

风与轨道不平顺随机激励下车辆-轨道系统 耦合振动的概率密度演化分析

周智辉, 段 湘, 何旭辉, 蔡陈之, 唐成龙

(中南大学土木工程学院, 湖南长沙 410075)

摘要: 依据车辆-轨道耦合动力学及概率密度演化理论, 建立了考虑横风和轨道不平顺双重随机因素作用的车辆-轨道系统耦合振动模型。采用 N 维超立方体点集生成离散随机频率和相位代表点集, 基于随机谐和函数方法和谐波叠加法分别模拟得到随机轨道不平顺激励样本和风速时程样本, 并将所获得的双重随机荷载引入车辆-轨道耦合振动系统中求得代表性响应; 采用双边差分法求解所建立的代表性响应的概率密度演化方程, 获得振动响应的时变概率密度演化分布, 并采用蒙特卡罗法 (MCM) 验证本文模型的计算效率和精度。研究结果表明: 概率密度演化方法 (PDEM) 适用于横风和轨道不平顺双重随机激励作用下的车辆-轨道系统随机分析, 且对于本文模型, 当代表性样本点数为 300, 筛选半径取 17.7 时能够达到良好的计算效果; 仅在单重随机荷载作用下进行随机响应分析不能准确反映车辆-轨道系统的随机动力特性, 论证了开展双重随机激励作用下车辆-轨道系统随机分析的必要性。

关键词: 车辆-轨道耦合系统; 概率密度演化理论; 筛选半径; 横风; 轨道不平顺

中图分类号: U441 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.202309019

Probability density evolution analysis of coupled vibration of vehicle-track system under random excitation of wind and track irregularity

ZHOU Zhihui, DUAN Xiang, HE Xuhui, CAI Chenzhi, TANG Chenglong

(School of Civil Engineering, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: Based on the train-track coupling dynamics and probability density evolution theory, a random vibration model of train-track system considering both the crosswind and track irregularity is established. The N -dimensional hypercube point set is used to generate the discrete random frequency and phase representative point set. Based on the random harmonic function method and the harmonic superposition method, the random track irregularity excitation samples and the wind speed time-history samples are simulated respectively. The obtained two random excitations are introduced into the train-track coupling system to obtain the representative responses. The probability density evolution equation of representative response is solved using the bilateral difference method to obtain the time-varying probability density evolution distribution of the vibration response. The Monte Carlo method (MCM) is employed to verify the computational efficiency and accuracy of the proposed model. The results indicate that the probability density evolution method (PDEM) is applicable to the random analysis of vehicle-track system under double random excitations including crosswind and track irregularity. When the number of representative sample points is 300 and the screening radius is 17.7, a good calculation results can be obtained by the proposed model in this paper. The random response analysis regarding a single random input cannot express an accurate result of the vehicle-track system's random dynamic characteristic, which indicates the required consideration of both random excitations of crosswind and track irregularity in the random vibration analysis of vehicle-track system.

Keywords: vehicle-track coupling system; probability density evolution theory; screening radius; crosswind; track irregularity

列车在运行过程中会受到多种因素的影响, 极端运营环境会威胁列车的运行安全性。风荷载是影响列车运行安全的重要因素^[1-3], 国内外因为风荷载

而发生的列车脱轨事故时有发生, 由于风荷载具有随机特征, 开展风荷载作用下的列车-轨道系统随机振动分析具有重要意义。

收稿日期: 2023-09-06; **修订日期:** 2023-11-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (52378546); 湖南省自然科学基金资助项目 (2023JJ30665); 中国中铁股份有限公司科技研究开发计划项目 (2022-重点-07)

目前,风荷载作用下的列车-轨道(桥梁)系统动力学研究成果颇丰。WETZEL等^[4]将阵风持续时间和气动力系数作为随机因素探究横风作用对列车动力响应的影响。刘章军等^[5]与刘芸等^[6]先后改进了模拟脉动风速时程平稳随机过程功率谱密度矩阵的本征正交分解方法和谱表示方法,实现了脉动风随机过程模拟的降维处理,为结合概率密度演化理论进行复杂工程结构的抗风可靠度精细化分析奠定了坚实基础。李永乐等^[7]基于ANSYS和MATLAB仿真建立列车-桥梁空间振动耦合模型,采用MCM探究了随机风荷载和车流荷载对大跨度悬索桥加劲梁的影响。然而,具有随机特性的轨道不平顺也是列车-轨道耦合系统的主要激励源^[8-9],上述研究鲜有考虑轨道不平顺的随机性对风-车-轨系统的影响,仅考虑了横风作用的随机性,对随机风荷载和随机轨道不平顺联合作用(称为双重随机作用)下的车辆-轨道系统耦合振动的研究相对较少。

针对双重随机问题,一些学者采用虚拟激励法分析双重随机激励作用下的车-桥系统随机振动特性^[10],但对轮轨接触关系的处理采用轮轨密贴模型,未考虑列车车轮跳轨现象,对车-桥耦合振动响应的分析仅适用于线性系统,无法对非线性系统进行求解。文献[11-12]提出的概率密度演化方法为非线性结构的随机动力分析提供了一种途径,成功地将广义概率密度演化方法运用于建筑结构、机械零件等非线性结构动力响应随机分析与可靠度分析中^[13-15]。余志武等^[16-17]在轨道不平顺和结构参数双重随机因素下的列车-桥梁系统响应方面做了很多工作,论证了应用概率密度演化理论分析多重随机因素的可行性。

为考虑横风和轨道不平顺双重随机因素联合作用,本文将概率密度演化理论与车辆-轨道耦合动力学相结合,采用非线性轮轨接触关系,建立车辆-轨道系统非线性随机分析模型。探究计算参数筛选半径与代表性样本点数对概率密度演化方法(PDEM)计算精度与效率的影响,确定合理的筛选半径和代表性样本点数;通过与MCM方法对比,分析本文所建模型的计算精度与效率;对比分析单重与双重随机激励作用下的车辆-轨道系统随机响应,验证进行双重随机因素分析的必要性。

1 基本流程

本文开展横风与轨道不平顺联合作用下的车

辆-轨道系统随机振动分析,轨道不平顺与横风是车辆-轨道系统振动的随机输入。根据概率密度演化理论,需要先获得模拟随机输入的随机参数的代表性样本点,生成代表性的随机激励样本;然后依次输入代表性随机样本求解车辆-轨道系统确定性动力方程得到代表性响应;根据得到的代表性样本响应建立PDEM方程并求解,最终获得特定响应的概率密度分布值,及其均值和标准差等随机特征,计算流程如图1所示。

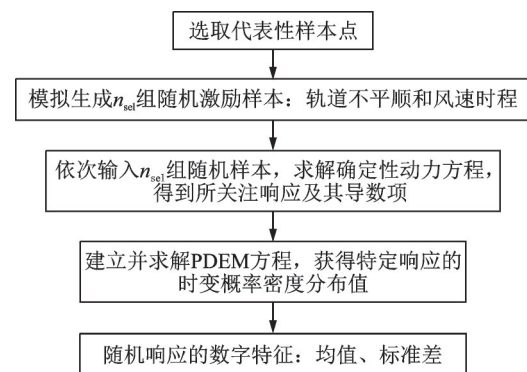


图1 计算流程图

Fig. 1 Computational flow diagram

2 模拟车辆-轨道系统振动输入的代表性样本

2.1 选取代表性样本点

采用 N 维超立方体点集(gp集)选点法^[18]选取代表性样本点,主要步骤如下:

(1) 从素数3起,依次获取连续的 s 个素数序列 p_1, p_2, \dots, p_s ,其中 s 为点集维度,由模拟一组轨道随机不平顺与脉动风速时程所需的随机变量个数决定,根据所需随机变量个数,本文 s 取为3200。

(2) 由下式生成 n 个 s 维超立方体点:

$$\mathbf{X}_k = \left(\left\{ k\sqrt{p_1} \right\}, \left\{ k\sqrt{p_2} \right\}, \dots, \left\{ k\sqrt{p_s} \right\} \right);$$

$$k = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

式中, $\{\cdot\}$ 表示取括号中的小数部分; n 为点集总数。

(3) 对 n 个 s 维超立方体点进行筛选,得到满足下式要求的 n_{sel} 个 s 维超立方体点,记为 $\mathbf{X}_q = (x_{q,1}, x_{q,2}, \dots, x_{q,s})$, $q = 1, 2, \dots, n_{sel}$,称之为筛选后样本点:

$$\sum_{j=1}^s (x_{q,j} - 0.5)^2 \leq \left(\frac{r_0}{2} \right)^2; q = 1, 2, \dots, n_{sel} \quad (2)$$

式中, $x_{q,j}$ 表示 \mathbf{X}_q 中第 j 个元素; r_0 为筛选半径^[19],一

一般在 $[1, \sqrt{s}]$ 之间取值。

(4) 对筛选后样本点 $\mathbf{X}_q, q=1, 2, \dots, n_{\text{sel}}$ 进行各向同性伸缩变换可得到偏差较小的随机参数的代表性样本点 $\hat{\mathbf{X}}_q=(\hat{x}_{q,1}, \hat{x}_{q,2}, \dots, \hat{x}_{q,s}), q=1, 2, \dots, n_{\text{sel}}$,具体变换关系如下:

$$\hat{x}_{q,j}=g\left(\|\mathbf{X}_q\|\right)x_{q,j};$$

$$q=1, 2, \dots, n_{\text{sel}}; j=1, 2, \dots, s \quad (3)$$

式中, $g(\cdot)$ 为各向同性伸缩变换函数, $g(r)=(1-\beta)r^m/\rho^m+\beta, \rho=r_0/2$,参考文献[20]取 $m=6, \beta=0.6$ 。

2.2 模拟轨道不平顺的代表性样本

采用随机谐和函数法^[20]模拟轨道不平顺,引入随机谐和函数:

$$Y_N(t)=\sum_{i=1}^N A(\omega_i)\cos(\omega_i t+\theta_i) \quad (4)$$

式中, N 为谐和分量的个数,采用文献[21]中的建议值取 $N=150$; $A(\omega_i), \omega_i$ 和 $\theta_i (i=1, 2, \dots, N)$ 分别为第 i 个谐和分量的幅值、圆频率和相位角。轨道不平顺圆频率 ω_i 与空间频率 Ω_i 的关系为 $\omega_i=\Omega_i v=2\pi v/\lambda_i$,其中, λ_i 为不平顺波长,其范围为 $1\sim 120$ m, v 为车辆运行速度。

$\Omega_i^{(p)} (i=1, 2, \dots, N+1)$ 为 $[\Omega_l, \Omega_u]$ 内等间距均匀分布的点, $\Omega_i^{(p)}=\Omega_l+(i-1)\Delta\Omega, \Delta\Omega=(\Omega_u-\Omega_l)/N$,其中, Ω_u 和 Ω_l 分别为上、下限截止频率。 Ω_i 和 θ_i 分别为满足 $(\Omega_i^{(p)}, \Omega_{i+1}^{(p)})$ 及 $(0, 2\pi]$ 内均匀分布的相互独立随机变量,可由数论选点法生成的代表性样本点按下式生成:

$$\begin{cases} (\Omega_i)^{-1}=(\Omega_i^{(p)})^{-1}+\left[(\Omega_{i+1}^{(p)})^{-1}-(\Omega_i^{(p)})^{-1}\right]\hat{x}_i; \\ \theta_i=2\pi\hat{x}_{i+N} \end{cases}$$

$$i=1, 2, 3, \dots, N \quad (5)$$

式中, \hat{x}_i 为数论选点法生成的代表性样本点。单条轨道不平顺的模拟所需代表性样本点 \hat{x} 数目为 $2N=300$,模拟轨道高低、方向、水平、轨距4条不平顺样本所需代表性样本点数目为1200。

$A(\omega_i)$ 为随机变量 ω_i 的函数,按下式计算:

$$A(\omega_i)=\sqrt{\frac{2S_V(\omega_i)\Delta\omega_i}{\pi}} \quad (6)$$

式中, $S_V(\omega_i)$ 为轨道不平顺功率谱函数; $\Delta\omega_i=\omega_{i+1}^{(p)}-\omega_i^{(p)}$ 。

将式(5)与(6)代入式(4)即可得轨道高低、轨向、水平、轨距不平顺激励样本:

$$\begin{cases} z(t)=\sum_{i=1}^N \sqrt{\frac{2S_V(\Omega_i^z)\Delta\Omega_i^z}{\pi}} \cos(\Omega_i^z vt+\theta_i^z) \\ y(t)=\sum_{i=1}^N \sqrt{\frac{2S_a(\Omega_i^y)\Delta\Omega_i^y}{\pi}} \cos(\Omega_i^y vt+\theta_i^y) \\ \theta(t)=\sum_{i=1}^N \sqrt{\frac{2S_c(\Omega_i^\theta)\Delta\Omega_i^\theta}{\pi}} \cos(\Omega_i^\theta vt+\theta_i^\theta) \\ v(t)=\sum_{i=1}^N \sqrt{\frac{2S_g(\Omega_i^v)\Delta\Omega_i^v}{\pi}} \cos(\Omega_i^v vt+\theta_i^v) \end{cases} \quad (7)$$

本文采用德国轨道谱, S_V, S_a, S_c, S_g 分别为轨道高低、轨向、水平和轨距不平顺功率谱密度函数。

2.3 模拟风速时程的代表性样本

脉动风具有时变动态特征和随机性,可以视为各态历经的平稳高斯随机过程。本文仅考虑横向的脉动风速时程,采用谐波叠加法模拟作用于车体中心的随机过程样本,脉动风速功率谱采用Davenport谱,脉动风横向风速时程可表示为:

$$v_h(t)=\sqrt{2\Delta\omega} \sum_{i=1}^{N_0} |H(\omega_i)| \cos(\omega_i t+\theta_i) \quad (8)$$

式中, $\Delta\omega$ 为频率间隔, $\Delta\omega=(\omega_u-\omega_l)/N_0$,其中 $\omega_u=6$ rad/s和 $\omega_l=0.001$ rad/s分别为上、下限截止频率; N_0 为频率分割点数,取 $N_0=1000$; $H(\omega_i)$ 为脉动风速功率谱函数 $S_u(\omega_i)$ 的Cholesky分解,即 $S_u(\omega_i)=H(\omega_i)H^*(\omega_i)$; θ_i 为满足 $(0, 2\pi]$ 上均匀分布的相互独立随机变量, ω_i 为满足 $(\omega_i^{(p)}, \omega_{i+1}^{(p)})$ 上均匀分布的相互独立随机变量,可由数论选点法生成的代表性样本点按下式生成:

$$\begin{cases} \omega_i=\omega_i^{(p)}+\left[\omega_{i+1}^{(p)}-\omega_i^{(p)}\right]\hat{x}_i \\ \theta_i=2\pi\hat{x}_{i+N} \end{cases} \quad (9)$$

式中, $\omega_i^{(p)} (i=1, 2, \dots, N_0+1)$ 为 $[\omega_l, \omega_u]$ 内等间距均匀分布的点, $\omega_i^{(p)}=\omega_l+(i-1)\Delta\omega$,其中 $\Delta\omega=(\omega_u-\omega_l)/N_0$ 。脉动风的模拟所需代表性样本点 \hat{x} 数目为 $2N_0=2000$ 个,结合4条轨道不平顺的模拟,因此在样本点生成时样本维度 s 为3200。

2.4 轮轨力及横风力计算

考虑轮对与钢轨相互脱离的轮轨接触模型,基于Hertz接触理论计算轮轨接触法向力,基于Kalker蠕滑理论计算轮轨接触切向力,后根据Shen-Hedrick-Elkins理论进行非线性修正。

作用在车体中心的横风作用力包括平均风力和抖振风力^[22],具体如下:

$$\begin{cases} F_y^{st} = 0.5\rho A U_R^2 C_y \\ F_z^{st} = 0.5\rho A U_R^2 C_z \\ M_x^{st} = 0.5\rho A H U_R^2 C_{m_x} \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} F_y^{wind} = F_y^{st} + F_y^d \\ F_z^{wind} = F_z^{st} + F_z^d \\ M_x^{wind} = M_x^{st} + M_x^d \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} F_y^d = \rho A \bar{U}(z) v_h(t) C_y \\ F_z^d = \rho A \bar{U}(z) v_h(t) C_z \\ M_x^d = \rho A H \bar{U}(z) v_h(t) C_{m_x} \end{cases} \quad (11)$$

式中, ρ 为空气密度, 取为 1.225 kg/m^3 ; A 为车体受风面积; H 为车厢高度; $\bar{U}(z)$ 为距地面高度 z 处的平均风速, 本文不考虑平均风速随高度的变化, $\bar{U}(z)$ 取距地面 10 m 高度处的平均风速; C_y 、 C_z 和 C_{m_x} 为气动力系数, 参考文献[23]取 $C_y = 1.0072$, $C_z = -1.2074$, $C_{m_x} = -0.1103$ 。

U_R 为考虑平均风速和车辆运行速度的合成风速, 可表示为:

$$U_R = \sqrt{\bar{U}(z)^2 + v^2 - 2\bar{U}(z)v \cos(\pi - \alpha)} \quad (12)$$

式中, α 为风向角, $\alpha = 90^\circ$ 。

将平均风力和抖振风力转化为作用于车体的横移、沉浮和侧滚自由度上所受的风力, 故而车体所受总的风力为:

3 求解车辆-轨道系统的代表性响应

3.1 车辆-轨道模型

本文采用四轴客车车辆多刚体模型, 通过弹簧和阻尼模拟车体-转向架组成的二系悬挂系统和转向架-轮对组成的一系悬挂系统, 并且假设车辆运行过程中速度不变, 忽略车辆沿前进方向的纵向振动。车体考虑横移、沉浮、侧滚、点头、摇头5个自由度, 前、后转向架及轮对考虑横移、沉浮、侧滚、摇头4个自由度, 共29个自由度。车辆模型参数参照文献[1], 建立的车辆动力学模型如图2所示。图2中, Y 、 Z 、 θ_x 、 θ_y 、 θ_z 分别表示车体、转向架、轮对的横移、沉浮、侧滚、点头、摇头, 其下标“t”、“g”和“s”分别表示车体、转向架和轮对; K_x 、 K_y 、 K_z 和 C_x 、 C_y 、 C_z 分别表示纵向、横向、垂向刚度和阻尼, 其下标“d”和“u”分别表示一系和二系悬挂系统。

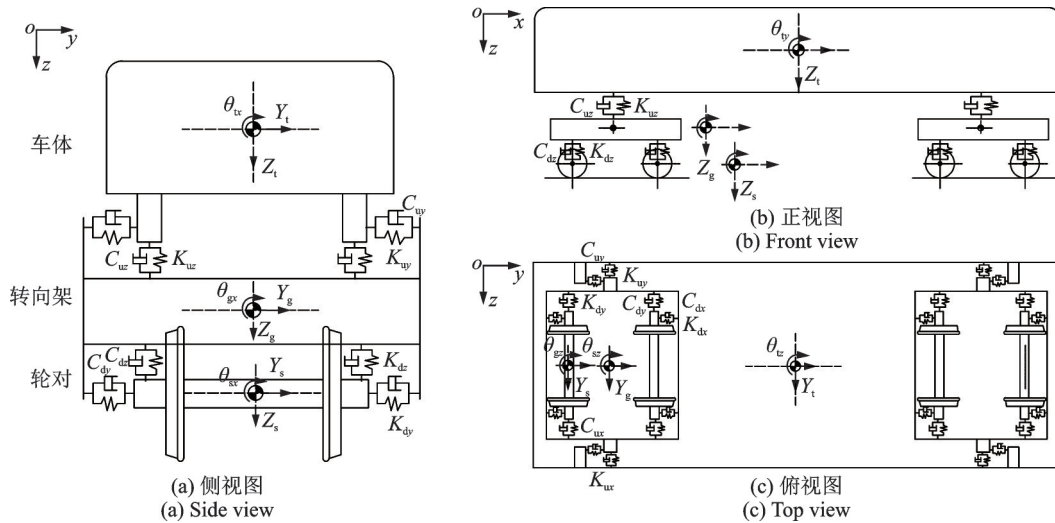


图2 车辆模型示意图

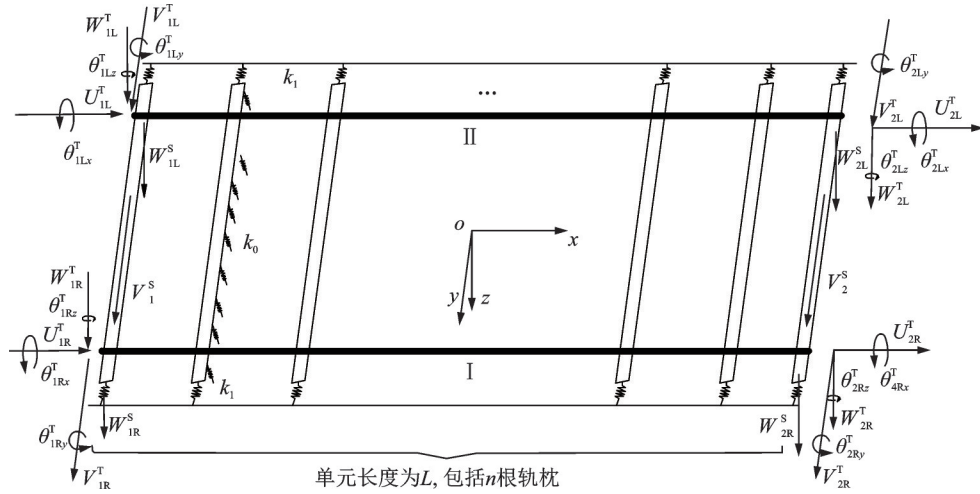
Fig. 2 Schematic diagram of vehicle model

建立总计30个自由度的有砟轨道空间模型^[24], 将钢轨视为伯努利-欧拉空间梁单元, 轨枕视为搁置在道床上的弹性变形体且忽略其轴向变形和扭转变形, 轨枕长2.5 m, 轨枕间距0.5345 m。钢轨和轨枕之间的连接以及轨枕和道床之间的连接通过线性弹簧和阻尼模拟, 建立的有砟轨道模型如图3所示。图3中, U 、 V 、 W 分别表示钢轨或轨枕沿 X 、 Y 、 Z 轴正方向的线位移, θ_x 、 θ_y 、 θ_z 分别表示钢轨绕 X 、 Y 、 Z 轴正方向的转角位移, 其上标“T”和“S”分别表示钢轨和轨枕, 下标“1”和“2”分别表示钢轨与轨枕组成

的轨道单元的左节点和右节点, 下标“L”和“R”分别表示左钢轨和右钢轨; V^s 表示轨枕的横向位移; W_L^s 和 W_R^s 分别表示轨枕左、右两端与钢轨连接位置的竖向位移; k_0 和 k_1 分别表示两根钢轨之间和轨枕外伸部分道床的竖向刚度。

3.2 车辆-轨道系统振动方程

基于车辆-轨道耦合动力学理论^[25], 通过轮轨空间动态耦合模型^[26], 可以在轮-轨相互作用力中考虑轨道随机不平顺的附加位移和速度, 建立横风作用



单元长度为L,包括n根轨枕

图 3 轨道空间模型示意图

Fig. 3 Schematic diagram of spacial track model

下车辆-轨道系统振动方程为:

$$\begin{bmatrix} M_{vv} & 0 \\ 0 & M_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X}_v \\ \ddot{X}_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{vv} & C_{vg} \\ C_{gv} & C_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_v \\ \dot{X}_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{vv} & K_{vg} \\ K_{vg} & K_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_v \\ X_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_v(\theta, t) \\ P_g(\theta, t) \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中, M_{vv} 、 C_{vv} 和 K_{vv} 分别为车辆结构的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵; M_{gg} 、 C_{gg} 和 K_{gg} 分别为轨道结构的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵; C_{gv} 和 C_{vg} 为车辆-轨道耦合部分阻尼矩阵; K_{gv} 和 K_{vg} 为车辆-轨道耦合部分刚度矩阵; \ddot{X}_v 、 \dot{X}_v 和 X_v 分别为车辆结构的加速度、速度和位移向量; \ddot{X}_g 、 \dot{X}_g 和 X_g 分别为轨道结构的加速度、速度和位移向量; $P_v(\theta, t)$ 和 $P_g(\theta, t)$ 分别表示车辆和轨道结构的荷载向量,包含了横风随机激励与轨道不平顺随机激励的直接影响,车辆的荷载向量应包括车体所受的横风作用力、车辆重力以及轮轨相互作用力,轨道的荷载向量仅包括轮轨相互作用力。

3.3 求解代表性响应

采用 Newmark- β 法依次求解给定随机样本下的车辆-轨道系统振动方程,得到各样本作用下的车辆-轨道系统振动响应 $Z(t)$ 及其导数项 $\dot{Z}(t)$,为概率密度演化方程的数值求解提供必要条件。

4 求解响应的随机概率特征

4.1 列出广义概率密度演化方程

LI 等^[20]基于概率守恒原理的随机事件描述,同时考察系统物理参数和激励随机性的动力系统得到了广义概率密度演化方程。假设车辆-轨道系统只

有轨道不平顺和风荷载双重随机激励源,中间没有新的随机源产生,则系统满足概率守恒条件,建立的广义概率密度演化方程为:

$$\frac{\partial p_{z\theta}(z, \theta, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \dot{Z}_i(\theta, t) \frac{\partial p_{z\theta}(z, \theta, t)}{\partial z_i} = 0 \quad (15)$$

当关注的响应量 $m = 1$ 时,概率密度演化方程转化为:

$$\frac{\partial p_{z\theta}(z, \theta, t)}{\partial t} + \dot{Z}(\theta, t) \frac{\partial p_{z\theta}(z, \theta, t)}{\partial z} = 0 \quad (16)$$

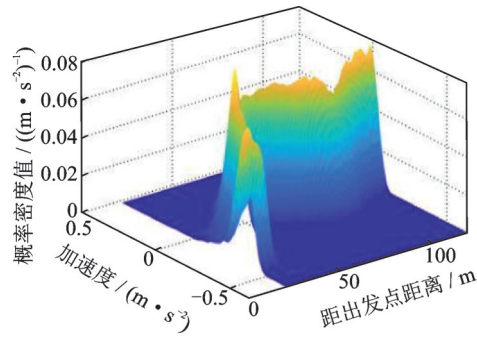
式中, $\dot{Z}(\theta, t)$ 为求解车辆-轨道振动方程得到的特定响应关于时间的导数项; θ 为随机变量样本空间; θ 为随机变量代表性样本点集。

4.2 求解演化方程

考虑边界条件 $p_{z\theta}(z, \theta, t)|_{z \rightarrow \pm\infty} = 0$, 每组样本的初始赋得概率^[21]为 $P_q = 1/n_{sel}$, 采用 TVD 格式的双边差分法^[20]求解一维偏微分方程得到联合概率密度函数 $p_{z\theta}(z, \theta, t)$; 使用 TVD 格式的双边差分法求解方程时,定义 λ 为网格划分时的时间步长和空间步长之比,即 $\lambda = \Delta t / \Delta z$, 须满足 CFL 稳定性条件 $|\lambda \dot{Z}(k\Delta t)| \leq 1, k = 0, 1, 2, \dots$ 。对样本空间上的 $p_{z\theta}(z, \theta, t)$ 累加求和得到车辆-轨道系统所关注响应 $Z(t)$ 的概率密度分布值为:

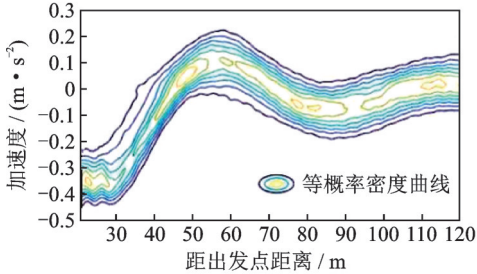
$$p(z, t) = \int p_{z\theta}(z, \theta, t) d\theta \quad (17)$$

根据式(17)可做出系统响应的概率密度曲线,若车辆运行速度为 250 km/h,平均风速为 10 m/s,积分时间步长为 5.0×10^{-5} s,代表性样本组数为 300 组,可得到车体横向加速度响应的概率密度演化图如图 4 所示。可见,采用本文所提方法能够获得车辆-轨道系统随机振动响应的概率密度分布信息。



(a) 三维概率密度演化图

(a) Three-dimensional probability density evolution diagram



(b) 等概率密度曲线图

(b) Equal probability density curve diagram

图4 车体横向加速度响应概率密度演化图

Fig. 4 Probability density evolution diagram of lateral acceleration response of vehicle body

4.3 随机响应的数字特征(均值、标准差)

由于本文研究的随机变量为离散型,响应均值和标准差分别为:

$$u(t) = \sum_i z_i p(z_i, t) \quad (18)$$

$$\sigma(t) = \sqrt{\sum_i z_i^2 p(z_i, t) - \left(\sum_i z_i p(z_i, t)\right)^2} \quad (19)$$

表1 不同样本量下动力响应均值、标准差的最大值

Tab. 1 The maximum value of mean and standard deviation of dynamic response for different sample sizes

动力响应		样本量(MCM)				
		500组	1000组	2000组	3000组	4000组
车体横向位移/m	均值	1.845×10^{-2}	1.744×10^{-2}	1.708×10^{-2}	1.694×10^{-2}	1.697×10^{-2}
	标准差	2.612×10^{-2}	2.643×10^{-2}	2.623×10^{-2}	2.619×10^{-2}	2.608×10^{-2}
车体竖向位移/m	均值	6.390×10^{-3}	6.299×10^{-3}	6.174×10^{-3}	6.113×10^{-3}	6.081×10^{-3}
	标准差	1.489×10^{-2}	1.520×10^{-2}	1.518×10^{-2}	1.520×10^{-2}	1.516×10^{-2}
车体横向加速度/($m \cdot s^{-2}$)	均值	0.159	0.150	0.148	0.147	0.146
	标准差	0.409	0.419	0.417	0.418	0.417
车体竖向加速度/($m \cdot s^{-2}$)	均值	0.120	0.115	0.112	0.109	0.109
	标准差	0.298	0.305	0.306	0.306	0.306
右轨中间节点处横向位移/m	均值	1.532×10^{-5}	1.577×10^{-5}	1.521×10^{-5}	1.533×10^{-5}	1.525×10^{-5}
	标准差	2.188×10^{-5}	2.145×10^{-5}	2.121×10^{-5}	2.123×10^{-5}	2.114×10^{-5}
右轨中间节点处横向加速度/($m \cdot s^{-2}$)	均值	0.076	0.065	0.069	0.067	0.067
	标准差	0.962	0.949	0.947	0.949	0.942
第一轮对右轮横向力/kN	均值	5.445	5.405	5.515	5.512	5.505
	标准差	4.090	3.945	3.902	3.900	3.883
第一轮对右轮竖向力/kN	均值	80.301	78.322	77.011	76.871	76.391
	标准差	21.367	19.899	19.011	18.893	18.757

5 数值分析

5.1 由MCM确定响应均值和标准差的近似准确值

选取满足一定精度的MCM随机分析响应结果作为基准值,以论证基于概率密度演化法的车辆-轨道系统随机振动分析模型的准确性。MCM的精度与样本量成正相关,首先需要确定满足精度要求的MCM的计算样本量。4条轨道随机不平顺激励与1条脉动风速时程构成一个样本组,将其作为车辆-轨道系统的输入,分别随机选取500、1000、2000、3000、4000个样本组,计算每组样本下的车辆-轨道系统动力响应。在此模拟中,车辆左侧为迎风侧,车辆运行速度为250 km/h,平均风速为15 m/s,积分时间步长为 5.0×10^{-5} s。针对不同的样本量,统计出车-轨系统各响应均值和标准差的最大值,如表1所示。

由表1可得,随着MCM样本量的增加,车辆和轨道的响应均值和标准差的最大值逐渐趋近于MCM 4000组样本均值和标准差的最大值。样本量依次由500组至1000组、1000组至2000组,2000组至3000组、3000组至4000组递增时,各响应均值的最大变化率分别为14.90%、6.14%、2.52%、0.69%,标准差的最大变化率分别为6.87%、4.46%、0.62%、0.43%。可以看出,随着样本量从500组递增至4000组,车辆与轨道响应均值和标准差的变化逐渐减小,当由3000组增长到4000组时,其变化率已低于1%,故可将MCM 4000个样本组对应的响应均值、标准差定为近似准确值。

5.2 计算参数选取及精度与效率分析

5.2.1 代表性样本点数随筛选半径的变化规律

对于概率密度演化方法,代表性样本点的数量与质量是影响计算精度和效率的直接因素,而筛选半径 r_0 及点集总数 n 的大小决定着筛选出代表性样本点的数量和质量。目前,筛选半径的选取主要依靠经验确定,对于样本高维度下筛选半径的选取鲜有研究,为探究本文中样本维度 $s=3200$ 时筛选半径 r_0 对数论选点法筛点的影响,本节给出不同点集总数 n 情况下代表性样本点数量 n_{sel} 随筛选半径 r_0 的变化规律,如图 5 所示。

由图 5 可知, r_0 对代表性样本点数量有较大影响,以 17.2 为分界点,当筛选半径小于 17.2 时,所筛选出的代表性样本点接近于 0,筛选率接近于 0,难以筛选到合适的代表性样本点数;而筛选半径大于 17.2 时,随着筛选半径增大,代表性样本组数不断增大并呈现指数型增长趋势;由此可以判断出筛选半径 r_0 应在大于 17.2 的范围内进行取值。

5.2.2 代表性样本点数选取

筛选半径与代表性样本点数是影响 PDEM 法计算精度与效率的重要因素,筛选半径一定的情况下,代表性样本数量越多,所得到的结果精度越高,

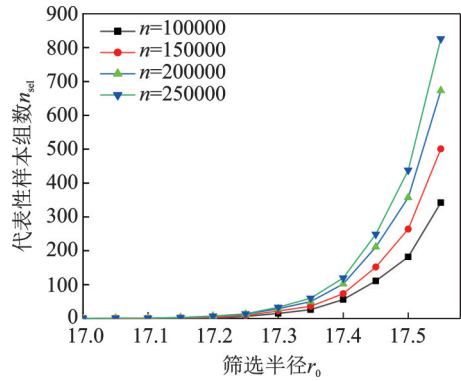
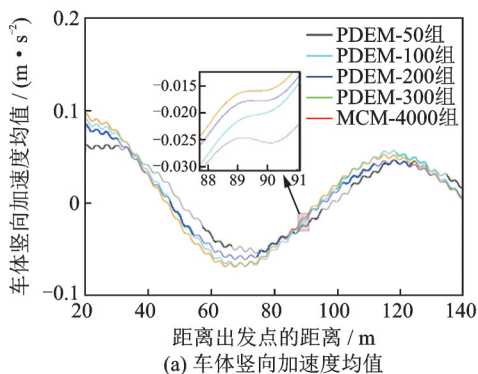


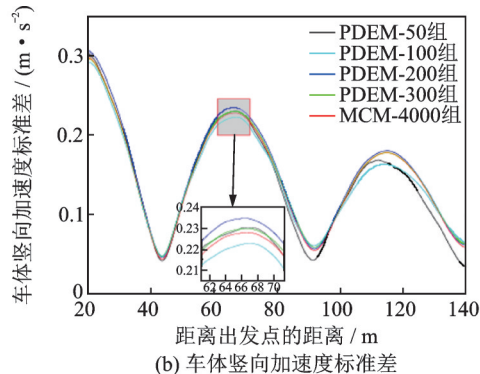
图 5 代表性样本点数 n_{sel} 随筛选半径 r_0 的变化

Fig. 5 The number of representative sample points n_{sel} versus the screening radius r_0

但随之计算效率也会降低,因此需要兼顾计算精度与效率,选择合适的筛选半径与代表性样本点数。首先为探究代表性样本点数 n_{sel} 对计算精度的影响,本节设置车辆运行速度为 250 km/h,平均风速为 15 m/s,筛选半径 $r_0=18.0$,分别选取代表性样本点数 $n_{sel}=50, 100, 200, 300$ 组,运用 PDEM 法计算车辆-轨道系统响应的均值和标准差,并与 MCM 均值与标准差的近似准确值进行对比分析,以车体竖向加速度和右轨横向位移的计算结果作为示例,对比结果如图 6 和 7 所示。考虑车辆运行初期为不稳



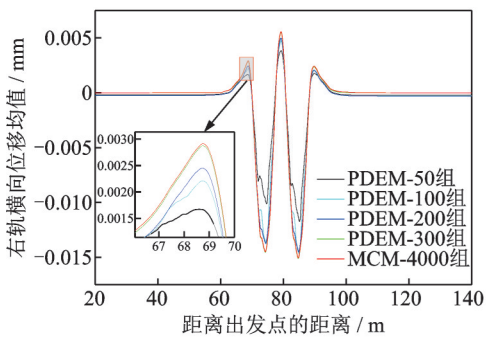
(a) Mean of vertical acceleration of vehicle body



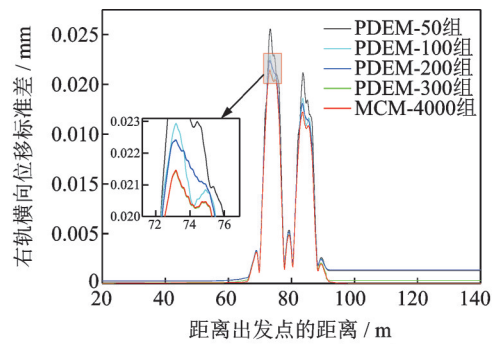
(b) Standard deviation of vertical acceleration of vehicle body

图 6 车体竖向加速度均值、标准差对比

Fig. 6 Comparison of mean and standard deviation of vertical acceleration of vehicle body



(a) Mean of lateral displacement of right rail



(b) Standard deviation of lateral displacement of right rail

图 7 右轨横向位移均值、标准差对比

Fig. 7 Comparison of mean and standard deviation of lateral displacement of right rail

定阶段,本文均截取距车辆初始停放位置 20 m 以后的响应时程进行分析。

从图 6 和 7 中可以看出,随着 PDEM 法样本组数增大,响应均值与标准差的相对误差逐渐减小,逐渐趋近于 MCM 法的近似准确值。当代表性样本组数为 300 组时,PDEM 法得到的结果与 MCM 的计算结果基本吻合,车辆车体竖向加速度的均值和标准差最大值的相对误差分别为 1.42% 和 4.59% (如图 6 所示),右轨跨中节点横向位移的均值和标准差最大值的相对误差分别为 1.98% 和 2.23% (如图 7 所示),均小于 5%。由此可见,运用概率密度演化方法分析双重随机因素下的车辆-轨道系统耦合振动具有很高的精度,且当 $r_0=18.0$,代表性样本组数增长到 300 组时能够达到误差在 5% 内的精度要求。

5.2.3 筛选半径选取

为继续探究筛选半径 r_0 对计算精度的影响,本节在上节分析的基础上选定代表性样本点数量 n_{sel} 为 300 组,计算不同 r_0 下的 PDEM 法响应结果并与 MCM 法近似准确值进行对比,不同 r_0 下的动力响应标准差最大值与其近似准确值的相对误差如表 2 所示。

从表 2 中可以看出,在 n_{sel} 取 300 的条件下,筛选半径在 17.4~18.0 范围内得到的响应标准差相对误差均小于 5%,且随着筛选半径的增大,各响应标准差的相对误差整体呈现先减小后增大趋势,当 r_0 取 17.7 时,各响应标准差的相对误差最小,相对误差最大值为 0.90%,可认为此时 PDEM 法计算精度达到要求,计算效果最佳,故本文选定 $n_{sel}=300, r_0=17.7$ 作为概率密度演化方法的计算参数。

表 2 不同筛选半径下动力响应标准差最大值的相对误差

Tab. 2 Relative error of maximum standard deviation of dynamic response for different screening radius

动力响应标准差最大值的相对误差	筛选半径 r_0						
	17.4	17.5	17.6	17.7	17.8	17.9	18.0
车体横向位移/m	3.24%	4.06%	1.29%	0.81%	1.31%	2.45%	4.32%
车体竖向位移/m	0.50%	0.98%	2.28%	0.66%	2.30%	2.78%	3.47%
车体横向加速度/($m \cdot s^{-2}$)	3.57%	3.80%	1.28%	0.90%	1.42%	3.43%	3.42%
车体竖向加速度/($m \cdot s^{-2}$)	2.51%	2.63%	0.47%	0.31%	1.19%	2.01%	4.59%
右轨中间节点处横向位移/m	1.10%	4.95%	2.43%	0.73%	0.32%	1.14%	2.23%
右轨中间节点处横向加速度/($m \cdot s^{-2}$)	2.41%	3.57%	1.65%	0.71%	1.14%	2.46%	2.98%
第一轮对右轮横向力/kN	1.09%	2.49%	0.74%	0.19%	0.73%	1.79%	3.21%
第一轮对右轮竖向力/kN	2.74%	3.45%	1.18%	0.42%	1.41%	1.98%	3.76%

5.2.4 精度与计算效率分析

由表 1 可知,以 MCM 法得出的近似准确值为基准,当 MCM 法计算样本量为 3000 组时,响应的最大相对误差为 0.84%,接近于 1%;而当 PDEM 法计算代表性样本点数为 300,筛选半径 r_0 为 17.7 时,响应的最大相对误差也接近于 1%。因此,可以近似认为当代表样本点数为 300,筛选半径 r_0 为 17.7 时,基于 PDEM 法计算的随机振动响应与 3000 个样本组的 MCM 法计算结果的精度基本相同。同时,上述计算在两台主频为 2.90 GHz,内存为 16 GB 的计算机上完成,PDEM 与 MCM 每条样本计算所耗平均时间均约为 9.13 min。在相同的精度条件下,PDEM 计算需 300 组样本,而 MCM 计算需 3000 组样本,PDEM 计算效率显著高于 MCM,约为 10 倍左右,验证了概率密度演化方法应用于横风和轨道不平顺双重随机激励作用下的车辆-轨道系统随机分析的高精度及高效性。

5.3 单重与双重随机因素对比分析

利用建立的车辆-轨道耦合动力学模型,结合概

率密度演化理论对单重轨道不平顺随机因素、单重风荷载随机因素以及轨道不平顺和风荷载双重随机因素下的车辆-轨道系统耦合振动响应进行对比分析,考虑轨道不平顺随机因素时,将风荷载视为确定性激励施加于车-轨系统,反之亦然。

为判断双重随机激励作用下的车辆-轨道系统耦合振动响应的分布情况,利用 SPSS 25.0 对双重随机激励作用下的车辆-轨道系统常见响应的分布情况进行正态性检验,得到车辆-轨道系统耦合振动响应服从正态分布。以 PDEM-300 组随机样本在距离出发点 70 m 处的车体横向位移为例对响应的正态性检验过程进行说明,做出车体横向位移分布直方图与正态曲线如图 8 所示。

从图 8 中可以看出,车体横向位移分布贴合于正态曲线。取标准显著性水平 $\alpha=0.05$,利用 SPSS 25.0 对车体横向位移响应进行夏皮洛-威尔克 (S-W) 正态性检验,得到显著性水平 P 值为 0.347,大于标准显著性水平 0.05,因而可判定此组响应服从正态分布。限于文章篇幅,其余响应时程的正态分布检验在此不作赘述。

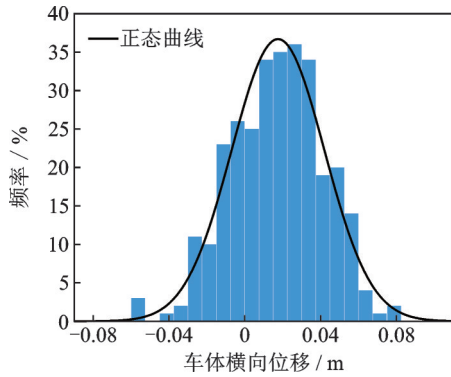


图 8 车体横向位移分布直方图

Fig. 8 Histogram of lateral displacement of vehicle body

由“三倍标准差”原则得到具有 99.75% 保证概率的系统最大响应时程为 $u_{\max}(t) = \max(u(t) + 3\sigma(t))$, 取该时程曲线的最大值作为具有 99.75% 保证概率的系统响应最大值, 即 $\bar{u}_{\max} = \max(u_{\max}(t))$ 。在单、双重激励作用下, 具有 99.75% 保证概率的系统响应最大值如表 3 所示。

表 3 单、双重随机因素下系统响应最大值

Tab. 3 The maximum value of dynamic responses for single and double random excitations

系统响应 最大值 \bar{u}_{\max}	随机风荷 载+随机轨 道不平顺	随机风荷 载+确定性 轨道不平顺	随机轨道不 平顺+确定 性风荷载
车体横向加速度/ ($\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$)	1.079	0.950	0.374
车体竖向加速度/ ($\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$)	0.993	0.907	0.306
车体横向位移/m	9.142×10^{-2}	8.295×10^{-2}	3.412×10^{-2}
第一轮对左轮 横向力/kN	9.117	6.619	8.153
第一轮对左轮 竖向力/kN	66.517	58.202	70.668

由表 3 可以看出, 对于车体横向加速度, 单重随机风荷载与双重随机激励的响应结果较为接近, 但轨道不平顺单重与双重随机因素的响应结果相差约 65%。而对于第一轮对左轮横向力, 单重随机轨道不平顺激励与双重随机激励的响应结果较为接近, 但单重随机风荷载与双重随机激励的响应结果相差近 30%。可见, 不同随机因素对于不同响应的影响程度并不相同, 轨道不平顺和风荷载作用的随机性都不可忽视, 也说明了进行横风和轨道不平顺双重随机激励作用下的车辆-轨道系统随机分析的必要性。

6 结 论

(1) 基于概率密度演化理论, 建立了横风与轨道不平顺联合作用下的车辆-轨道系统耦合振动模

型, 并对影响概率密度演化方法计算精度和效率的相关参数进行分析, 得到当代表性样本点数为 300, 筛选半径为 17.7 时可在保证计算效率的同时达到较高的计算精度。本文模型为列车脱轨随机分析提供了基础。

(2) 比较 MCM 与概率密度演化法两种方法的计算结果, 论证了应用概率密度演化方法分析横风与轨道不平顺联合作用下的车辆-轨道系统耦合振动具有很高的精度; 在同等精度条件下, 概率密度演化法的计算效率明显高于 MCM。

(3) 对比单重随机激励与双重随机激励作用的系统响应, 说明仅考虑单重随机激励难以反映系统响应的随机特征, 从而论证了开展横风和轨道不平顺双重随机激励作用下的车辆-轨道系统耦合振动分析是必要的。

参考文献:

- [1] 何旭辉, 邹云峰. 强风作用下高铁桥上行车安全分析理论与应用[M]. 长沙: 中南大学出版社, 2018.
HE Xuhui, ZOU Yunfeng. Running Safety Analysis of High-Speed Train-Bridge Systems Subjected to Strong Winds: Theory and Application[M]. Changsha: Central South University Press, 2018.
- [2] XIAO X B, LING L, XIONG J Y, et al. Study on the safety of operating high-speed railway vehicles subjected to crosswinds[J]. Journal of Zhejiang University SCIENCE A, 2014, 15(9): 694-710.
- [3] CARRARINI A. Reliability based analysis of the cross-wind stability of railway vehicles[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2007, 95(7): 493-509.
- [4] WETZEL C, PROPPE C. On reliability and sensitivity methods for vehicle systems under stochastic crosswind loads[J]. Vehicle System Dynamics, 2010, 48(1): 79-95.
- [5] 刘章军, 刘增辉. 随机风场模拟的连续本征正交分解-随机函数方法[J]. 振动与冲击, 2018, 37(7): 32-37.
LIU Zhangjun, LIU Zenghui. Simulation of a stochastic wind field based on a continuous proper orthogonal decomposition-random function approach[J]. Journal of Vibration and Shock, 2018, 37(7): 32-37.
- [6] 刘芸, 何承高, 刘章军. 各态历经随机风场的降维模拟[J]. 应用力学学报, 2020, 37(5): 2079-2085.
LIU Yun, HE Chenggao, LIU Zhangjun. Dimension-reduction simulation of ergodic random wind field[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2020, 37(5): 2079-2085.
- [7] 李永乐, 钱逸哲, 朱金, 等. 随机风、车流联合作用下大跨公路悬索桥纵向振动特性研究[J]. 中国公路学报, 2021, 34(4): 93-104.
LI Yongle, QIAN Yizhe, ZHU Jin, et al. Longitudinal vibration characteristics of a long-span highway suspension bridge under stochastic wind and traffic loads[J].

- China Journal of Highway and Transport, 2021, 34(4): 93-104.
- [8] YU Z W, MAO J F, GUO F Q, et al. Non-stationary random vibration analysis of a 3D train-bridge system using the probability density evolution method[J]. Journal of Sound and Vibration, 2016, 366: 173-189.
- [9] 朱志辉, 王凡, 罗思慧, 等. 随机轮轨力作用下基于 2.5 维离散支撑模型的轨道垂向振动分析[J]. 铁道学报, 2021, 43(6): 104-111.
ZHU Zhihui, WANG Fan, LUO Sihui, et al. Analysis on vertical random vibration of 2.5D discrete support track model under wheel-rail force effect[J]. Journal of the China Railway Society, 2021, 43(6): 104-111.
- [10] 朱思宇. 车-桥耦合系统振动的随机特性及极值分析(U1334201)[D]. 成都: 西南交通大学, 2017.
ZHU Siyu. Stochastic and extreme value analysis for the coupling vibration and wind loads responses of train-bridge system (U1334201)[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2017.
- [11] 李杰, 陈建兵. 概率密度演化理论的若干研究进展[J]. 应用数学和力学, 2017, 38(1): 32-43.
LI Jie, CHEN Jianbing. Some new advances in the probability density evolution method[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2017, 38(1): 32-43.
- [12] 周通, 彭勇波, 李杰. 结构可靠度分析的概率密度演化理论: 自适应代理模型方法[J]. 振动工程学报, 2020, 33(5): 1035-1043.
ZHOU Tong, PENG Yongbo, LI Jie. Structural reliability analysis using probability density evolution method and adaptive surrogate model[J]. Journal of Vibration Engineering, 2020, 33(5): 1035-1043.
- [13] 杨俊毅, 陈建兵, 李杰. 不同分布随机参数结构非线性地震反应的概率密度演化[J]. 西南交通大学学报, 2015, 50(6): 1047-1054.
YANG Junyi, CHEN Jianbing, LI Jie. Probability density evolution analysis of nonlinear seismic response of structures with random parameters following different distributions[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2015, 50(6): 1047-1054.
- [14] WANG D, LI J. A reproducing kernel particle method for solving generalized probability density evolution equation in stochastic dynamic analysis[J]. Computational Mechanics, 2020, 65(3): 597-607.
- [15] TAO W F, LI J. An ensemble evolution numerical method for solving generalized density evolution equation[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2017, 48: 1-11.
- [16] 余志武, 张鹏, 丁叁叁, 等. 基于概率密度演化理论的磁浮列车-轨道梁耦合系统随机动力分析[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2022, 53(7): 2544-2554.
YU Zhiwu, ZHANG Peng, DING Sansan, et al. Stochastic vibration analysis of maglev vehicle-guideway coupling system based on PDEM[J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2022, 53(7): 2544-2554.
- [17] 余志武, 毛建锋, 谈遂, 等. 车辆参数随机的车桥竖向随机振动分析[J]. 铁道学报, 2015, 37(1): 97-104.
YU Zhiwu, MAO Jianfeng, TAN Sui, et al. The stochastic analysis of the track-bridge vertical coupled vibration with random train parameters[J]. Journal of the China Railway Society, 2015, 37(1): 97-104.
- [18] 方开泰, 王元. 数论方法在统计中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
FANG Kaitai, WANG Yuan. Application of Number Theory Method in Statistics[M]. Beijing: Science Press, 1996.
- [19] LI J, CHEN J B. The number theoretical method in response analysis of nonlinear stochastic structures[J]. Computational Mechanics, 2007, 39(6): 693-708.
- [20] LI Jie, CHEN Jianbing. Stochastic Dynamics of Structures[M]. John Wiley & Sons, 2009.
- [21] 余志武, 毛建锋, 谈遂, 等. 车桥竖向随机振动的概率密度演化分析[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2015, 46(4): 1420-1427.
YU Zhiwu, MAO Jianfeng, TAN Sui, et al. Probability density evolution analysis of track-bridge vertical coupled vibration with irregularity random excitation[J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2015, 46(4): 1420-1427.
- [22] 徐磊, 翟婉明. 横风和轨道不平顺联合作用下的车辆-轨道系统随机分析模型[J]. 振动工程学报, 2018, 31(1): 39-48.
XU Lei, ZHAI Wanming. The vehicle-track stochastic model considering joint effects of cross-winds and track random irregularities[J]. Journal of Vibration Engineering, 2018, 31(1): 39-48.
- [23] 徐昕宇. 复杂山区铁路风-车-桥系统耦合振动研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2017.
XU Xinyu. Coupling vibration of wind-rail vehicle-bridge system in complex mountainous terrain[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2017.
- [24] 李德建, 曾庆元. 直线轨道空间动力特性分析的有限单元法[J]. 长沙铁道学院学报, 1995, 13(1): 1-6.
LI Dejian, ZENG Qingyuan. Railway track space free vibration analysis by finite element method[J]. Journal of Changsha Railway University, 1995, 13(1): 1-6.
- [25] 翟婉明. 车辆-轨道耦合动力学-上册[M]. 4 版. 北京: 科学出版社, 2014.
ZHAI Wanming. Vehicle-Track Coupled Dynamics-Volume 1[M]. 4th ed. Beijing: Science Press, 2014.
- [26] 陈果, 翟婉明, 左洪福. 新型轮轨空间动态耦合模型[J]. 振动工程学报, 2001, 14(4): 402-408.
CHEN Guo, ZHAI Wanming, ZUO Hongfu. The new wheel/rail 3-dimensionally dynamically coupling model[J]. Journal of Vibration Engineering, 2001, 14(4): 402-408.

第一作者: 周智辉(1976—), 男, 博士, 副教授。

E-mail: zzhyy@csu.edu.cn

通信作者: 蔡陈之(1989—), 男, 博士, 副教授。

E-mail: chen zhi.cai@csu.edu.cn