta}{\int_0^1 W(\zeta) [P_{k-1}(\zeta)]^2 d\zeta};$$

$$C_k = \frac{\int_0^1 W(\zeta) P_{k-1}(\zeta) P_{k-2}(\zeta) \zeta d\zeta}{\int_0^1 W(\zeta) [P_{k-2}(\zeta)]^2 d\zeta};$$

$$\phi(\tau) = \tau^f (1-\tau)^g, \varphi(\eta) = \eta^r (1-\eta)^s;$$

$$\zeta = \tau, \eta; \tau = x/a; \eta = y/b \quad (21)$$

式中,  $W(\xi)$  为权函数系数, 在正交化的过程中通常取为 1;  $f, g, r, s$  与纤维增强板的边界条件有关, 本文纤维增强板边界条件为悬臂, 则  $f=2, g=r=s=0$ 。

将式(21)代入式(17)中, 令  $\sin(\omega t) = 1$  和  $\cos(\omega t) = 1$ , 即可得到含有待定 Rayleigh-Ritz 参数的最大势能  $U_{\max}$  和最大动能  $T_{\max}$ :

$$\begin{cases} U_{\max} = U_F^{\max} + U_V^{\max} \\ T_{\max} = T_F^{\max} + T_V^{\max} \end{cases} \quad (22)$$

定义能量函数:

$$L = T_{\max} - U_{\max} \quad (23)$$

将纤维增强板能量函数对待定系数求导可得:

$$\frac{\partial L}{\partial a_{mn}} = \frac{\partial L}{\partial b_{mn}} = \frac{\partial L}{\partial c_{mn}} = \frac{\partial L}{\partial d_{mn}} = \frac{\partial L}{\partial e_{mn}} = 0;$$

$$m = 1, 2, \dots, M; n = 1, 2, \dots, N \quad (24)$$

求解能量方程的最小待定参数, 得到广义特征值问题, 可得到:

$$(K - \omega^2 M)q = F \quad (25)$$

式中,  $K$  为刚度矩阵;  $\omega$  为固有频数;  $M$  为质量矩阵;  $q$  为广义向量;  $F$  为力矩阵。随后使  $q$  的系数矩阵的行列式值为 0, 即能够求得复合蜂窝夹层板的固有频率。

## 2 试验验证 ACHCSP 的动态特性

本节主要通过试验来验证本文计算方法的可行性, 主要内容包括试验样件的制备、试验测试平台的搭建与测试, 结果对比与验证 3 个部分。验证了所提基于高阶剪切变形理论的正确性。

### 2.1 ACHCSP 样件制备

制备包括上、下面板以及蜂窝芯层, 图 2 给出了 ACHCSP 的具体制作流程。结构中的上、下纤维板由正交纤维层铺设并以树脂为基体制备得到, 纤维铺层方式为  $[0^\circ/90^\circ]_{21}$ 。蜂窝芯层由 CR17 玻璃纤维/碳纳米管增强树脂基溶液充分混合后通过六角蜂窝模具浇注而成, 具体步骤如下:

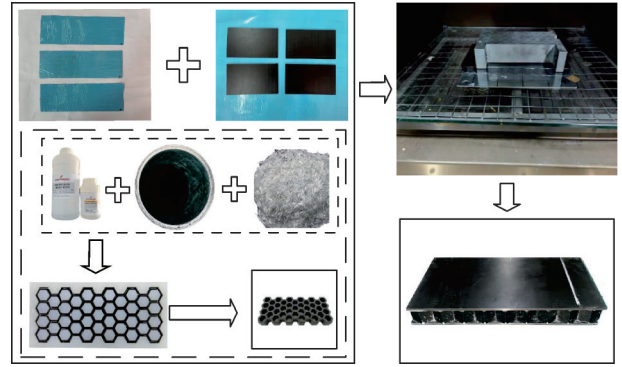


图 2 ACHCSP 具体制作流程图

Fig. 2 Specific production flow chart ACHCSP

首先, 取适当 IN2 导流树脂以及质量分数为 10% 的 TX-10 乳化剂加入烧杯中并混合均匀, 将烧杯置于 40 °C 水浴加热锅中并以 500 r/min 的速度搅拌 30 min, 直至将树脂中气泡全部排出。

然后, 使用电子天平分别量取树脂溶液质量分数 0.5% 的碳纳米管和 CR17 玻璃纤维, 将两种增强体加入正在搅拌的溶液中继续以 500 r/min 的速度搅拌 30 min, 直至增强体与树脂基体混合均匀。

接着, 使用天平量取质量分数为 30% 的 AT 30 慢速固化剂加入混合均匀的玻璃纤维/碳纳米管增强树脂基溶液中, 继续在 40 °C 水浴加热下搅拌 5 min, 使固化剂与树脂基溶液充分混合。

最后, 将充分混合的玻璃纤维/碳纳米管增强树脂基溶液置于事先预热好的真空干燥箱中做真空排泡处理, 干燥箱温度为 80 °C, 真空度为  $10^{-4}$  Pa。

经上步骤后, 将排泡处理后的混合溶液缓慢浇入六角蜂窝硅胶模具中进行铸模, 静置 15~24 h 后脱模。其中, 蜂窝层厚度为 20 mm, 蜂窝单元壁长为 15 mm, 蜂窝单元壁厚为 5 mm。

将制备完成的蜂窝芯通过胶膜与上、下层纤维板粘结, 粘结前保证表面无冷凝水并按照蜂窝层大小进行裁剪并进行粘结。粘结后, 放置热箱中在 150 °C 下固化 30 min 后即可得到 ACHCSP。该种结合方式能够满足高阶剪切变形理论所需要的假设条件。

通过相应的方式辨识所得制备的全复合蜂窝夹芯板几何参数及材料参数如表 1 所示, 试验所辨识的材料参数以及结构的几何参数与后续理论计算所使用的几何参数和材料参数保持一致。

### 2.2 测试系统及测试过程

图 3 给出了所搭建的 ACHCSP 动态特性测试系统, 被测 ACHCSP 的约束方式为悬臂, 测试系统主要由便携式 LMS SCADAS 数据采集仪、PCB

表1 ACHCSP几何参数及材料参数

Tab. 1 Geometric parameters and material parameters of ACHCSP

板层类型	长度/mm	宽度/mm	厚度/mm	$E_1$ /GPa	$E_2$ /GPa	$G_{12}$ /GPa	$\nu_{12}$	密度 $\rho$ /( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )
TC300碳纤维/树脂基纤维板	200	120	3	15	5	1.6	0.4	1600
CR17短玻璃纤维/碳纳米管增强树脂基六角蜂窝芯层	200	120	20	12	1.2	1	0.1	1500

353B15加速度传感器、PCB 086C01模态力锤以及LMS Test.Lab移动工作站组成。测试前首先确定夹持部分长度为40 mm,然后将被测ACHCSP分别沿着长度和宽度方向进行10等分和5等分,并对每个测点进行标号。接着,分别将PCB加速度传感器粘贴于试验件的17号与50号测点上,其中17号与50号测点的布置位置见图3。

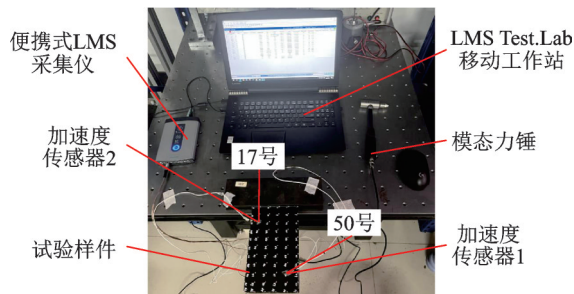


图3 ACHCSP试验测试场地图

Fig. 3 The experimental testing site diagram for ACHCSP

测试结构固有频率时,采用多点激励多点响应的方法,使用模态力锤分别对ACHCSP上的各点进行激励。(1)设置测试带宽为0~3000 Hz;(2)分辨率为0.5 Hz;(3)添加窗函数为Hanning窗。

为保证数据的准确性,各点在测试过程中需要进行3次有效激励。图4给出了3个不同测点敲击所得的频响函数。

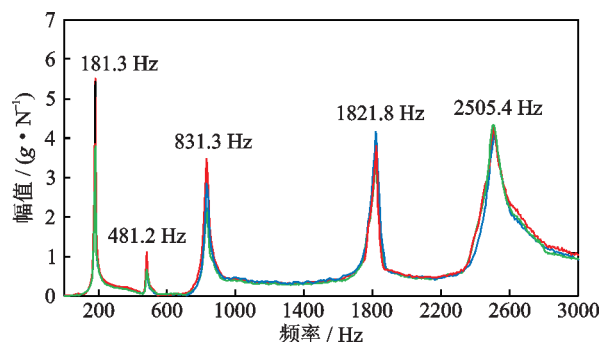


图4 ACHCSP 3次敲击测试频响图

Fig. 4 The frequency-response diagram of ACHCSP triple-impact test

### 2.3 试验结果对比验证

为验证所提模型的正确性,将获得的ACHCSP固有频率以及模态与计算结果进行对比,表2给出

了其理论固有频率、试验固有频率以及两者的误差与模态形式。

表2 试验与理论固有频率与模态形式

Tab. 2 Experimental and theoretical natural frequencies and modal forms

模态阶次	理论固有频率/Hz	试验固有频率/Hz	误差	理论振型	试验振型
1阶	186.7	181.3	2.89%		
2阶	486.2	481.2	1.03%		
3阶	910.8	831.3	8.73%		
4阶	1675.5	1821.8	8.03%		
5阶	2712.6	2505.4	7.63%		

从表2中可以看出,试验所获得的前5阶固有频率与理论计算固有频率误差在1.03%~8.73%之间,均处于误差允许范围之内。出现前2阶误差较小,高阶误差增大可能是多种原因共同作用的结果。复合材料存在材料非线性和几何非线性的现象,但由于本文试验是利用力锤作为激励两点采集,多点激励的测试方式而非振动台或激振器作为振源的连续激励方式,因此此处无法判断是否为材料非线性或者几何非线性产生的影响。但产生这种现象的原因可能是多种的,比如:随着模态阶次的升高,振动响应的幅值变小,环境中的轻微变化也可能引起较大的计算误差。另外在试验过程中,测试结果可能会受到温度、空气阻尼、传感器校准误差等多方面因素的影响。但在本文数学模型的计算过程中忽略了纤维层间的摩擦的影响,未考虑复合材料离散效应的影响,也未考虑残余应力的影响,因此也会导致误差的产生。综合上述种种因素,本文理论与试验的误差在允许的范围内,并且误差的跳动也处于合理范围内,因此能够验证本文所提理论模型的正确性。

### 3 不同参数对 ACHCSP 动态特性的影响

由于不同结构参数以及材料参数对 ACHCSP 的动态特性均存在影响,本节分别讨论了不同纤维板厚度、不同蜂窝单元壁厚以及不同蜂窝单元壁长对 ACHCSP 板动态特性的影响。在讨论不同参数对 ACHCSP 动态特性的影响时,蜂窝层厚度均为 20 mm。整体长度和宽度均为 200 mm 和 120 mm,并且保持不变。

#### 3.1 纤维板厚度对动态特性的影响

在讨论 ACHCSP 不同纤维板厚度对其固有频率的影响时,由于纤维板由多层各向异性的纤维层正交铺设而成,为不改变纤维层的结构,本节分别取 21 层、31 层、41 层纤维层铺设的纤维板,以改变纤维板厚度来讨论其对 ACHCSP 固有频率的影响。另外,蜂窝单元壁长均为 15 mm,蜂窝单元壁厚均为 5 mm。不同纤维板厚度下 ACHCSP 的固有频率如表 3 所示。

表 3 不同纤维板厚度下 ACHCSP 的固有频率  
Tab. 3 Natural frequencies of ACHCSP under different thicknesses of fiber panel

模态阶次	固有频率/Hz		
	2.94 mm	4.34 mm	5.74 mm
1 阶	186.7	224.1	255.7
2 阶	486.2	562.3	609.2
3 阶	910.8	1086.9	1199.1
4 阶	1675.5	1744.8	1986.8
5 阶	2712.6	2967.6	2991.1

由表 3 可知,在纤维铺层角度为 $[0^\circ/90^\circ]$ 的情况下,随着 ACHCSP 中纤维板厚度的不断增大,其前 5 阶固有频率不断增大,当每层纤维厚度不变而只改变纤维层数时,其总厚度发生的变化如图 5 所示,导致结构的刚度显著增大,而又因为纤维增强结构密度小的特点,质量增大不明显,因此导致了上述现象的出现。这也从侧面说明了纤维板厚度增大对 ACHCSP 结构中刚度变化起主导作用。

#### 3.2 蜂窝单元壁厚对动态特性的影响

不同蜂窝壁厚对 ACHCSP 的固有频率也有一定程度的影响,因此本节分别选取蜂窝壁厚为 2、3、

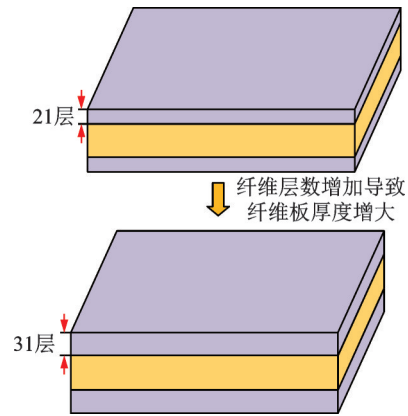


图 5 纤维层数增加引起的纤维板厚度变化

Fig. 5 Variation of thickness of fiber panel caused by increasing number of fiber layers

5 mm 进行讨论。其中纤维层铺层均为 21 层,厚度均为 2.94 mm,蜂窝层壁长均为 15 mm。ACHCSP 的固有频率变化如表 4 所示。

表 4 不同蜂窝单元壁厚下 ACHCSP 的固有频率  
Tab. 4 Natural frequencies of ACHCSP under different wall thicknesses of honeycomb cell

模态阶次	固有频率/Hz		
	2 mm	3 mm	5 mm
1 阶	243.4	216.9	186.7
2 阶	607.5	550.1	486.2
3 阶	1203.4	1067.2	910.8
4 阶	2056.2	1878.9	1675.5
5 阶	3261.7	3020.1	2712.6

由表 4 可知,随着蜂窝单元壁厚的增大,ACHCSP 的固有频率明显降低,这主要是由于在蜂窝层中,结构的壁厚增大对刚度的影响很小,相应的质量却明显增大。如图 6 所示,随着蜂窝壁厚的增大,其蜂窝层的质量显著增大,此时质量的增大对固有频率变化起主导作用,因此其固有频率会随之降低。

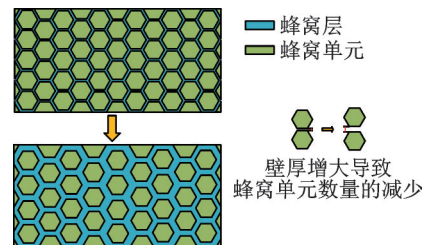


图 6 蜂窝单元壁厚增大对蜂窝层的影响

Fig. 6 Influence of increasing wall thickness of honeycomb cell on honeycomb layer

#### 3.3 蜂窝单元壁长对动态特性的影响

相同尺寸下,不同蜂窝单元壁长会影响六角蜂

窝芯中蜂窝单元的个数,这同样会对结构的固有频率产生影响,本节讨论了不同蜂窝单元壁长对ACHCSP固有频率的影响。其中纤维层铺层均为21层,蜂窝厚度均为2.94 mm,蜂窝单元壁厚均为5 mm。结果如表5所示。

表5 不同蜂窝单元壁长下ACHCSP的固有频率

Tab.5 Natural frequencies of ACHCSP under different wall lengths of honeycomb cell

模态阶次	固有频率/Hz		
	10 mm	15 mm	20 mm
1阶	172.3	186.7	202.8
2阶	464.8	486.2	519.6
3阶	874.5	910.8	1033.4
4阶	1604.3	1675.5	1783.0
5阶	2550.8	2712.6	2881.2

表5中的数据表明,随着蜂窝单元壁长的增大,ACHCSP的固有频率随之增大,这主要是由于随着蜂窝单元壁长的增大,在ACHCSP总体几何尺寸不变的情况下,中间蜂窝层的质量会显著降低,如图7所示。此时质量相较于刚度起主导作用,因此ACHCSP板的固有频率会增大。

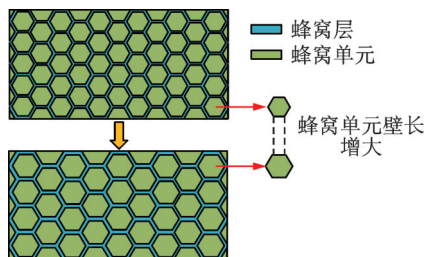


图7 蜂窝单元壁长增大对蜂窝层的影响

Fig.7 Influence of increasing wall length of honeycomb cell on honeycomb layer

### 3.4 纤维层弹性模量对动态特性的影响

前文讨论了几何参数对ACHCSP固有频率的影响,但材料参数对其固有频率也存在影响。本节讨论了不同纤维层弹性模量对ACHCSP固有特性的影响。其中纤维铺层为21层,蜂窝厚度均为2.94 mm,蜂窝单元壁厚均为5 mm,蜂窝单元壁长均为15 mm。固有频率变化如表6所示。

表6中的数据表明,ACHCSP固有频率随着纤维层弹性模量的增大而增大,这可能是由于纤维层弹性模量的增大导致其刚度矩阵增大,因此ACHCSP表现出固有频率增大的特性。

表6 不同纤维层弹性模量下ACHCSP的固有频率

Tab.6 Natural frequencies of ACHCSP under different elastic modulus of fiber layers

模态阶次	固有频率/Hz		
	10 GPa	12 GPa	14 GPa
1阶	176.8	186.7	196.0
2阶	480.4	486.2	491.6
3阶	883.8	910.8	938.2
4阶	1637.8	1675.5	1712.0
5阶	2562.1	2712.6	2853.0

## 4 结 论

本文基于高阶剪切变形理论建立了ACHCSP理论模型,使用正交多项式法对ACHCSP固有频率进行了求解。制备试验样件通过试验对比验证了本文所提理论模型的准确性,其试验与理论计算所得的固有频率误差在1.03%~8.73%之间,且计算的模态形式与试验结果基本一致,证明了本文所提理论模型可以用于预测ACHCSP结构的固有频率以及模态。

(1) 随着上、下纤维板厚度的增大,ACHCSP固有频率呈现出不同程度的降低,但对其模态影响较小,由此可知纤维板厚度的增大会导致其刚度显著增大,从而使其固有频率升高。

(2) 随着蜂窝单元壁厚的增大,ACHCSP固有频率逐渐降低,以1阶固有频率为例,当蜂窝单元壁厚从2 mm增大到5 mm时,其固有频率从243.4 Hz降低至186.7 Hz,这是因为随蜂窝壁厚的增大其质量增大,此时质量矩阵起主导作用,因此ACHCSP固有频率降低。

(3) 随着蜂窝单元壁长的增大,ACHCSP固有频率呈现出增大的趋势,这是由于蜂窝单元壁长增大,在不改变整体尺寸的情况下蜂窝层质量显著降低,导致质量矩阵作用降低,固有频率升高。

(4) 随着纤维层弹性模量的增大,ACHCSP固有频率升高,这主要是因为纤维层弹性模量增大导致纤维层刚度矩阵增大,因此固有频率升高。

### 参考文献:

- [1] REDDY J N, CHAO W C. A comparison of closed-form and finite-element solutions of thick laminated anisotropic rectangular plates[J]. Nuclear Engineering and Design, 1981, 64(2): 153-167.
- [2] REDDY J N. A generalization of two-dimensional theo-

- ries of laminated composite plates[J]. *Communications in Applied Numerical Methods*, 1987, 3(3): 173-180.
- [3] HE Meifeng, HU Wenbin. A study on composite honeycomb sandwich panel structure[J]. *Materials & Design*, 2008, 29(3): 709-713.
- [4] BUITRAGO B L, SANTIUSTE C, SÁNCHEZ-SÁEZ S, et al. Modelling of composite sandwich structures with honeycomb core subjected to high-velocity impact[J]. *Composite Structures*, 2010, 92(9): 2090-2096.
- [5] FELI S, NAMDARI POUR M H. An analytical model for composite sandwich panels with honeycomb core subjected to high-velocity impact[J]. *Composites, Part B: Engineering*, 2012, 43(5): 2439-2447.
- [6] IVÁÑEZ I, SANCHEZ-SAEZ S. Numerical modeling of the low-velocity impact response of composite sandwich beams with honeycomb core[J]. *Composite Structures*, 2013, 106: 716-723.
- [7] PAIK J K, THAYAMBALLI A K, KIM G S. The strength characteristics of aluminum honeycomb sandwich panels[J]. *Thin-Walled Structures*, 1999, 35(3): 205-231.
- [8] HAZIZAN M A, CANTWELL W J. The low velocity impact response of an aluminium honeycomb sandwich structure[J]. *Composites, Part B: Engineering*, 2003, 34(8): 679-687.
- [9] DHARMASENA K P, WADLEY H N G, XUE Z Y, et al. Mechanical response of metallic honeycomb sandwich panel structures to high-intensity dynamic loading [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2008, 35(9): 1063-1074.
- [10] 吴旋. 复合材料蜂窝夹层板的振动特性研究[D]. 大连:大连理工大学, 2018.
- WU Xuan. Research on vibration characteristics of composite honeycomb sandwich panels[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2018.
- [11] KELSEY S, GELLATLY R A, CLARK B W. The shear modulus of foil honeycomb cores: a theoretical and experimental investigation on cores used in sandwich construction[J]. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 1958, 30(10): 294-302.
- [12] PENZIEN J, DIDRIKSSON T. Effective shear modulus of honeycomb cellular structure[J]. *AIAA Journal*, 1964, 2(3): 531-535.
- [13] BURTON W S, NOOR A K. Assessment of continuum models for sandwich panel honeycomb cores[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1997, 145(3-4): 341-360.
- [14] 徐胜今, 孔宪仁, 王本利, 等. 正交异性蜂窝夹层板动、静力学问题的等效分析方法[J]. *复合材料学报*, 2000, 17(3): 92-95.
- XU Shengjin, KONG Xianren, WANG Benli, et al. Method of equivalent analysis for statics and dynamics behavior of orthotropic honeycomb sandwich plates[J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2000, 17(3): 92-95.
- [15] 赵金森. 铝蜂窝夹层板的力学性能等效模型研究[D]. 南京:南京航空航天大学, 2006.
- ZHAO Jinsen. Research on equivalent models of the mechanical function for aluminum honeycomb sandwich panel[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2006.
- [16] MALEK S, GIBSON L. Effective elastic properties of periodic hexagonal honeycombs[J]. *Mechanics of Materials*, 2015, 91: 226-240.
- [17] EIPAKCHI H, MAHBOUBI NASREKANI F. Geometrically nonlinear frequency analysis of composite cylinders with metamaterial honeycomb layer and adjustable Poisson's ratio using the multiple scale method[J]. *Thin-Walled Structures*, 2021, 169: 108441.
- [18] EIPAKCHI H, MAHBOUBI NASREKANI F. Linear and nonlinear free vibration analysis of super-light composite beams with honeycomb core layer and adjustable Poisson's ratio using multiple-scale method[J]. *Acta Mechanica*, 2022, 233 (11): 4763-4783.
- [19] KARIMI ASL M, ALIBEIGLOO A. Nonlinear vibration characteristic of a sandwich cylindrical panel with auxetic core and GPLRC facing sheets embedded with piezoelectric layers[J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2023, 34(10): 1159-1177.
- [20] REDDY J N. A simple higher-order theory for laminated composite plates[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1984, 51(4): 745-752.
- [21] REDDY J N, PHAN N D. Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1985, 98(2): 157-170.
- [22] HANNA N F, LEISSA A W. A higher order shear deformation theory for the vibration of thick plates[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, 170(4): 545-555.
- [23] MEUNIER M, SHENOI R A. Dynamic analysis of composite sandwich plates with damping modelled using high-order shear deformation theory[J]. *Composite Structures*, 2001, 54(2-3): 243-254.
- [24] NAYAK A K, MOY S S J, SHENOI R A. Free vibration analysis of composite sandwich plates based on Reddy's higher-order theory[J]. *Composites, Part B: Engineering*, 2002, 33(7): 505-519.
- [25] 钟阳, 李锐, 田斌. 矩形中厚板自由振动问题的哈密顿体系与辛几何解法[J]. *动力学与控制学报*, 2009, 7(4): 302-307.

- ZHONG Yang, LI Rui, TIAN Bin. On Hamilton system and new symplectic approach for free vibration of moderately thick rectangular plates[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2009, 7(4): 302-307.
- [26] MANTARI J L, OKTEM A S, GUEDES SOARES C. Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higher-order shear deformation theory[J]. *Composite Structures*, 2011, 94(1): 37-49.
- [27] NATARAJAN S, MANICKAM G. Bending and vibration of functionally graded material sandwich plates using an accurate theory[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2012, 57: 32-42.
- [28] 段铁城, 李录贤. 厚板的高阶剪切变形理论研究[J]. *力学学报*, 2016, 48(5): 1096-1113.  
DUAN Tiecheng, LI Luxian. Study on higher-order shear deformation theories of thick-plate[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(5): 1096-1113.
- [29] 荣万崇. 带金属外层的多粘弹性层纤维增强复合材料层合板振动态特性研究[D]. 沈阳: 东北大学, 2020.  
RONG Wanchong. Study on vibration characteristics of multiple viscoelastic-layered fiber-reinforced laminate with outside metal-layers plate[D]. Shenyang: Northeastern University, 2020.
- [30] 李晖, 荣万崇, 刘洋, 等. 基础激励下带金属外层的多粘弹性层纤维增强层合板的动力学模型[J]. *振动工程学报*, 2021, 34(3): 610-618.  
LI Hui, RONG Wanchong, LIU Yang, et al. Dynamic model of multiple viscoelastic-layered fiber-reinforced laminate plate with outside metal-layers under base excitation[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2021, 34(3): 610-618.
- [31] CHESHMEH E, KARBON M, EYVAZIAN A, et al. Buckling and vibration analysis of FG-CNTRC plate subjected to thermo-mechanical load based on higher order shear deformation theory[J]. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2022, 50(4): 1137-1160.
- [32] JIN Guodong, MA Lei, ZHANG Hong, et al. Vibration characteristics analysis of composite laminated annular/circular plate using high-order shear deformation theory[J]. *Shock and Vibration*, 2021(1), 2021: 5913860.
- [33] 王壮壮, 马连生. 高阶剪切变形板理论下 FG-GRC 板的屈曲和弯曲分析[J]. *工程力学*, 2023, 40(6): 9-18.  
WANG Zhuangzhuang, MA Liansheng. Buckling and bending analysis of FG-GRC plates using high-order shear deformation plate theories[J]. *Engineering Mechanics*, 2023, 40(6): 9-18.
- [34] LI Mengzhen, YAN Renjun, GUEDES SOARES C. Free vibration of advanced composite plates using a new higher order shear deformation theory[J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2021, 88: 104236.
- [35] 富明慧, 徐欧腾, 陈誉. 蜂窝芯层等效参数研究综述[J]. *材料导报*, 2015, 29(5): 127-134.  
FU Minghui, XU Outeng, CHEN Yu. An overview of equivalent parameters of honeycomb cores[J]. *Materials Review*, 2015, 29(5): 127-134.

第一作者: 许 卓(1986—), 男, 博士, 副教授。

E-mail: xuzhuo0816@neepu.edu.cn

通信作者: 李 晖(1982—), 男, 博士, 教授。

E-mail: lh200300206@163.com