

# 非平稳非高斯随机过程插值模拟方法

盛向前<sup>1</sup>, 虞跨海<sup>1</sup>, 范文亮<sup>2</sup>, 牛兰杰<sup>3</sup>

(1. 河南科技大学工程力学系, 河南 洛阳 471000; 2. 重庆大学建筑力学系, 重庆 400045;  
3. 西安机电信息研究所, 陕西 西安 710065)

**摘要:** 针对非平稳非高斯随机过程模拟中存在的随机变量数目过多和潜在高斯随机过程的功率谱计算耗时大的问题, 本文结合随机谐和函数, 提出一种基于样本插值的非平稳非高斯随机过程快速模拟方法。在已知非高斯随机过程的目标演变功率谱和目标密度函数的前提下, 通过 Mehler 公式建立非高斯随机过程和潜在高斯随机过程的相关函数方程, 并采用插值求解的方式提出潜在高斯随机过程的演变功率谱快速计算方法, 结合随机谐和函数提出非平稳非高斯随机过程快速模拟方法, 采用单点均匀调制非高斯随机过程和多点非均匀调制非高斯随机过程模拟验证该方法的有效性。结果表明: 在保证计算精度的前提下, 插值求解潜在高斯随机过程的演变功率谱的计算耗时低于 Mehler 公式求解的耗时, 且随着激励数目的增多, 插值求解计算潜在高斯随机过程的演变功率谱的效率更为明显; 所提非平稳非高斯随机过程快速计算方法, 能够有效模拟具有目标演变功率谱和目标密度函数的非高斯随机过程。

**关键词:** 随机振动; 非高斯随机过程; 非平稳; 演变功率谱; 随机谐和函数

**中图分类号:** O324; TU311.3 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202309035

## Interpolation simulation method of non-stationary non-Gaussian stochastic processes

SHENG Xiangqian<sup>1</sup>, YU Kuahai<sup>1</sup>, FAN Wenliang<sup>2</sup>, NIU Lanjie<sup>3</sup>

(1. Department of Engineering Mechanics, Henan University of Science and Technology, Luoyang 471000, China;  
2. Department of Architectural Mechanics, Chongqing University, Chongqing 400045, China;  
3. Xi'an Institute of Electromechanical Information Technology, Xi'an 710065, China)

**Abstract:** To address the problems of large number of random variables and time-consuming computation in the simulation of non-stationary non-Gaussian stochastic processes, a fast computation method of non-stationary non-Gaussian stochastic processes is proposed based on sample interpolation by combining the stochastic harmonic function. With the known of the target evolutionary power spectrum and target density function of non-Gaussian stochastic processes, the correlation function equations of non-Gaussian stochastic processes and underlying Gaussian stochastic processes are established through Mehler's formula, and a fast calculation method for the evolutionary power spectrum of underlying Gaussian stochastic processes is proposed through interpolation method. Subsequently, a fast simulation method for non-stationary non-Gaussian stochastic processes is proposed by combining stochastic harmonic functions, The effectiveness of this method is verified by simulating single-point uniformly modulated non-Gaussian stochastic process and multi-point non-uniformly modulated non-Gaussian stochastic processes. The results show that, when calculating the evolutionary power spectrum of the underlying Gaussian random process under the condition of ensuring accuracy, the calculation time of interpolation solution is lower than that of Mehler's formula solution, and as the number of excitations increases, the efficiency of interpolation solution in calculating the evolutionary power spectrum of the underlying Gaussian random process is more obvious. The proposed fast computational method of non-stationary non-Gaussian stochastic processes can effectively simulate the non-Gaussian stochastic processes with the target evolutionary power spectrum and the target density function.

**Keywords:** random vibration; non-Gaussian stochastic processes; non-stationary; evolutionary power spectrum; stochastic harmonic functions

工程结构在服役期间所遭受的荷载具有非高斯特性的现象, 如地震<sup>[1]</sup>、风压<sup>[2]</sup>和火箭起飞的振动环

收稿日期: 2023-09-13; 修订日期: 2023-11-27

基金项目: 河南省高等学校重点科研项目(24A560007); 国家自然科学基金资助项目(52102096, 51678092)

境<sup>[3]</sup>等逐渐引起研究者关注。为评估工程结构在非高斯随机激励下的响应特性,通常需要采用时域方法获得结构响应的时程信息。因此,在随机振动分析中,非高斯随机过程模拟尤为重要。

针对非高斯随机过程模拟,目前已发展多种方法,主要包括传递函数的谱表示法<sup>[4-12]</sup>、Karhunen-Loeve (K-L) 展开法<sup>[13]</sup>和高阶谱表示法<sup>[14]</sup>等,其中传递函数的谱表示法应用最为广泛。关于传递函数的谱表示法,其主要步骤为:(1) 结合目标非高斯随机过程的概率信息确定非高斯随机过程和潜在高斯随机过程的传递函数;(2) 基于目标非高斯随机过程的功率谱函数确定潜在高斯随机过程的功率谱函数;(3) 结合潜在高斯随机过程的功率谱函数,采用高斯随机过程模拟方法得到相应的时程样本;(4) 基于已确定的传递函数,将潜在高斯随机过程的时程样本映射得到非高斯随机过程的时程样本。传递函数的谱表示法主要包括三部分内容:传递函数的确定、潜在高斯随机过程的功率谱函数确定以及高斯随机过程模拟。根据已知非高斯随机过程的概率信息,确定传递函数的方法可分为两种:第一种是基于非高斯随机过程的概率密度函数建立无记忆非线性传递函数<sup>[4-9]</sup>;第二种是基于非高斯随机过程的统计信息建立多项式传递函数<sup>[10-11]</sup>。由于非高斯随机过程的统计信息可由相应的概率密度函数得到,所以第二种传递函数是第一种传递函数的近似形式。由传递函数的谱表示法的主要步骤可知,潜在高斯随机过程的功率谱函数是高斯随机过程模拟的前提条件,也是影响高斯随机过程模拟的关键因素,所以在现有的非高斯随机过程模拟研究中大多关注潜在高斯随机过程的功率谱函数计算<sup>[4-12]</sup>,且主要分为频谱迭代更新<sup>[4-8]</sup>和频谱修正<sup>[9-12]</sup>。频谱迭代更新主要是经验性地调整,并不能保证所有非线性传递的收敛性<sup>[15]</sup>,特别是对于非平稳潜在高斯随机过程的功率谱函数的计算,其计算效率和计算精度通常会受到时间点数目以及收敛准则的影响。相对而言,频谱修正通过修正不兼容的功率谱函数,从而直接获得潜在高斯随机过程的功率谱函数,是一种高效的非迭代方法。在已知高斯随机过程功率谱的前提下,谱表示法是将一系列谱和分量进行叠加,得到高斯随机过程样本。当模拟多点高斯随机过程时,通常需要对互功率谱矩阵进行 Cholesky 分解<sup>[16]</sup>。当模拟随机过程的点数和频率离散数目较多时,互功率谱矩阵分解效率将会降低。针对此问题,有研究者通过插值方法<sup>[17-20]</sup>减少互功率谱矩阵分解的次数,或通过波数-频率谱的方式<sup>[21-24]</sup>避免互功率谱矩阵分解。在已知传递函数的前提下,潜在高斯随机过程的功率谱函数确定以及高斯随机过程模拟是非高斯随机过程模拟的重要组成部分,也是影响模拟效率

的决定因素。关于多点高斯随机过程模拟中的 Cholesky 分解问题已发展多种高效解决方法,本文则主要关注潜在高斯随机过程的功率谱函数的高效计算方法。同时,工程结构在服役期间所遭受的荷载不仅具有非高斯概率特性,而且其概率特性具有时变性<sup>[25-27]</sup>,所以采用非平稳非高斯随机过程对工程荷载进行描述更为合理。因此,本文将针对非平稳非高斯随机过程模拟开展研究。

值得指出的是,由于 Mehler 公式能够精确且高效地应用于 Nataf 变换中等效相关系数的计算<sup>[28-30]</sup>,所以文献[9]通过 Mehler 公式构建相关函数方程,并通过求解方程确定潜在高斯随机过程的等效相关函数,虽然该方法能够有效避免求解相关函数时所遇到的数值积分问题,但对于非平稳非高斯随机过程模拟中的每一个时间点和时间延迟都需要求解方程,这必然会导致计算效率下降。为此,本文在文献[9]的基础上,通过 Mehler 公式建立时变相关函数方程,并针对时变相关函数方程求解所遇到的效率问题,提出一种快速插值求解方法,并以包含较少随机变量的随机过程模拟为目标,基于随机谱和函数提出非平稳非高斯随机过程快速模拟方法。

## 1 多点非平稳非高斯随机过程模拟

模拟具有特定目标功率谱和概率密度函数的多点非平稳非高斯随机过程,采用无记忆非线性变换的思路,在时间  $t$ , 将多点非平稳高斯向量随机过程  $Y(t) = \{Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t)\}$  映射得到多点非平稳非高斯向量随机过程  $Z(t) = \{Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_n(t)\}$ , 即

$$Z_j(t) = F_j^{-1} \left\{ \Phi_j [Y_j(t), t], t \right\} \triangleq H [Y_j(t), t] \quad (1)$$

式中,  $Z_j(t) \in Z(t)$  ( $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) 为指定时变边缘概率密度函数的非平稳非高斯过程;  $Y_j(t) \in Y(t)$  为零均值且方差为 1 的潜在非平稳高斯过程;  $F_j(\cdot, t)$  和  $\Phi_j(\cdot, t)$  分别表示时间  $t$  对应的非高斯边缘累计分布函数和高斯边缘累计分布函数;  $F_j^{-1}(\cdot, t)$  为  $F_j(\cdot, t)$  的逆函数;  $H(\cdot, t)$  为转换函数。

由传递函数的谱表示法进行非高斯随机过程模拟的主要步骤可知,在式(1)建立的非高斯随机过程和潜在高斯随机过程的传递函数基础之上,精确且高效地求解潜在高斯随机过程的功率谱  $S^Y(\omega, t)$  是非高斯随机过程模拟的主要步骤之一。为此,本文结合 Mehler 公式建立潜在高斯随机过程的功率谱  $S^Y(\omega, t)$  求解方法,并针对求解  $S^Y(\omega, t)$  时所遇到的计算效率问题进一步提出快速插值求解方法,进而提出多点非平稳非高斯随机过程快速模拟方法。

### 1.1 潜在高斯随机过程功率谱计算

基于时变 Wiener-Khinchin 定理<sup>[6]</sup>,建立非平稳非高斯随机过程的时变功率谱  $S_{j,k}^Z(\omega, t)$  ( $j=1, 2, \dots, n; k=1, 2, \dots, n$ ) 和时变自相关函数  $R_{j,k}^Z(t, \tau)$  之间的转换关系,即

$$R_{j,k}^Z(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [S_{j,k}^Z(\omega, t) S_{j,k}^Z(\omega, t + \tau)]^{\frac{1}{2}} e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2)$$

式中,  $i^2 = -1$ ;  $\omega$  为频率;  $\tau$  为时间延迟。

非高斯随机过程  $Z(t)$  和对应潜在高斯随机过程  $Y(t)$  的概率信息转换关系可以表示为:

$$\begin{aligned} \rho_{j,k}^Z(t, \tau) &= \frac{R_{j,k}^Z(t, \tau)}{\sigma_{j,j}^Z(t) \sigma_{k,k}^Z(t)} = \\ &= \frac{E[(Z_j(t) - \mu_{Z,j}(t))(Z_k(t + \tau) - \mu_{Z,k}(t + \tau))]}{\sigma_{j,j}^Z(t) \sigma_{k,k}^Z(t)} = \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_j^{-1}\{\Phi_j[y_j(t), t], t\} - \mu_{Z,j}(t)}{\sigma_{j,j}^Z(t)} \cdot \\ &\quad \frac{F_k^{-1}\{\Phi_k[y_k(t + \tau), t], t\} - \mu_{Z,k}(t + \tau)}{\sigma_{k,k}^Z(t)} \cdot \\ &\quad \varphi(y_j(t), y_k(t + \tau), \rho_{j,k}^Y(t, \tau)) dy_j dy_k}{\sigma_{j,j}^Z(t) \sigma_{k,k}^Z(t)} \end{aligned} \quad (3)$$

式中,  $\rho_{j,k}^Z(t, \tau)$  为  $Z_j(t)$  和  $Z_k(t)$  的相关函数;  $E[\cdot]$  表示期望运算;  $\mu_{Z,A}(t)$  和  $\sigma_{A,A}^Z(t)$  分别为  $Z_A(t)$  的时变均值和标准差,  $A=j, k$ ;  $\varphi(y_j(t), y_k(t + \tau), \rho_{j,k}^Y(t, \tau))$  为联合高斯密度函数,可表示为:

$$\begin{aligned} \varphi(y_j(t), y_k(t + \tau), \rho_{j,k}^Y(t, \tau)) &= \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - (\rho_{j,k}^Y(t, \tau))^2}} \cdot \\ &\quad \exp\left(-\frac{y_j^2(t) + y_k^2(t + \tau) - 2\rho_{j,k}^Y(t, \tau)y_j(t)y_k(t + \tau)}{2(1 - (\rho_{j,k}^Y(t, \tau))^2)}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

式中,  $\rho_{j,k}^Y(t, \tau)$  为  $Y_j(t)$  和  $Y_k(t)$  的相关函数。

根据 Mehler 公式<sup>[28-30]</sup>,式(3)可转化为关于  $\rho_{j,k}^Y(t, \tau)$  的多项式函数,即

$$\rho_{j,k}^Z(t, \tau) \approx \sum_{m=1}^M \frac{1}{m!} I_{j,m}(t) I_{k,m}(t + \tau) (\rho_{j,k}^Y(t, \tau))^m \triangleq T_\rho(t, \tau, \rho_{j,k}^Y(t, \tau)) \quad (5)$$

式中,  $T_\rho(t, \tau, \cdot)$  为在时刻  $t$  和时间延迟  $\tau$  的高次多项式函数;  $M$  为 Hermite 多项式截断项的阶次。

$$\begin{aligned} I_{A,m}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_A^{-1}[\Phi(y_A(t), t), t] - \mu_{Z,A}(t)}{\sigma_{A,A}^Z(t)} \cdot \\ &\quad H_m(y_A) \varphi(y_A) dy_A; \quad A = j, k \end{aligned} \quad (6)$$

式中,  $H_m(\cdot)$  为第  $m$  阶的 Hermite 多项式 ( $m=1,$

$2, \dots$ ), 具体表达式如下:

$$\begin{cases} H_1(z_i) = z_i \\ H_2(z_i) = z_i^2 - 1 \\ \vdots \\ H_{m+1}(z_i) = z_i H_m(z_i) - m H_{m-1}(z_i) \end{cases} \quad (7)$$

当式(6)采用数值积分时,存在:

$$\begin{aligned} I_{A,m}(t) &= \frac{w_{GH,i}(t)}{\sigma_{A,A}^Z \sqrt{\pi}} \left\{ F_A^{-1} \left[ \Phi(\sqrt{2} y_{GH,i}(t), t), t \right] - \right. \\ &\quad \left. \mu_{Z,A}(t) \right\} H_m(\sqrt{2} y_{GH,i}(t)) \end{aligned} \quad (8)$$

式中,  $y_{GH,i}(t)$  和  $w_{GH,i}(t)$  为对应  $t$  时刻的高斯积分点和权重;  $d$  为数值积分的求积节点数。为保证 Mehler 公式求解方法的精度,  $d$  和  $M$  的取值依据分布函数不同将会有所差异,具体数值的确定参考文献[30]。

通过式(5)求解  $M$  次代数方程即可确定等效相关函数  $\rho_{j,k}^Y(t, \tau)$ , 随后潜在高斯随机过程的功率谱函数  $S_{j,k}^Y(\omega, t)$  由下式计算:

$$S_{j,k}^Y(\omega, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\rho_{j,k}^Y(t, \tau)] e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (9)$$

由式(5)可知,为确定潜在高斯随机过程的相关函数  $\rho_{j,k}^Y(t, \tau)$ , 需求解高次多项式方程。显然,求解高次多项式方程的次数与时间点和时间延迟数目有关,这必然会影响到模拟方法的计算效率。为提高计算效率,将在下文提出潜在高斯随机过程功率谱快速计算方法。

### 1.2 潜在高斯随机过程功率谱快速计算方法

对于指定的非高斯随机过程,高次多项式函数  $T_\rho(t, \tau, \cdot)$  可通过  $I_{A,m}(t)$  确定,则称通过  $\rho_{j,k}^Z(t, \tau)$  求解相应  $\rho_{j,k}^Y(t, \tau)$  为正问题,对应的逆问题通过  $\rho_{j,k}^Y(t, \tau)$  计算  $\rho_{j,k}^Z(t, \tau)$ 。显然,计算多项式函数的耗时远低于求解相应次数的非线性方程。为此,本节在求解逆问题的基础上,结合插值方法快速计算  $\rho_{j,k}^Y(t, \tau)$ 。

由于等效相关函数  $\rho_{j,k}^Y(t, \tau)$  的取值范围在区间  $[-1, 1]$ , 所以采用间隔  $2/(s-1)$  将区间均分为  $s$  个确定的计算点  $\{\rho_{Y1}, \rho_{Y2}, \dots, \rho_{Ys}^Y\} \triangleq \rho^Y$ , 即

$$\rho_l^Y = -1 + (l-1) \frac{2}{s-1}; \quad l = 1, 2, \dots, s \quad (10)$$

将  $\rho^Y$  中的数值依次代入由  $I_{A,m}(t)$  确定的多项式函数  $T_\rho(t, \tau, \cdot)$  中,可确定相应数值  $\rho^Z \triangleq \{\rho_{Z1}, \rho_{Z2}^Z, \dots, \rho_{Zs-1}^Z, \rho_{Zs}^Z\}$ 。由数值  $\rho^Y$  与  $\rho^Z$  可确定在时刻  $t$  和时间延迟  $\tau$  时  $\rho_{j,k}^Y(t, \tau)$  与  $\rho_{j,k}^Z(t, \tau)$  的对应关系(如图 1 中的蓝色线)。在本文中,  $s=1000$ 。

通过已确定的非高斯随机过程和潜在高斯随机过程的相关函数对应关系,采用插值的方式计算得到  $\rho_{j,k}^Z(t, \tau)$  所对应的  $\rho_{j,k}^Y(t, \tau)$  (如图 2 所示),其中插

值函数可采用三次样条插值,即 MATLAB 软件中的“interp1”命令。由于  $\rho_{j,k}^z(t,\tau)$  与  $\rho_{j,k}^y(t,\tau)$  在固定时间  $t$  和时间延迟  $\tau$  的情况下保持单调递增关系<sup>[31]</sup>,所以  $\rho_{j,k}^z(t,\tau)$  和  $\rho_{j,k}^y(t,\tau)$  保持一一对应关系。

当潜在高斯随机过程的等效相关函数确定后,采用式(9)可得到对应演变功率谱。对于无记忆非线性平移存在的概率信息可能出现不相容问题以及非正定问题,潜在高斯随机过程的演变功率谱需进行谱修正,具体的修正方式参考文献[9]。

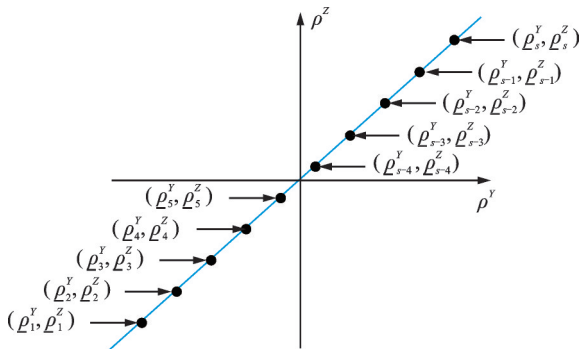


图 1 相关函数确定

Fig. 1 Determination of correlation function

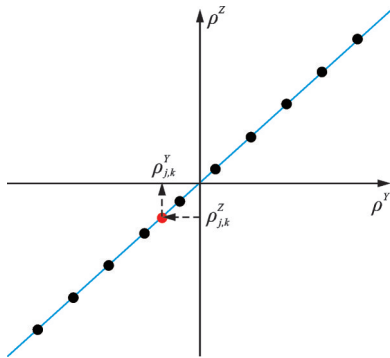


图 2 插值方法

Fig. 2 The interpolation method

### 1.3 基于随机谐和函数的多点非平稳高斯随机过程模拟

当潜在非平稳高斯随机过程  $Y(t)$  的功率谱函数确定后,可采用非平稳高斯随机过程模拟方法生成时程样本。当随机过程应用于工程结构的随机响应分析时,通常需要以较少的随机变量生成时程样本,例如概率密度演变法。孙伟玲等<sup>[32]</sup>、CHEN 等<sup>[33-35]</sup>采用少量的随机谐和分量对高斯随机过程进行模拟且能够较好地拟合目标时变功率谱。因此,本文采用随机谐和函数进行多点非平稳高斯随机过程模拟。

根据 1.2 节中确定的潜在非平稳高斯随机过程的功率谱函数  $S_{j,k}^y(\omega, t)$ ,  $Y(t)$  的功率谱矩阵  $S^Y(\omega, t)$  可由  $S_{j,k}^y(\omega, t)$  表示为:

$$S^Y(\omega, t) = \begin{bmatrix} S_{1,1}^y(\omega, t) & S_{1,2}^y(\omega, t) & \cdots & S_{1,n}^y(\omega, t) \\ S_{2,1}^y(\omega, t) & S_{2,2}^y(\omega, t) & \cdots & S_{2,n}^y(\omega, t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n,1}^y(\omega, t) & S_{n,2}^y(\omega, t) & \cdots & S_{n,n}^y(\omega, t) \end{bmatrix} \quad (11)$$

利用 Cholesky 分解,可将  $S^Y(\omega, t)$  分解为:

$$S^Y(\omega, t) = H(\omega, t)[H^*(\omega, t)]^T \quad (12)$$

式中,上标“T”为转置符号; $H^*(\omega, t)$  为  $H(\omega, t)$  的复共轭矩阵, $H(\omega, t)$  可表示为:

$$H(\omega, t) = \begin{bmatrix} H_{1,1}(\omega, t) & 0 & \cdots & 0 \\ H_{2,1}(\omega, t) & H_{2,2}(\omega, t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n,1}(\omega, t) & H_{n,2}(\omega, t) & \cdots & H_{n,n}(\omega, t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

基于随机谐和函数,非平稳高斯随机过程  $Y_j(t)$  表示为:

$$Y_j(t) = \sum_{m=1}^j \sum_{l=1}^N |A_{j,m}(\omega_{ml}, t)| \cos(\omega_{ml}t + \phi_{ml}) \quad (14)$$

式中, $N$  为谐和分量数目,可由文献[34]确定; $\phi_{ml}$  为  $[0, 2\pi]$  区间的独立同分布的均匀变量,其密度函数相应为:

$$p_{\phi_{ml}} = \frac{1}{2\pi} \quad (15)$$

$$|A_{j,m}(\omega_{ml}, t)| = |H_{j,m}(\omega_{ml}, t)| \sqrt{\frac{\omega_{ml}^{(p)} - \omega_{m(l-1)}^{(p)}}{\pi}} \quad (16)$$

随机频率  $\omega_{ml}$  的密度函数  $p_{\omega_{ml}}(\omega)$  为:

$$p_{\omega_{ml}}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_{ml}^{(p)} - \omega_{m(l-1)}^{(p)}}, & \omega \in [\omega_{m(l-1)}^{(p)}, \omega_{ml}^{(p)}] \\ 0, & \omega \notin [\omega_{m(l-1)}^{(p)}, \omega_{ml}^{(p)}] \end{cases} \quad (17)$$

式中, $\omega_{ml}^{(p)}$  为  $[\omega_{mL}, \omega_{mU}]$  内的任意内插点,其中  $\omega_{mL}$  和  $\omega_{mU}$  分别为随机过程  $Y_l(t)$  的截止频率下限和上限。

由式(14)获得潜在高斯随机过程后,结合式(1),即可获得非高斯随机过程。

### 1.4 多点非平稳非高斯随机过程模拟步骤

关于本文提出的非平稳非高斯随机过程模拟方法的计算步骤总结如下:

(1) 根据非高斯随机过程  $Z(t)$  的功率谱  $S_{j,k}^z(\omega, t)$  和式(3),确定非高斯随机过程的相关函数  $\rho_{j,k}^z(t,\tau)$ ;

(2) 结合  $Z(t)$  的时变概率信息,确定不同时刻  $t$  处  $d$  和  $M$  的取值,并通过  $\rho^y$  与  $\rho^z$  的离散点建立  $\rho_{j,k}^z(t,\cdot)$  和  $\rho_{j,k}^y(t,\cdot)$  的映射关系;

(3) 基于已建立的  $\rho_{j,k}^z(t,\cdot)$  和  $\rho_{j,k}^y(t,\cdot)$  的映射关系,通过插值方法计算  $\rho_{j,k}^z(t,\tau)$  所对应的  $\rho_{j,k}^y(t,\tau)$ ,

进而计算潜在非平稳高斯随机过程的功率谱函数  $S_{j,k}^Y(\omega, t)$ ;

(4) 根据潜在高斯随机过程功率谱函数  $S_{j,k}^Y(\omega, t)$  和式(14)进行非平稳高斯随机过程模拟,得到相应时程样本过程;

(5) 通过式(1)和非平稳高斯时程样本过程,得到具有特定目标功率谱和概率信息的非平稳非高斯时程样本过程。

## 2 算例验证

为验证本文所提非平稳非高斯随机过程模拟方法(记为建议法)的有效性,本节将通过两个算例对其进行验证,其中算例1为单点均匀调制非高斯随机过程模拟,算例2为多点非均匀调制非高斯随机过程模拟。为对比分析,本文同时考察文献[6]提出的潜在高斯随机过程的功率谱密度函数迭代求解方法,并将其与谱表示法<sup>[16]</sup>和无记忆非线性变换<sup>[4]</sup>结合,获得相应非高斯随机过程(记为迭代法)。

随机过程  $Z(t)$  的时变均值  $\mu_z(t)$ 、时变二阶矩  $m_{z,2}(t)$ 、时变三阶矩  $m_{z,3}(t)$ 、时变四阶矩  $m_{z,4}(t)$ 、时变偏度  $sw_z(t)$  和时变峰度  $ks_z(t)$  的计算表达式如附录所示。

本文所有程序均在处理器为 i5-12600 K、主频为 3.70 GHz 和内存为 32 GB 的计算机上运行。

### 2.1 单点均匀调制非高斯随机过程模拟

对于单点均匀调制非高斯随机过程  $Z(t)$ ,其边缘密度函数为 Gamma 分布,且均值  $\mu_z(t)$ 、二阶矩  $m_{z,2}(t)$ 、偏度  $sw_z(t)$  和四阶矩  $m_{z,4}(t)$  的目标值如图 3 所示。 $Z(t)$  可由下式表示:

$$Z(t) = g(t)X(t) \quad (18)$$

式中,  $X(t)$  为平稳非高斯随机过程;  $g(t)$  为均匀调制

函数,表示为:

$$g(t) = \frac{e^{-0.25t} - e^{-0.5t}}{0.25} \quad (19)$$

$Z(t)$  的演变功率谱密度函数  $S^Z(\omega, t)$  为:

$$S^Z(\omega, t) = g^2(t)S^X(\omega) \quad (20)$$

式中,  $S^X(\omega)$  为  $X(t)$  的功率谱密度函数,表示为:

$$S^X(\omega) = \frac{\omega_g^4 + 4\xi_g^2\omega_g^2\omega^2}{(\omega^2 - \omega_g^2)^2 + 4\xi_g^2\omega_g^2\omega^2} S_0 \quad (21)$$

式中,  $\omega_g = 12.15$  rad/s,  $\xi_g = 0.65$ ,  $S_0 = 0.07$  m<sup>2</sup>·s<sup>-3</sup>。计算中,截止频率的上、下限分别为  $\omega_U = 100$  rad/s 和  $\omega_L = 0$ ,频率离散数目  $N_w$  为 1000,时间延迟离散数目  $N_\tau$  为 256,时间离散数目  $N_t$  为 1024。

对于均匀调制非高斯随机过程模拟,通常可对平稳非高斯随机过程  $X(t)$  进行模拟得到样本随机过程,再结合式(18),即可得到  $Z(t)$  的样本随机过程,其中结合文献[30],  $d$  和  $M$  的取值分别为 11 和 3。为验证 Mehler 公式求解相关函数的精度,图 3 分别绘制了由式(3)通过积分求解(记为标准解)、Mehler 公式求解以及插值求解  $Y(t)$  的相关函数。由图 4 可知,通过 Mehler 公式求解得到  $Y(t)$  的相关函数能够与标准解在整个时间延迟上吻合,这表明 Mehler 公式求解具有较高的计算精度,同时,插值求解的结果与 Mehler 公式求解的结果完全吻合,这表明插值求解能够精确确定潜在高斯随机过程的相关函数。随后,基于 1.1 节和 1.2 节,分别通过 Mehler 公式求解和插值求解,得到  $X(t)$  对应的潜在高斯随机过程  $Y(t)$  的功率谱密度函数  $S^Y(\omega)$ ,如图 4 所示。同时,由迭代求解得到的潜在高斯随机过程的功率谱密度函数绘制于图 4。由图 4 可知,通过插值方法和 Mehler 公式求解得到的  $S^Y(\omega)$  能够与标准解吻合,而通过迭代求解得到的  $S^Y(\omega)$  虽然能够与标准解相近,但在峰值处却表现出明显差异。为进一步考察 Mehler 公式求解、插值求解和迭代求解的

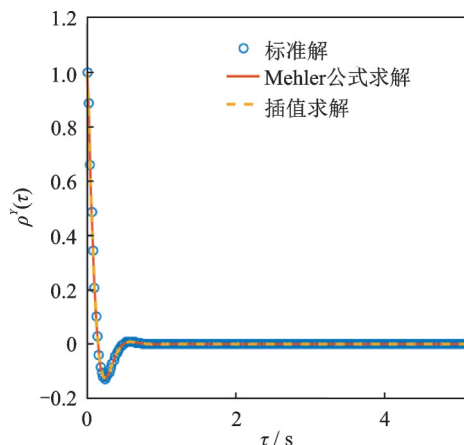


图3 相关函数对比

Fig. 3 Comparison of correlation function

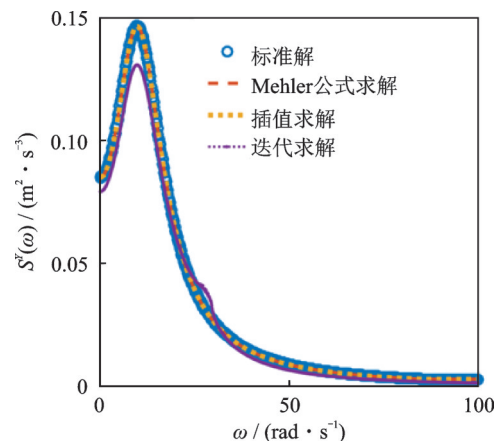


图4 潜在高斯随机过程的功率谱密度函数

Fig. 4 Power spectral density function of underlying Gaussian stochastic process

计算精度,通过下式计算上述三种方法得到的  $S^Y(\omega)$  与目标解的差异  $\epsilon_G$ ,即

$$\epsilon_G = \sqrt{\frac{\int_0^{+\infty} [S_T^Y(\omega) - S_E^Y(\omega)]^2 d\omega}{\int_0^{+\infty} [S_T^Y(\omega)]^2 d\omega}} \times 100\% \quad (22)$$

式中,  $S_E^Y(\omega)$  为 Mehler 公式求解、插值求解和迭代求解得到的潜在高斯随机过程的功率谱,  $S_T^Y(\omega)$  为相应的标准解。

由式(22)得到 Mehler 公式求解、插值求解和迭代求解与目标解的差异分别为 0.0943%、0.0943% 和 9.97%。显然, Mehler 公式求解和插值求解能够更为精确地计算潜在高斯随机过程的功率谱。需指出的是,通过 Mehler 公式求解  $S^Y(\omega)$  的时间为 68.25 s,通过插值求解  $S^Y(\omega)$  的时间为 0.51 s,而迭代求解花费 9.06 s 计算  $S^Y(\omega)$ 。其中在插值求解中, 0.19 s 用于确定  $\rho^y$  与  $\rho^z$  的关系, 0.32 s 用于拟合和计算  $S^Y(\omega)$ 。同时,依据时间复杂度的概念<sup>[36]</sup>,插值求解需要在每一个时间延迟点处计算潜在高斯随机过程的相关函数,共需循环计算  $N_r$  次,随后需要循环  $N_w$  次计算潜在高斯随机过程的功率谱函数,则插值求解的时间复杂度为  $O(N_r + N_w)$ 。迭代求解在每一次迭代循环中采用  $N_r$  次计算迭代非高斯随机过程的相关函数,  $N_w$  次计算迭代非高斯随机过程的功率谱函数。在本算例中,共采用 10 次循环判断迭代非高斯随机过程的功率谱函数收敛目标非高斯随机过程的功率谱函数,则迭代求解的时间复杂度为  $O[10 \cdot (N_r + N_w)]$ 。显然,迭代求解的时间复杂度明显高于插值求解的时间复杂度,进一步表明,插值求解算法程序的高效性。上述结果表明插值求解能够高效且精确地计算潜在高斯随机过程的功率谱密度函数  $S^Y(\omega)$ 。

在获得  $S^Y(\omega)$  后,采用 14 个谐和分量进行高斯随机过程模拟,得到 1000 条  $Y(t)$  的样本过程,再通过无记忆非线性变换得到对应  $X(t)$  的时程样本,最终通过式(18)获得  $Z(t)$  的样本过程。由附录分别计算  $Z(t)$  的时变统计矩,并绘制于图 5。由图 5 可知,由建议法得到非高斯随机过程的前四阶矩能够与目标值吻合,而迭代法得到的统计矩却与目标值有差异。图 6 绘制了 3 条非平稳非高斯随机过程  $Z(t)$  的时程样本。从图 6 中可以看出,每条时程样本在整个时域上表现出明显的非平稳特性。图 7 分别绘制建议法和迭代法在  $t=3$  s 时的概率密度函数。由图 7 可知,建议法的密度函数能够和目标密度函数在整个区间吻合,而迭代法的密度函数在峰点处与目标密度函数有差异。图 8 分别绘制了由建议法和迭代法得到的时变功率谱。显然,建议法得到非高斯随机过程

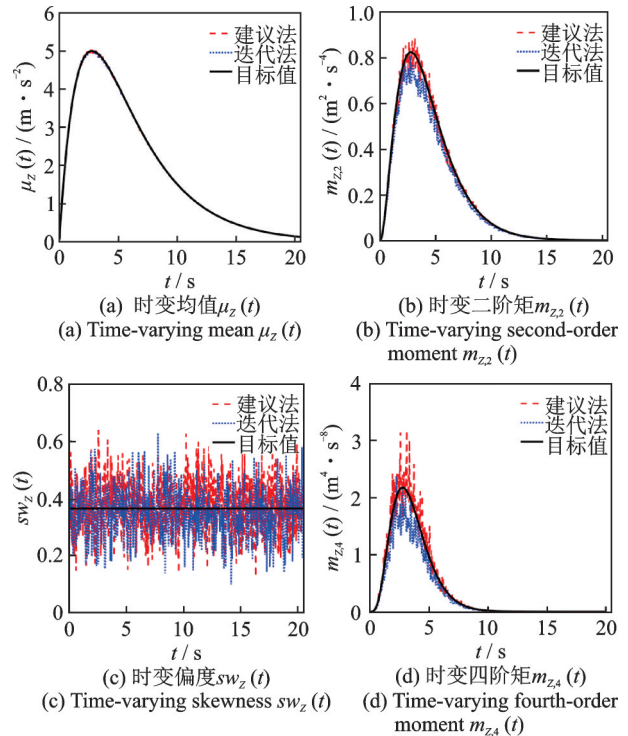


图 5 时变统计矩

Fig. 5 Time-varying statistical moment

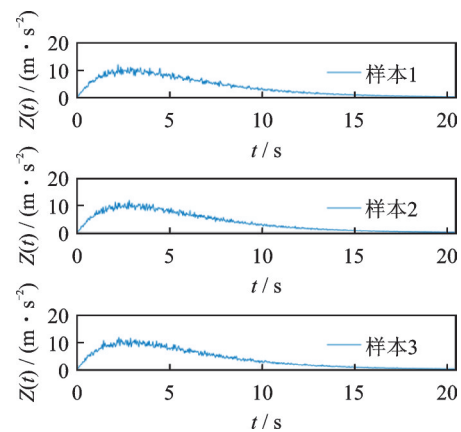


图 6  $Z(t)$  的时程样本

Fig. 6 The time-history samples of  $Z(t)$

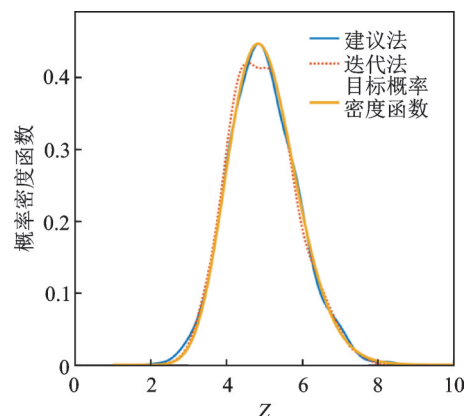


图 7  $Z(t)(t=3)$  的概率密度函数

Fig. 7 Probability density function of  $Z(t)(t=3)$

的时变功率谱与目标谱在整个频域和时域上具有一致性,迭代法得到的时变功率谱幅值却与目标谱有一定差异。需指出的是,建议法和迭代法生成一条

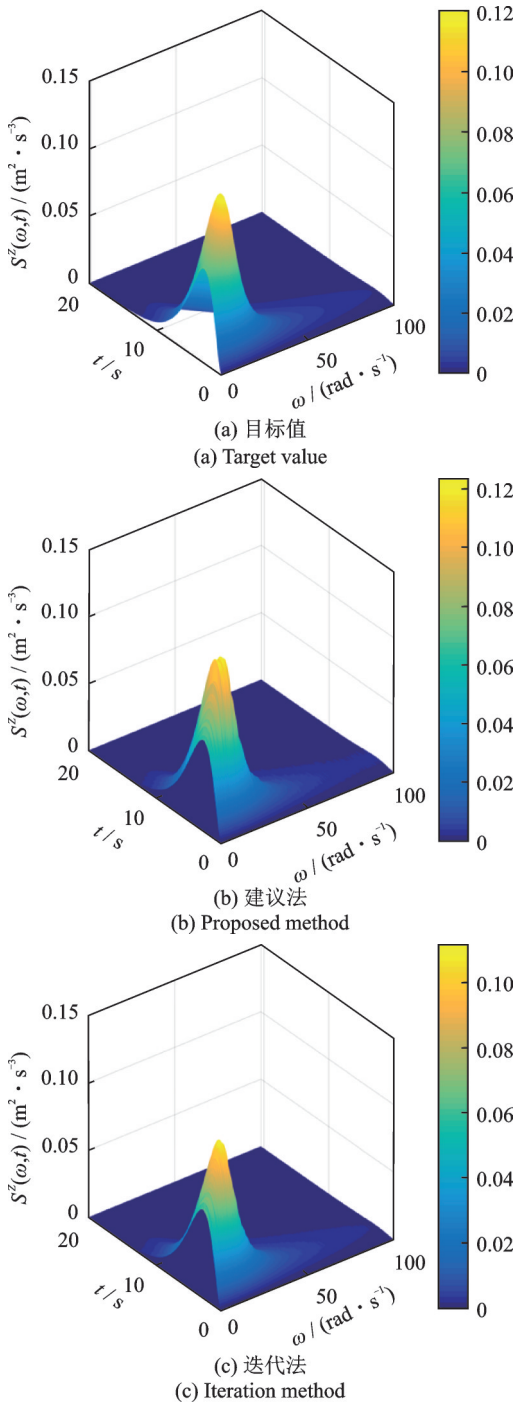


图 8 非高斯随机过程的时变功率谱  $S^z(\omega, t)$  对比  
Fig. 8 Comparison of time-varying power spectrum  $S^z(\omega, t)$  of non-Gaussian stochastic process

$Z(t)$  的样本过程分别耗时 0.513 和 9.17 s。由于建议法和迭代法在高斯随机过程模拟时采用矩阵运算且两种方法循环次数一致, 所以本算例没有对比两种方法在高斯随机过程模拟时的时间复杂度。本算例的计算结果表明, 建议法相对迭代法能够有效地模拟具有特定目标功率谱的非高斯随机过程。

### 2.2 多点非均匀调制非高斯随机过程模拟

边缘密度函数为对数正态分布的非均匀调制非高斯向量随机过程  $Z(t) = \{Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_{10}(t)\}$ , 其

均值依次为 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 时变二阶矩  $m_{z_{l,2}}(t)$  ( $l = 1, 2, \dots, 10$ ) 如图 9 所示,  $Z(t)$  的其他分布参数和统计信息可通过相应的密度函数计算得到, 且部分目标时变统计矩  $m_{z_{2,2}}(t)$ ,  $m_{z_{2,3}}(t)$  和  $k_{S_{z_2}}(t)$  如图 10 所示。  $Z_i(t)$  和  $Z_j(t)$  的互功率谱  $S_{ij}^z(\omega, t)$  为:

$$S_{ij}^z(\omega, t) = A_i(\omega, t) A_j(\omega, t) S_{ij}^x(\omega);$$

$$i = 1, 2, \dots, 10; j = 1, 2, \dots, 10; i \neq j \quad (23)$$

式中,  $A_l(\omega, t)$  ( $l = 1, 2, \dots, 10$ ) 为调制函数并采用相同的形式, 即

$$A_l(\omega, t) = \frac{\exp(-at) - \exp(-(c\omega + b)t)}{\exp(-at_d) - \exp(-(c\omega + b)t_d)} \quad (24)$$

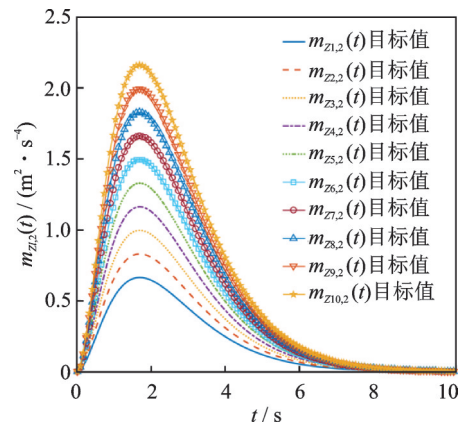
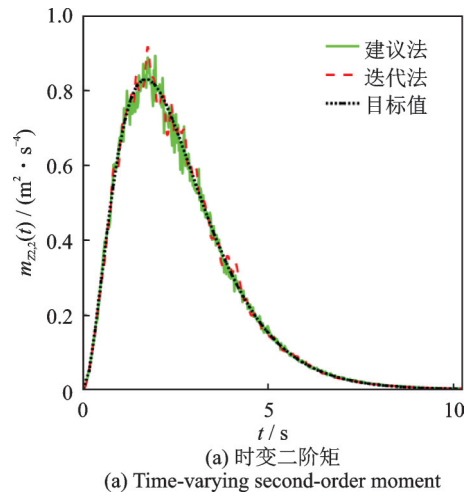
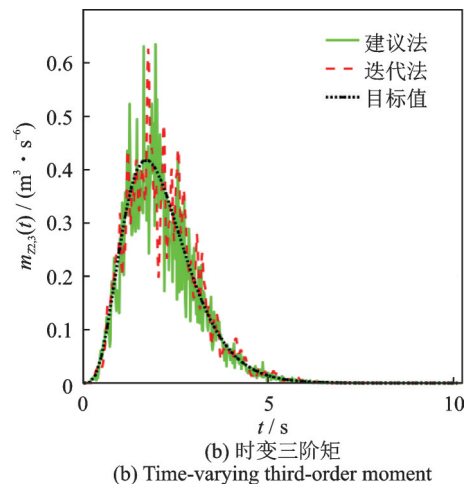


图 9 目标时变二阶矩

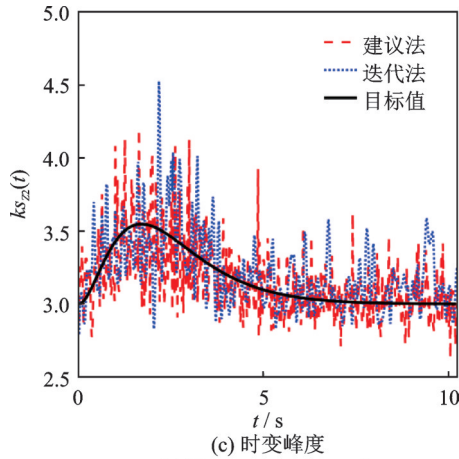
Fig. 9 Target time-varying second-order moment



(a) Time-varying second-order moment



(b) Time-varying third-order moment



(c) 时变峰度  
(c) Time-varying kurtosis

图10 时变统计矩对比

Fig. 10 Comparison of time-varying statistical moment

式中,  $a=0.25 \text{ s}^{-1}$ ,  $b=0.251 \text{ s}^{-1}$ ,  $c=0.05$ 。

$$t_d = \frac{\ln(c\omega + b) - \ln a}{c\omega + (b - a)} \quad (25)$$

$$S_{ij}^X(\omega) = \sqrt{S_{ii}^X(\omega) S_{jj}^X(\omega)} \Psi_{ij}^X(\omega) \quad (26)$$

其中:

$$S_{jj}^X(\omega) = \frac{\omega_g^4 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega^2 - \omega_g^2)^2 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2} \cdot \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_i^2) + 4\xi_i^2 \omega_i^2 \omega^2} \cdot C_j \quad (27)$$

$$\Psi_{ij}^X(\omega) = \exp[-a(\omega) d_{i,j}] \quad (28)$$

$$\begin{cases} a(\omega) = 0.1678 \times 10^{-4} \omega^2 + 0.1219 \times 10^{-2} \\ b(\omega) = -0.0055\omega + 0.7674 \end{cases} \quad (29)$$

式中, 常数  $\omega_g$ ,  $\omega_i$ ,  $\xi_g$ ,  $\xi_i$  分别取为  $8.5 \text{ rad/s}$ ,  $0.85 \text{ rad/s}$ ,  $0.75$ ,  $0.75$ ;  $C_j$  ( $j=1, 2, \dots, 10$ ) 依次为  $0.08, 0.10, 0.12, 0.14, 0.16, 0.18, 0.20, 0.22, 0.24, 0.26 \text{ m}^2/\text{s}^3$ ;  $d_{i,j}$  计算如下:

$$d_{i,j} = 300j + (i - 1) \times 100 \quad (30)$$

在随机过程模拟中, 截止频率的上、下限分别为  $\omega_u=100 \text{ rad/s}$  和  $\omega_l=0$ , 频率离散数目  $N_\omega$  为 1000, 时间延迟离散数目  $N_t$  为 256, 时间离散数目  $N_s$  为 256。

由于对数正态分布的相关系数和对应高斯分布的相关系数有解析解<sup>[31]</sup>, 所以本算例将通过解析解得到的潜在高斯随机过程的功率谱作为标准解。

基于文献[30],  $d$  的取值恒为 11, 不同时刻处  $M$  的取值如图 11 所示。由图 11 可知, 除  $Z_1(t)$  在特定时间段内  $M$  的取值为 3, 其余时刻不同随机过程所对应的  $M$  取值恒为 2。根据非平稳非高斯随机过程的时变功率谱, 分别由 Mehler 公式求解、插值求解和迭代求解得到潜在高斯随机过程的时变功率谱密度函数, 以  $S_{2,6}^Y(\omega, t)$  为例绘制图 12。由图 12 可知, Mehler 公式求解和插值求解在整个时频域内与标准解吻合, 迭代求解在低频处能够与标准解吻合, 而在高频处却与标准解表现出明显差异。同时, Mehler 公式求解、插值求

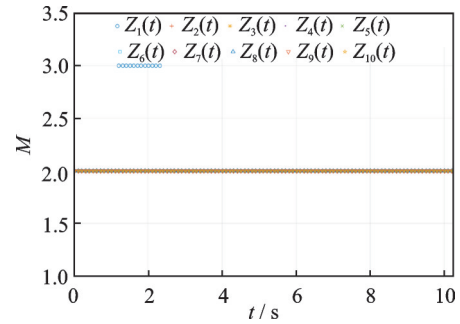
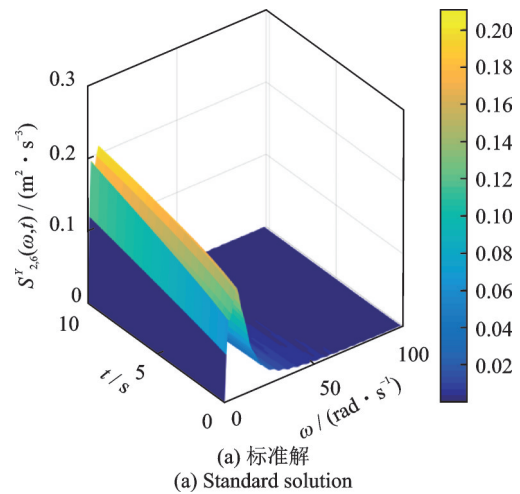
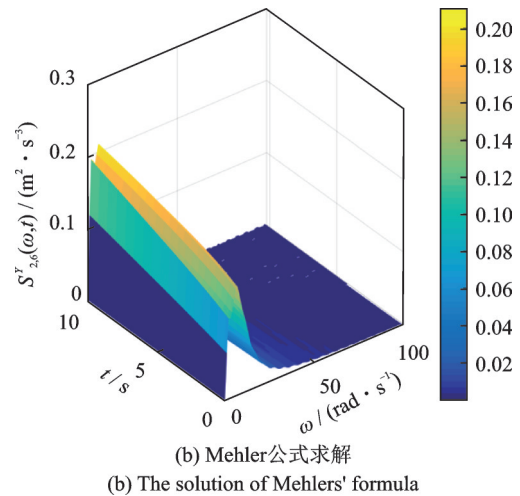


图 11  $M$  的取值

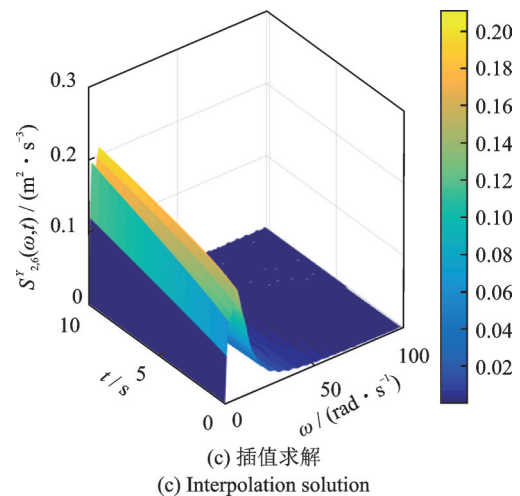
Fig. 11 The value of  $M$



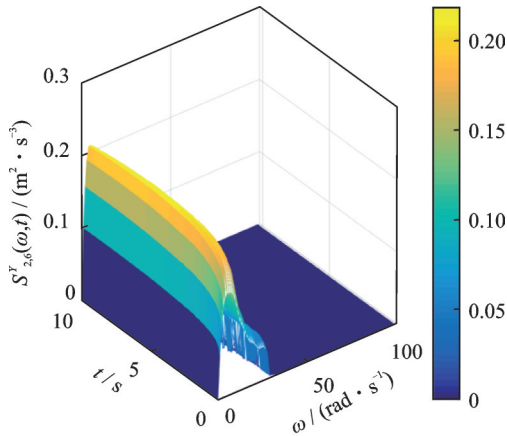
(a) 标准解  
(a) Standard solution



(b) Mehler公式求解  
(b) The solution of Mehlers' formula



(c) 插值求解  
(c) Interpolation solution



(d) 迭代求解  
(d) Iteration solution

图 12 潜在高斯随机过程的时变功率谱密度函数  $S_{2,6}^Y(\omega, t)$   
Fig.12 Power spectral density function  $S_{2,6}^Y(\omega, t)$  of underlying Gaussian stochastic process

解、迭代求解与标准解的差异可由下式计算:

$$\epsilon_G = \sqrt{\frac{\int_0^\infty \int_0^\infty [S_T^Y(\omega, t) - S_E^Y(\omega, t)]^2 d\omega dt}{\int_0^\infty [S_T^Y(\omega, t)]^2 d\omega dt}} \times 100\% \quad (31)$$

式中,  $S_E^Y(\omega, t)$  为 Mehler 公式求解、插值求解、迭代求解计算得到的潜在高斯随机过程的功率谱;  $S_T^Y(\omega, t)$  为潜在高斯随机过程的功率谱标准解。

由式(31)得到 Mehler 公式求解、插值求解和迭代求解与目标解的差异分别为 0.7306%、0.7306% 和 32.7158%。Mehler 公式求解、插值求解和迭代求解得到  $S_{2,6}^Y(\omega, t)$  所花费的时间依次为 77824、2.15 和 2821.65 s。同时,插值求解在每一个时间点处需进行  $N_r$  次潜在高斯随机过程的相关函数计算和  $N_w$  次潜在高斯随机过程的功率谱函数计算,迭代求解程序在每一次迭代循环中的每一个时间点处涉及  $N_r$  次迭代非高斯随机过程的相关函数计算和  $N_w$  次迭代非高斯随机过程的功率谱函数计算,本算例共采用 15 次迭代循环,则插值求解和迭代求解的时间复杂度依次为  $O[N_r \cdot (N_r + N_w)]$  和  $O[15 \cdot N_r \cdot (N_r + N_w)]$ 。显然,插值求解能够高效且精确地计算潜在高斯随机过程的功率谱函数。

在确定潜在高斯随机过程的时变功率谱后,采用 76 个谐和分量进行非平稳高斯随机过程模拟方法,得到潜在高斯随机过程的 1000 条时程样本,并结合式(1),即可获得非高斯随机过程的时程样本。图 13 分别绘制了  $Z_2(t)$ 、 $Z_5(t)$  和  $Z_9(t)$  的时程样本。从图 13 中可以明显看出,时程样本在整个时间域上表现出明显的非平稳特性;同时,不同点处的时程样本幅值有较大差异。基于建议法和迭代法得到的样本过程,由附录分别计算时变统计矩  $M_{Z_2,2}(t)$ 、 $M_{Z_2,3}(t)$  和  $k_{S_{Z_2}}(t)$ ,并绘制于图 10。由图 10 可知,建议法和

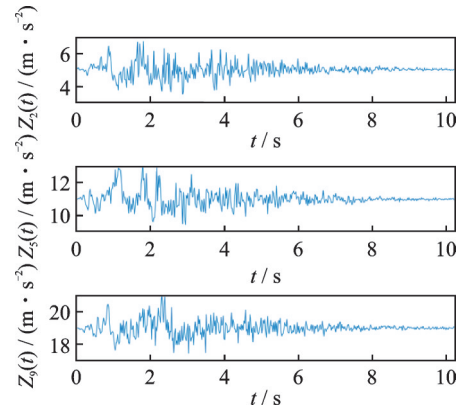


图 13 时程样本

Fig.13 The time-history samples

迭代法的时变统计矩能够与目标值在整个时间域上吻合,且具有明显的非平稳特性。图 14 给出了  $Z_2(t)$  在  $t=8.6$  s 时的概率密度函数。由图 14 可知,建议法和迭代法所对应的概率密度函数能够和目标密度函数匹配。通过小波方法<sup>[37]</sup>,估计非平稳非高斯样本随机过程的时变功率谱,其中图 15 分别给出  $S_{2,2}^Z(\omega, t)$  的目标功率谱和估计得到的时变功率谱。由图 15 可知,建议法和迭代法所对应的时变功率谱在时域和频域上能够与目标时变功率谱整体保持一致。在时变功率谱的初始时刻,目标功率谱和估计功率谱存在一定差异,该差异的主要原因是小波估

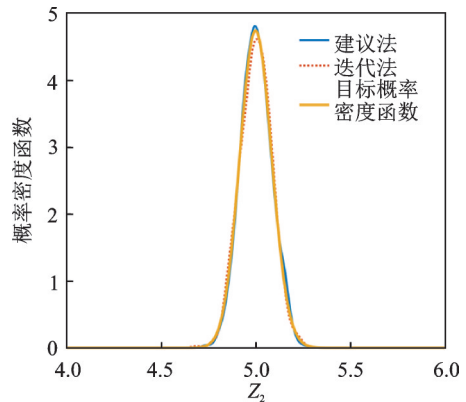
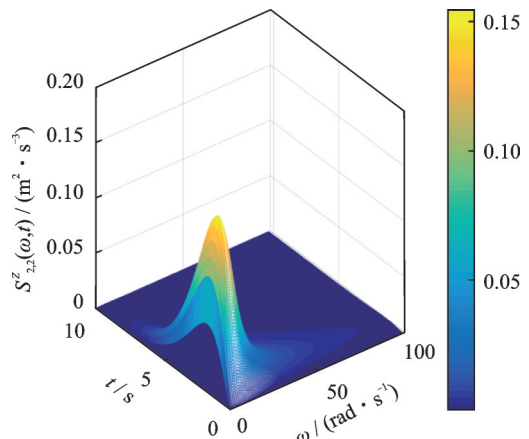


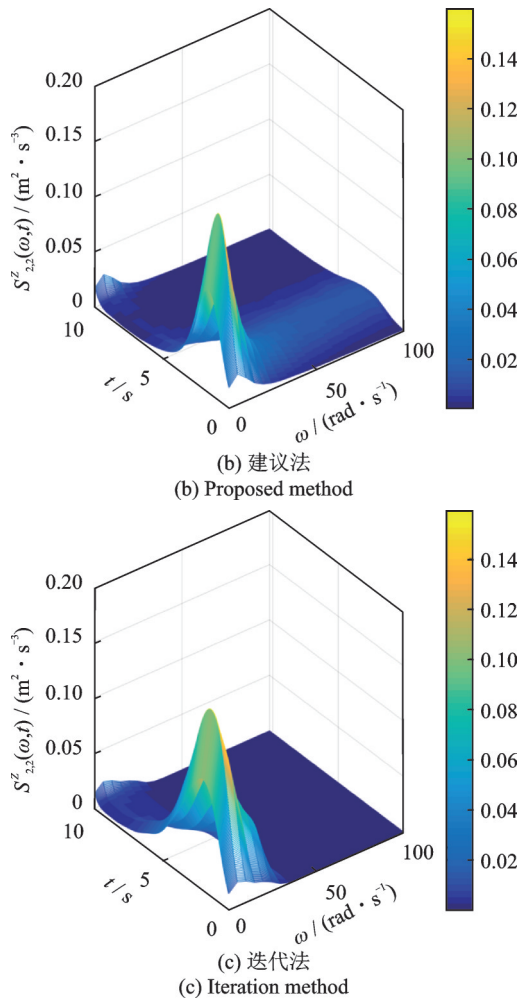
图 14  $Z_2(t)(t=8.6)$  的概率密度函数

Fig.14 Probability density function of  $Z_2(t)(t=8.6)$



(a) 目标功率谱

(a) Target power spectrum

图15 时变功率谱  $S_{2,2}^z(\omega, t)$  对比Fig. 15 Comparison of time-varying power spectrum  $S_{2,2}^z(\omega, t)$ 

计的局限性所导致<sup>[34]</sup>。建议法和迭代法生成一条  $Z_2(t)$  的样本过程分别耗时 52.22 和 91981.37 s。显然,建议法相对迭代法能够有效地模拟具有特定目标功率谱的非高斯随机过程。

为进一步验证建议法模拟非高斯随机过程的高效性,通过对非高斯向量随机过程的维数  $nm$  依次取为 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 并计算生成一条随机过程的时间,如图 16 所示。由图 16 可知,建议法的耗时随着维数  $nm$  的增加而增长,但整体耗时仍处于可接

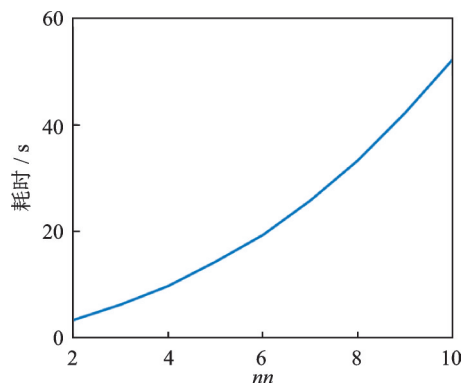


图16 耗时对比

Fig. 16 Comparison of time-consuming

受的范围。

### 3 结论

本文针对多点非平稳非高斯随机过程,采用插值求解和随机谐和函数,提出一种快速模拟方法,结论如下:

(1) 相对于 Mehler 公式求解和迭代求解潜在高斯随机过程的功率谱,插值求解在保持计算精度的同时能够提高计算效率,且在计算多点潜在高斯随机过程的时变功率谱时,插值求解的优势更为明显。

(2) 通过随机谐和函数,能够以较少的谐和分量进行非平稳高斯随机过程模拟。

(3) 通过非平稳非高斯随机过程快速模拟方法得到样本过程,能够与目标功率谱、目标统计矩和目标密度函数吻合。

(4) 对于非高斯随机过程模拟,本文所提插值求解方法不仅可以与随机谐和函数相结合,还可以与现有高效地高斯随机过程模拟相结合。

(5) 在多点非平稳非高斯随机过程模拟中,如何高效地分解功率谱矩阵是未来研究的重点。

### 参考文献:

- [1] 杨庆山, 田玉基. 地震地面运动及其人工合成[M]. 北京: 科学出版社, 2014: 20-50.  
YANG Qingshan, TIAN Yuji. Earthquake Ground Motions & Artificial Generation[M]. Beijing: Science Press, 2014: 20-50.
- [2] 黄国庆, 彭留留, 廖海黎, 等. 普立特大桥桥位处山区风特性实测研究[J]. 西南交通大学学报, 2016, 51(2): 349-356.  
HUANG Guoqing, PENG Liuliu, LIAO Haili, et al. Field measurement study on wind characteristics at Puli Great Bridge site in mountainous area[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2016, 51(2): 349-356.
- [3] 吴家驹, 张鹏飞, 胡亚冰. 非高斯随机振动的分析基础[J]. 强度与环境, 2018, 45(2): 1-8.  
WU Jiaju, ZHANG Pengfei, HU Yabing. Analytical basis for the synthesis of non-Gaussian random vibration [J]. Structure & Environment Engineering, 2018, 45(2): 1-8.
- [4] GRIGORIU M. Applied Non-Gaussian Processes[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1995.
- [5] FERRANTE F J, ARWADE S R, GRAHAM-BRADY L L. A translation model for non-stationary, non-Gaussian random processes[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2005, 20(3): 215-228.
- [6] SHIELDS M D, DEODATIS G. Estimation of evolu-

- tionary spectra for simulation of non-stationary and non-Gaussian stochastic processes[J]. *Computers & Structures*, 2013, 126:149-163.
- [7] WU Y X, GAO Y F, ZHANG N, et al. Simulation of spatially varying non-Gaussian and nonstationary seismic ground motions by the spectral representation method[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2018, 144(1):04017143.
- [8] LI B, PENG L L, JIANG Y, et al. Simulation of stationary non-Gaussian stochastic vector processes using an eigenvalue-based iterative translation approximation method[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, 175:109128.
- [9] LI Z L, LIU R Y, FAN W L, et al. Simulation of stationary Gaussian/non-Gaussian stochastic processes based on stochastic harmonic functions[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2021, 66:103141.
- [10] FAN W L, TIAN Y, SHENG X Q. Simulation of a non-Gaussian stochastic process based on a combined distribution of the UHPM and the GBD[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2023, 72:103438.
- [11] LU Z H, ZHAO Z, ZHANG X Y, et al. Simulating stationary non-Gaussian processes based on unified Hermite polynomial model[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2020, 146(7):04020067.
- [12] 李锦华,李春祥,蒋磊,等.多变量非高斯脉动风压模拟的非迭代法[J].*上海交通大学学报*,2017,51(4):462-469.  
LI Jinhua, LI Chunxiang, JIANG Lei, et al. A non-iterative approach for simulating multivariate non-Gaussian fluctuating wind pressure[J]. *Journal of Shanghai Jiao Tong University*, 2017, 51(4): 462-469.
- [13] PHOON K K, HUANG H W, QUEK S T. Simulation of strongly non-Gaussian processes using Karhunen-Loeve expansion[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2005, 20(2):188-198.
- [14] SHIELDS M D, KIM H. Simulation of higher-order stochastic processes by spectral representation[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2017, 47:1-15.
- [15] PUIG B, AKIAN J L. Non-Gaussian simulation using Hermite polynomials expansion and maximum entropy principle[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2004, 19(4): 293-305.
- [16] SHINOZUKA M, JAN C M. Digital simulation of random processes and its applications[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1972, 25(1): 111-128.
- [17] ZHAO N, JIANG Y, PENG L L, et al. Fast simulation of nonstationary wind velocity fields by proper orthogonal decomposition interpolation[J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 2021, 219:104798.
- [18] TAO T Y, WANG H, ZHAO K Y. Efficient simulation of fully non-stationary random wind field based on reduced 2D Hermite interpolation[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2021, 150:107265.
- [19] 杨雄骏,黄金山,张建国,等.基于插值与降维方法的输电塔线体系随机脉动风场有效模拟[J].*振动与冲击*,2021,40(9):77-83.  
YANG Xiongjun, HUANG Jinshan, ZHANG Jianguo, et al. Effective simulation of stochastic fluctuating wind field of transmission tower-line system based on interpolation and dimension reduction method[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2021, 40(9): 77-83.
- [20] JIANG Y, ZHAO N, PENG L L, et al. Fast simulation of fully non-stationary wind fields using a new matrix factorization assisted interpolation method[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, 172:108973.
- [21] 宋玉鹏,陈建兵,彭勇波.基于波数-频率联合演变功率谱的一维空间非均匀脉动风场模拟[J].*工程力学*,2019,36(2):205-214.  
SONG Yupeng, CHEN Jianbing, PENG Yongbo. Simulation of nonhomogeneous fluctuating wind field in one-dimensional space by evolutionary wavenumber-frequency joint power spectrum[J]. *Engineering Mechanics*, 2019, 36(2): 205-214.
- [22] YANG X J, LEI Y. Efficient simulation of wind fields based on the factorization of wavenumber-frequency joint spectrum[J]. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 2022, 37(3):370-385.
- [23] ZHAO Z, LU Z H, ZHAO Y G. Simulating multivariate stationary non-Gaussian process based on wavenumber-frequency spectrum and unified Hermite polynomial model[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2022, 69:103272.
- [24] LI Y, XU J. A PDF discretization scheme in wavenumber-frequency joint spectrum for simulating multivariate random fluctuating wind fields[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2023, 72:103422.
- [25] GUPTA I D, TRIFUNAC M D. A note on the nonstationarity of seismic response of structures[J]. *Engineering Structures*, 2000, 22(11):1567-1577.
- [26] CHEN X Z. Analysis of alongwind tall building response to transient nonstationary winds[J]. *Journal of Structural Engineering*, 2008, 134(5):782-791.
- [27] FALSONE G, SETTINERI D. A method for the random analysis of linear systems subjected to non-stationary multi-correlated loads[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2011, 26(3):447-453.
- [28] KIBBLE W F. An extension of a theorem of Mehler's on Hermite polynomials[J]. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1945, 41(1): 12-15.

- [29] 范文亮, 杨朋超, 李正良. 基于 Mehler 公式的等效相关系数求解技术[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2016, 44(6): 838-844.  
FAN Wenliang, YANG Pengchao, LI Zhengliang. A technique for solution of equivalent correlation coefficients based on the Mehler's formula[J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2016, 44(6): 838-844.
- [30] ZU Y F, FAN W L, ZHANG J Y, et al. Investigation of equivalent correlation coefficient based on the Mehler's formula[J]. Engineering Computations, 2019, 36(4):1169-1200.
- [31] LIU P L, DER KIUREGHIAN A. Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 1986, 1(2): 105-112.
- [32] 孙伟玲, 陈建兵, 李杰. 随机过程的第二类随机谱和函数表达[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2011, 39(10): 1413-1419.  
SUN Weiling, CHEN Jianbing, LI Jie. Stochastic harmonic functions of second kind for spectral representations[J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2011, 39(10): 1413-1419.
- [33] CHEN J B, SUN W L, LI J, et al. Stochastic harmonic function representation of stochastic processes[J]. Journal of Applied Mechanics, 2012, 80(1):011001.
- [34] CHEN J B, KONG F, PENG Y B. A stochastic harmonic function representation for non-stationary stochastic processes [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2017, 96:31-44.
- [35] CHEN J B, COMERFORD L, PENG Y B, et al. Reduction of random variables in the stochastic harmonic function representation via spectrum-relative dependent random frequencies[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2020, 141:106718.
- [36] 王红梅, 皮德常. 数据结构: 从概念到 C 实现[M]. 北京: 清华大学出版社, 2017.  
WANG Hongmei, PI Dechang. Data Structure: From Concept to C Implementation[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2017.
- [37] KONG F, SPANOS P D, LI J, et al. Response evolutionary power spectrum determination of chain-like MDOF non-linear structural systems via harmonic wavelets[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2014, 66:3-17.

第一作者: 盛向前(1988—), 男, 博士, 讲师。

E-mail: 2008shengxq@163.com

通信作者: 虞跨海(1982—), 男, 博士, 教授。

E-mail: yukuahai@163.com

## 附录:

随机过程  $Z(t)$  的时变均值  $\mu_z(t)$ 、时变二阶矩  $m_{z,2}(t)$ 、时变三阶矩  $m_{z,3}(t)$ 、时变四阶矩  $m_{z,4}(t)$ 、时变偏度  $sw_z(t)$  和时变峰度  $ks_z(t)$  的计算表达式如下:

$$\mu_z(t) = \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} z_i(t) \quad (\text{A1})$$

$$m_{z,2}(t) = \frac{1}{n_s - 1} \sum_{i=1}^{n_s} [z_i(t) - \mu_z(t)]^2 \quad (\text{A2})$$

$$m_{z,3}(t) = \frac{1}{n_s - 1} \sum_{i=1}^{n_s} [z_i(t) - \mu_z(t)]^3 \quad (\text{A3})$$

$$m_{z,4}(t) = \frac{1}{n_s - 1} \sum_{i=1}^{n_s} [z_i(t) - \mu_z(t)]^4 \quad (\text{A4})$$

$$sw_z(t) = \frac{m_{z,3}(t)}{\sqrt{m_{z,2}^3(t)}} \quad (\text{A5})$$

$$ks_z(t) = \frac{m_{z,4}(t)}{m_{z,2}^2(t)} \quad (\text{A6})$$

式中,  $n_s$  为时程样本数目;  $z_i(t)$  为第  $i$  条时程样本。