

# 基于 Kriging 模型的高超声速飞行器可靠性分析\*

欧梦群, 王玉惠

(南京航空航天大学自动化学院 南京, 211106)

**摘要** 为了分析高超声速飞行器的可靠性,将高超声速飞行器纵向模型等效为悬臂梁结构,并为其建立了极限状态函数。针对极限状态函数中变量参数的不确定性,提出了一种基于两阶段 Kriging 模型的混合可靠性分析方法。首先,第 1 阶段以满足一定精度的可能失效点为采样中心,选取初始样本点构建初始 Kriging 模型,使模型满足一定的精度;其次,第 2 阶段基于一次可靠度方法和初始 Kriging 模型对飞行器进行混合可靠性分析,该阶段结合学习函数对 Kriging 模型进行自适应更新,提高了可靠性计算的效率和精度;最后,在极限强度、悬臂梁高度和宽度的不同分布条件下,与已有的方法进行了对比。结果表明,所提方法能满足高超声速飞行器可靠性分析的实时性和精度要求。

**关键词** 高超声速飞行器;等效悬臂梁;混合可靠性分析;Kriging 模型

**中图分类号** V240

## 引言

高超声速飞行器的飞行高度和速度跨度大,经常要在复杂多变的飞行环境下执行重要任务,飞行器结构需承受复杂的气动力和强烈的结构振动,这可能导致飞行器疲劳损伤和结构失效。为确保飞行安全和结构可靠,开展高超声速飞行器的可靠性研究具有重要意义。

传统的可靠性分析方法有蒙特卡洛分析(Monte Carlo analysis,简称 MCS)、重要抽样(importance sampling,简称 IS)和一次可靠度(first order reliability method,简称 FORM)<sup>[1]</sup>等,一次可靠度中的改进一次二阶矩(advanced first order second moment,简称 AFOSM)简单易算,在工程中最为常用。对结构复杂的高超声速飞行器进行实时可靠性分析时,需要建立合适的极限状态函数,但由于其复杂程度高,采用传统可靠性分析方法效率较低,因此考虑引入代理模型拟合飞行器的极限状态函数。常见的代理模型有径向基模型、响应面模型、神经网络和 Kriging 模型<sup>[2]</sup>,其中 Kriging 模型在空间插值和处理不确定性问题方面优势最为突出。文献[3]使用拉丁超立方采样法抽取初始样本点建立 Kriging 模型,结合该模型和 AFOSM 计算可靠性,拓宽了方法的使用

范围。文献[4]利用 AFOSM 迭代过程中产生的验算点更新 Kriging 模型,提高了可靠性的计算精度。文献[5]提出了一种自适应 Kriging 模型的可靠性分析方法,该方法在保证计算精度的同时,减少了极限函数的调用次数。虽然这些方法将 Kriging 模型与 AFOSM 方法相结合,都能够提高计算可靠性的效率,但不适用于认知不确定性和随机不确定性同时存在的情况。

在可靠性分析中,不确定性常用模糊理论<sup>[6]</sup>、概率方法<sup>[7]</sup>或区间分析方法<sup>[8]</sup>来处理。模糊理论用于结构可靠性分析主要分为两种,一种是用模糊集近似随机现象,另一种是随机变量取模糊形式。概率方法是基于随机变量概率分布函数已知的情况,该方法需要大量的概率参数数据。当材料自身特性和载荷为区间分布时,常用区间非概率方法计算系统的可靠性。实际工程中常存在混合不确定性,即部分不确定性可用概率分布表示,另一部分信息缺乏的不确定性以区间的形式表示。关于混合不确定性系统的可靠性分析,文献[9-10]提出了基于区间变量和随机变量的混合可靠性分析方法。文献[11-13]针对具有区间参数随机变量提出了对应的混合可靠性分析方法。对于高超声速飞行器的可靠性分析,应同时考虑几何材料参数和载荷造成

\* 国家自然科学基金资助项目(62373187);前瞻布局专项资助项目(ILA22059);科技部新一代人工智能重大资助项目(2018AAA0100805)

收稿日期:2023-06-30;修回日期:2023-09-05

的偶然不确定性和不同的应力模型产生的认知不确定性。本研究考虑用带有区间参数的随机变量表示飞行器可靠性分析时的认知不确定性和随机不确定性。由于高超声速飞行器的结构复杂,运行环境恶劣,不能直接应用现有的可靠性方法进行分析,因此需要研究新的方法以满足实时性和高精度的要求。

笔者提出了一种基于两阶段 Kriging 模型的混合可靠性分析方法,该方法分为两阶段:①第1阶段基于重要采样建立 Kriging 模型,以最可能失效点为采样中心,抽取初始样本点建立 Kriging 模型,能够提高建立模型的精度;②第2阶段基于自适应 Kriging 模型的混合可靠性分析,引入了学习函数自适应更新 Kriging 模型,并结合简单易算的 AFOSM,能够提高可靠性分析的效率。为了讨论高超声速飞行器的可靠性,建立了飞行器纵向模型的极限状态函数,将极限状态函数作为实验对象,验证了本研究提出方法对飞行器可靠性分析的准确性和高效性。

## 1 问题的描述

### 1.1 研究对象

本研究对象为图1所示的高超声速飞行器纵向模型,其结构参数参考文献[14-15]。为了更好地分析飞行器的可靠性,将飞行器的纵向模型等效为悬臂梁模型,其结构如图2所示。

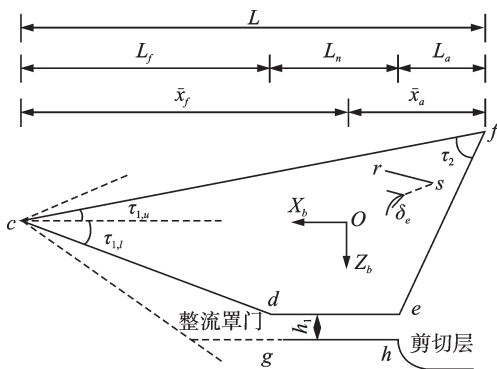


图1 高超声速飞行器纵向几何模型

Fig.1 Longitudinal geometric modeling of hypersonic vehicle

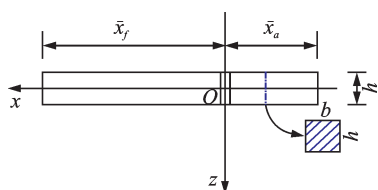


图2 等效悬臂梁模型

Fig.2 Equivalent cantilever beam model

该模型将飞行器前体和后体近似为2个截面相等且质量均匀分布的悬臂梁,以飞行器质心O点为坐标原点,悬臂梁x轴、z轴和机体坐标X\_b轴、Z\_b轴重合,h、b分别为悬臂梁的高和宽。飞行器各表面受力情况分析和各个力的受力点参考文献[14-15]。

分析悬臂梁的数学模型可知,其x轴和z轴上的应力方程可表示如下。

x轴方向

$$\begin{cases} \sigma(x) = F_x/bh \\ F_x = \sum_s X_s \\ \tau(x) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

z轴方向

$$\begin{cases} \sigma(z) = M_z/b^2h \\ M_z = \sum_s Z_s x_s \\ \tau(z) = \sum_s \frac{Z_s}{2I_y} \left( \frac{h^2}{4} - z_s^2 \right) \\ I_y = bh^3/12 \end{cases} \quad (2)$$

其中:s为飞行器的各表面; $\sigma(x)$ 、 $\sigma(z)$ 、 $\tau(x)$ 和 $\tau(z)$ 分别为飞行器x轴和z轴上的拉压应力和剪切应力; $I_y$ 为z轴上的惯性矩;b、h分别为悬臂梁宽度和高度; $M_z$ 为z方向的合力矩; $X_s$ 、 $Z_s$ 分别为飞行器s面受力在x方向和z方向的分力; $x_s$ 、 $z_s$ 分别为飞行器s面受力点在x轴和z轴的坐标值。

飞行器所受的合拉压应力 $\sigma_{total}$ 及合剪切应力 $\tau_{total}$ 可表示为

$$\sigma_{total} = \sigma(x) + \sigma(z) \quad (3)$$

$$\tau_{total} = \sqrt{\tau^2(x) + \tau^2(z)} \quad (4)$$

由第四强度理论<sup>[16]</sup>可知,飞行器所受的等效应力为

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{total}^2 + 3\tau_{total}^2} \quad (5)$$

由极限破坏准则可知,飞行器的极限状态函数为

$$Z = S(t) - \sigma(t) = G(S, b, h) \quad (6)$$

其中:S(t)为极限屈服强度; $\sigma(t)$ 为飞行器所受的应力。

### 1.2 混合可靠性分析

为了方便讨论飞行器的可靠性,将飞行器极限状态中的变量S、b、h等价为一组相互独立的随机变量X,即 $X = (S, b, h) = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ,这里的n取3。此时极限函数可表示为 $Z = G(X)$ ,失效概率定义为

$$P_f = P\{G(\mathbf{X}) < 0\} \quad (7)$$

取失效边界上的点  $x^* = [x_i^*, i = 1, 2, \dots, n]$  作为设计点,在  $x^*$  处对极限状态函数  $Z = G(\mathbf{X})$  进行泰勒展开并取一次项,即

$$Z = G(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial X_i} (X_i - x_i^*) \quad (8)$$

由于设计点  $x^*$  就在失效域的边界上,  $G(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$ ,  $Z$  的均值  $\mu_Z$  和标准差  $\sigma_Z$  可表示为

$$\mu_Z = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial G}{\partial X_i} \right)_{x^*} (\mu_{X_i} - x_i^*) \quad (9)$$

$$\sigma_Z = \sum_{i=1}^n a_i \sigma_{X_i} \left( \frac{\partial G}{\partial X_i} \right)_{x^*} \quad (10)$$

其中:  $a_i$  为灵敏度系数。

灵敏度系数具体表示为

$$a = \sigma_X \left( \frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}} \right)_{x^*} / \sqrt{\sum_{j=1}^n \left( \sigma_{X_j} \frac{\partial G}{\partial X_j} \right)_{x^*}^2} \quad (11)$$

根据一次可靠度的可靠性指标  $\beta$  和失效概率  $P_f$  的定义,可知

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial G}{\partial X_i} \right)_{x^*} (\mu_{X_i} - x_i^*)}{\sum_{i=1}^n a_i \sigma_{X_i} \left( \frac{\partial G}{\partial X_i} \right)_{x^*}} \quad (12)$$

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (13)$$

此时,新的验算点  $(x^*)_{m+1}$  求解公式为

$$(x^*)_{m+1} = \mu_X - \beta_m a_m \sigma_X \quad (14)$$

其中:  $a_m$ 、 $\beta_m$  分别由式(11)、式(12)计算所得;  $m$  为迭代次数。

考虑第 2 类混合不确定性<sup>[12]</sup>,当输入变量  $\mathbf{X}$  为随机变量,但其分布参数为具有上下界的区间变量  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Y} \in [\mathbf{Y}^L, \mathbf{Y}^U]$ ,其极限函数可表示为  $Z = G(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 。此时,失效概率是由失效概率上界  $P_f^{\max}$  和失效概率下界  $P_f^{\min}$  组成的概率区间<sup>[17-18]</sup>。 $P_f^{\max}$  和  $P_f^{\min}$  的计算式为

$$P_f^{\max} = P\{\min G(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) < 0 | \mathbf{Y} \in [\mathbf{Y}^L, \mathbf{Y}^U]\} \quad (15)$$

$$P_f^{\min} = P\{\max G(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) < 0 | \mathbf{Y} \in [\mathbf{Y}^L, \mathbf{Y}^U]\} \quad (16)$$

其中:  $\max G(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 、 $\min G(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  分别为区间  $[\mathbf{Y}^L, \mathbf{Y}^U]$  上极限函数响应的最大值和最小值。

以二维变量为例,二维随机变量的失效域示意图如图 3 所示。其中:  $M$  为最可能失效点。

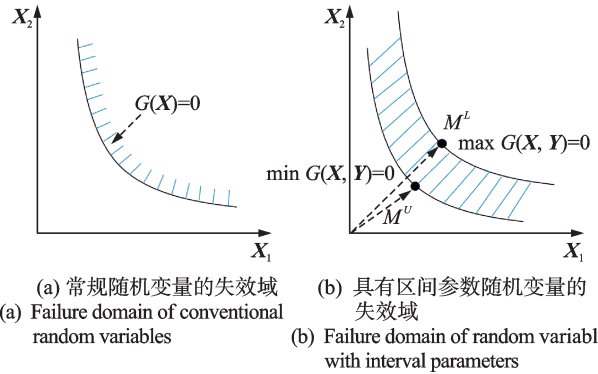


图 3 二维随机变量的失效域示意图

Fig.3 Schematic diagram of the failure domain of two-dimensional random variables

## 2 基于两阶段 Kriging 模型的混合可靠性分析方法

### 2.1 Kriging 模型

基于改进一次二阶矩计算可靠性时,其计算效率往往依赖于极限状态函数的非线性程度:极限状态函数的非线性程度较低时,计算效率较高;极限状态函数的非线性程度较高时,计算效率明显降低。为了提高高超声速飞行器这类复杂非线性极限函数的可靠性计算效率和精确度,引入 Kriging 模型拟合极限状态函数。

Kriging 模型<sup>[19-21]</sup>是一种通过已知样本点集进行空间建模的半参数化插值方法,由线性回归模型和非参数过程两部分组成,具有很高的拟合精度,广泛应用于结构可靠性分析与优化设计。已知样本集  $S_1 = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n_0)})$ , 输出响应  $Y_1 = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n_0)})$ 。其中,  $n_0$  为样本点的数目。当输入变量为  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  时,其响应通常可以表示为

$$\hat{G}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{X}) \boldsymbol{\beta}_K + z(\mathbf{X}) \quad (17)$$

其中:  $\mathbf{f}(\mathbf{X}) = [f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \dots, f_M(\mathbf{X})]^T$ , 为输入变量  $\mathbf{X}$  的多项式基函数;  $\boldsymbol{\beta}_K = [\beta_{K1}, \beta_{K2}, \dots, \beta_{KM}]$ , 为多项式系数;  $z(\mathbf{X})$  为非参数部分,通常取服从正态分布  $N \sim (0, \sigma^2)$  的高斯随机过程。

$z(\mathbf{X})$  的协方差表示为

$$\text{Cov}[z(x^{(i)}), z(x^{(j)})] = \mathcal{R}(\theta, x^{(i)}, x^{(j)}) \quad (18)$$

其中:  $\mathcal{R}(\theta, x^{(i)}, x^{(j)})$  为两样本点  $x^{(i)}$ 、 $x^{(j)}$  间的相关函数,这里取高斯函数。

$$\mathcal{R}(\theta, x^{(i)}, x^{(j)}) = \exp\left[-\sum_{k=1}^n \theta_k (x_k^{(i)} - x_k^{(j)})^2\right] \quad (19)$$

其中:  $\theta$  为相关函数参数,由最大似然估计得到。

当已知样本点集合  $S_1$  和样本点的响应值集合  $Y_1$  时,多项式系数  $\beta_K$  和随机过程方差  $\sigma^2$  分别通过最小二乘方法和极大似然方法进行估计,即

$$\hat{\beta}_K = (F^T R^{-1} F) F^T R^{-1} Y_1 \quad (20)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n_0} (Y_1 - F\hat{\beta}_K)^T R^{-1} (Y_1 - F\hat{\beta}_K) \quad (21)$$

其中:  $F \in R^{n_0 \times M}$ , 为回归矩阵,其矩阵形式为  $F = [f(x^{(1)}), f(x^{(2)}), \dots, f(x^{(n_0)})]$ ;  $R$  为样本点间的相关性矩阵,其展开形式为  $R_{ij} = \mathcal{R}(\theta, x^{(i)}, x^{(j)}); i = 1, 2, \dots, n_0; j = 1, 2, \dots, n_0$ 。

由文献[19]的推导可知,任意一点  $x$  的 Kriging 预测均值  $\mu_{\hat{G}}(x)$  和预测方差  $\sigma_{\hat{G}}^2(x)$  可表示为

$$\mu_{\hat{G}}(x) = f^T \hat{\beta}_K + r^T R^{-1} (Y_1 - F\hat{\beta}_K) \quad (22)$$

$$\sigma_{\hat{G}}^2(x) = \hat{\sigma}^2 (1 + u^T (F^T R^{-1} F)^{-1} u - r^T R^{-1} r) \quad (23)$$

其中:  $r = [\mathcal{R}(\theta, x^{(1)}, x), \dots, \mathcal{R}(\theta, x^{(n_0)}, x)]$ , 为预测点与样本点之间的相关系数集;  $u = F^T R^{-1} r - f$ ;  $f = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x)]^T$ 。

## 2.2 基于两阶段 Kriging 模型混合可靠性分析算法

### 2.2.1 基于重要采样的 Kriging 模型

考虑到建立模型的最小二乘问题,第1阶段在文献[5]的基础上进行了改进,初始样本点不仅有全局迭代产生的验算点,还加入了重要采样产生的样本点。重要采样思想来源于可靠性计算的重要抽样法,该方法步骤为:①利用改进一次二阶矩迭代求得满足一定精度的最可能失效点;②以最可能失效点为采样中心进行采样。这样处理不仅可以增加初始样本数量,还可以使更多的初始样本点位于最可能的失效点附近,从而提高 Kriging 模型的局部精度,为第2阶段失效概率的精确求解奠定了基础。

重要采样不改变统计量,只改变概率分布关系,在数学上是一种变换关系,即

$$\int f(X) dx = \int \frac{f(X)}{g(X)} g(X) dX = \int \frac{f(X)}{g(X)} dG(X) \quad (24)$$

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_X} e^{-\frac{(X-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}} \quad (25)$$

$$g(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_X} e^{-\frac{(X-x^*)^2}{2\sigma_X^2}} \quad (26)$$

其中:  $f(X)$  为正态分布概率密度函数;  $g(X)$  为以最可能失效点  $x^*$  作为密度中心的重要密度函数。

考虑输入变量  $X$  为具有区间参数  $Y$  的随机变量时,第1阶段的算法步骤如下:

1) 首先对区间变量  $Y$  均匀抽取  $N$  个样本作为

样本集  $S_1, S_1 = [Y^j, j = 1, 2, \dots, N]$ , 在  $X \sim N(Y^1, \sigma^2)$  的条件下,建立全局 Kriging 模型:

2) 取初始验算点  $(x^*)_1 = \mu_X = Y^1$ ;

3) 计算  $G((x^*)_m)$  和  $\partial G / \partial (x^*)_m$  的值,其中  $m$  为迭代次数;

4) 将验算点  $(x^*)_m$  加入集合  $S_2, S_2 = [x_k, k = 1, 2, \dots, m]$ , 并将验算点的极限函数值  $G((x^*)_m)$  加入集合  $Y_2, Y_2 = [G(x_k), k = 1, 2, \dots, m]$ , 然后分别由式(11)、式(12)计算灵敏度系数  $a_m$  和可靠度指标  $\beta_m$ ;

5) 计算新的验算点  $(x^*)_{m+1} = \mu_X - \beta_m a_m \sigma_X$ , 用  $(x^*)_{m+1}$  更新 Kriging 模型;

6) 重复步骤3~5,直到验算点  $(x^*)_m$  和  $(x^*)_{m+1}$  满足容许误差  $|(x^*)_{m+1} - (x^*)_m| / |(x^*)_m| \leq C$ , 本研究  $C$  取 0.1;

7) 将此时验算点记为  $(x^*)^0$ ;

8) 以验算点  $(x^*)^0$  作为抽样中心,抽取  $N_2$  个样本  $x$  与  $S_2$  合并为集合  $S_3, S_3 = [x_k, k = 1, 2, \dots, m + N_2]$ , 将对应的极限函数值  $G(x_k)$  加入  $Y_3, Y_3 = [G(x_k), k = 1, 2, \dots, m + N_2]$ , 用  $(S_3, Y_3)$  建立初始 Kriging 模型。

### 2.2.2 基于自适应 Kriging 模型的可靠性分析

第2阶段利用全局阶段建立的 Kriging 模型作为近似模型的响应曲面,并结合改进的一次二阶矩方法计算可靠性指标。为了提高计算效率,在混合可靠性分析的过程中进行了以下改进:在迭代过程中加入了学习函数自适应更新 Kriging 模型,并将  $X \sim N(Y^{j-1}, \sigma^2)$  条件下的最可能失效点  $(x^*)^{j-1}$  作为  $X \sim N(Y^j, \sigma^2)$  条件下的初始验算点  $(x^*)_1$ , 这样处理能够使算法更快地定位到最可能失效点,减少不必要的迭代次数,提高计算效率。

为了提高 Kriging 模型的精度,研究人员提出学习函数来自适应更新模型,常见的学习函数有 EBF 函数<sup>[22]</sup>、U 函数<sup>[23]</sup> 和 H 函数<sup>[24]</sup> 等。本研究使用具有较高训练效率的 H 函数。

文献[24]根据信息熵理论提出了 H 函数,即

$$H(x) = \left| - \int f(\hat{G}(x)) \ln f(\hat{G}(x)) d(\hat{G}(x)) \right| = \left| - \int \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\hat{G}}(x)} e^{\rho(x)} \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\hat{G}}(x)} e^{\rho(x)} d(\hat{G}(x)) \right| \quad (27)$$

其中:  $\hat{G}(x)$  为 Kriging 预测值;  $\sigma_{\hat{G}}^2(x)$  为 Kriging 方差;  $\rho(x) = -(\hat{G}(x) - \mu_{\hat{G}}(x))^2 / 2\sigma_{\hat{G}}^2(x)$ 。

将式(27)的积分形式展开可得

$$H(x) = \left[ \begin{aligned} & \ln\left(\sqrt{2\pi} \sigma_{\hat{G}}(x) + \frac{1}{2}\right) \Phi\left(\frac{2\sigma_{\hat{G}}(x) - \hat{G}(x)}{\sigma_{\hat{G}}(x)}\right) - \\ & \ln\left(\sqrt{2\pi} \sigma_{\hat{G}}(x) + \frac{1}{2}\right) \Phi\left(\frac{-2\sigma_{\hat{G}}(x) - \hat{G}(x)}{\sigma_{\hat{G}}(x)}\right) - \\ & \frac{2\sigma_{\hat{G}}(x) - \hat{G}(x)}{2} \phi\left(\frac{2\sigma_{\hat{G}}(x) - \hat{G}(x)}{\sigma_{\hat{G}}(x)}\right) - \\ & \frac{2\sigma_{\hat{G}}(x) + \hat{G}(x)}{\sigma_{\hat{G}}(x)} \phi\left(\frac{-2\sigma_{\hat{G}}(x) - \hat{G}(x)}{\sigma_{\hat{G}}(x)}\right) \end{aligned} \right] \quad (28)$$

其中:  $\Phi(\cdot)$  为累计分布函数;  $\phi(\cdot)$  为概率密度函数。

H 函数值越大, Kriging 预测值  $\hat{G}(x)$  的不确定性越大, 此时样本点的预测值  $\hat{G}(x)$  接近于极限状态  $\hat{G}(x) = 0$  或预测方差  $\sigma_{\hat{G}}^2(x)$  较大。H 函数的停止准则为  $H \leq 0.5$ 。

本研究利用学习函数 H 判断迭代过程中验算点 Kriging 预测值  $\hat{G}((x^*)_m)$  的准确性, 记  $H_m = H((x^*)_m)$ 。在迭代过程中: 若  $H_m \leq 0.5$ , 则不更新 Kriging 模型, 将 Kriging 预测值  $\hat{G}((x^*)_m)$  和 Kriging 导数值  $\partial\hat{G}/\partial(x^*)_m$  作为验算点的极限函数值和极限函数导数值, 利用  $\hat{G}((x^*)_m)$  和  $\partial\hat{G}/\partial(x^*)_m$  计算灵敏度系数  $a_m$ 、可靠性指标  $\beta_m$  和新的验算点  $(x^*)_{m+1}$ ; 若  $H_m > 0.5$ , 则计算验算点  $(x^*)_m$  的极限函数值  $G((x^*)_m)$ , 利用验算点  $(x^*)_m$  更新 Kriging 模型, 计算 Kriging 导数值  $\partial\hat{G}/\partial(x^*)_m$ , 再利用  $G((x^*)_m)$  和  $\partial\hat{G}/\partial(x^*)_m$  计算灵敏

度系数  $a_m$ 、可靠性指标  $\beta_m$  和新的验算点  $(x^*)_{m+1}$ 。

由前文可知  $S_1 = [Y^j, j = 1, 2, \dots, N]$ , 基于自适应 Kriging 模型的混合可靠性分析算法步骤如下:

1) 在  $Y^j$  条件下, 随机变量  $X$  服从  $N(Y^j, \sigma^2)$  的正态分布, 取  $Y^{j-1}$  条件下的最可能失效点  $(x^*)^{j-1}$  作为初始验算点  $(x^*)_1$ ;

2) 利用全局建立的 Kriging 模型计算验算点的预测响应值  $\hat{G}((x^*)_m)$  和克里金方差  $\sigma_{\hat{G}}^2((x^*)_m)$ , 并求出对应学习函数的值  $H_m = H((x^*)_m)$ ,  $m$  为迭代次数;

3) 判断是否满足  $H_m \leq 0.5$ , 若不满足, 计算验算点的真实极限函数值  $G((x^*)_m)$ , 利用验算点  $(x^*)_m$  更新 Kriging 模型, 计算  $\partial\hat{G}/\partial(x^*)_m$ , 继续迭代; 若满足, 不更新模型, 继续迭代;

4) 分别由式(11)、式(12)计算灵敏度系数  $a_m$  和可靠度指标  $\beta_m$  的值, 并计算新的验算点  $(x^*)_{m+1} = \mu_x - \beta_m a_m \sigma_x$ ;

5) 重复步骤 2~4, 直到验算点  $(x^*)_m$  和  $(x^*)_{m+1}$  满足容许误差  $|(x^*)_{m+1} - (x^*)_m| / |(x^*)_m| \leq 10^{-6}$ ;

6) 此时的最可能失效点记为  $(x^*)^j$ , 计算失效概率  $P_f^j = \Phi(-\beta)$ ;

7) 估算最大失效概率  $P_f^{\max} = \max(P_f^j, j = 1, 2, \dots, N)$ , 估算最小失效概率  $P_f^{\min} = \min(P_f^j, j = 1, 2, \dots, N)$ 。

综合第 1 阶段和第 2 阶段, 本研究提出的基于两阶段 Kriging 混合可靠性分析算法流程图如图 4 所示。

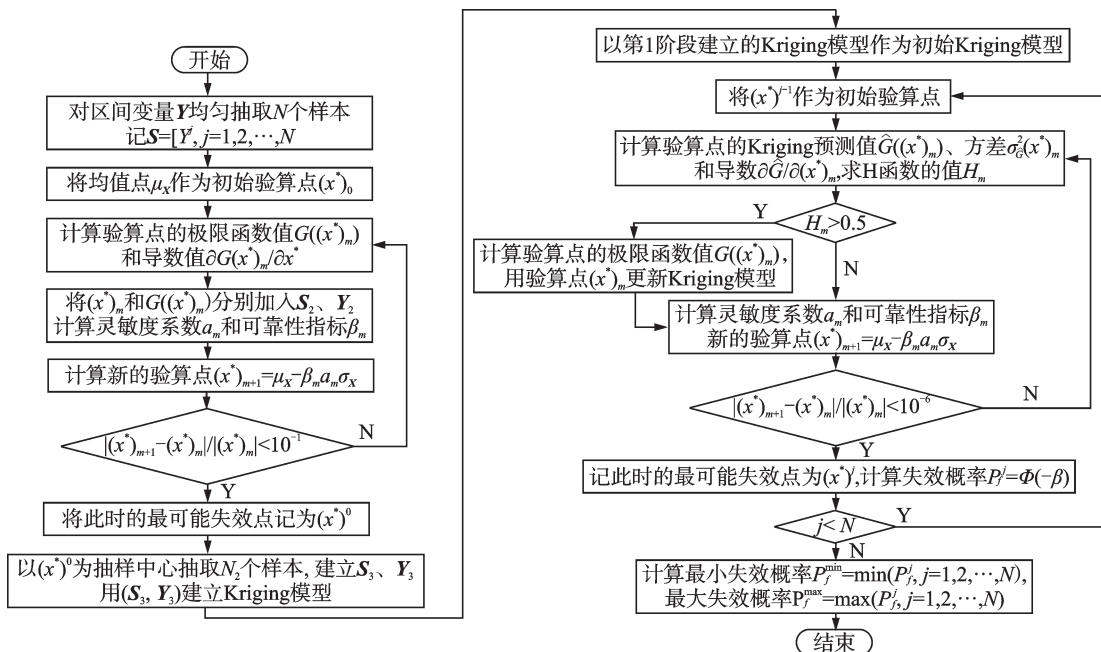


图 4 基于两阶段 Kriging 混合可靠性分析算法流程图

Fig.4 Flow chart of two-stage Kriging hybrid reliability analysis algorithm

### 3 可靠性分析

高超声速飞行器的极限状态函数为  $Z = G(\mathbf{X}) = S(t) - \sigma(t)$ , 其初始状态参数见表1。

表1 飞行器的初始状态参数

Tab.1 Initial state parameters of vehicle

参数	取值	参数	取值
$\alpha_0/(\circ)$	1.52	$q_0/((\circ)\cdot\text{s}^{-1})$	0
$V_0/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	2 040	$\theta_0/(\circ)$	1.52
$H_0/\text{m}$	25 908	$\delta_0/(\circ)$	11.46
$\phi$	0.25		

输入变量  $\mathbf{X}$  为常规的随机变量时, 随机变量  $S$ 、 $b$  和  $h$  的分布见表2。

表2 随机变量  $S$ 、 $b$  和  $h$  的分布

Tab.2 Distribution of random variables  $S$ ,  $b$  and  $h$

参数	分布类型	平均值	变异系数
$S$	正态分布	550 MPa	0.05
$b$	正态分布	0.11 m	0.10
$h$	正态分布	1.5 m	0.10

将文献[4]提出的方法用 K-AFOSM 表示, 文献[5]提出方法用 UK-AFOSM 表示。为了解决 Kriging 模型最小二乘的问题和满足初始条件的一致性, K-AFOSM 和 UK-AFOSM 的初始样本点数为 10, 本研究提出算法的  $N_1$ 、 $N_2$  分别取 1 和 10。

为了验证本研究方法的准确性与高效性, 对高超声速飞行器进行了可靠性分析。可靠性分析结果见表3。表中误差是以 MCS 的结果为基准计算的, 真实极限函数的调用次数为初始样本点数加上更新模型的样本点数。为了说明实验结果的准确性和方法的稳定性, 结果为多次实验的平均值。

表3 可靠性分析结果

Tab.3 Reliability analysis results

方法	失效概率	极限函数调用次数	误差/%	$t/\text{s}$
K-AFOSM	$337 \times 10^{-6}$	27	9.8	0.18
UK-AFOSM	$337 \times 10^{-6}$	25	9.8	0.34
本研究方法	$337 \times 10^{-6}$	23	9.8	0.19
MCS	$374 \times 10^{-6}$	$10^7$	—	1.97

由表3可知, 在满足一定计算精度的情况下, MCS、K-AFOSM 和 UK-AFOSM 调用真实极限函数的次数分别为  $10^7$ 、27 和 25, 而本研究方法仅调用

了 23 次真实极限函数, 并且计算所用的时间相对较短, 计算效率相对较高。某迭代过程中几种方法的失效概率迭代曲线如图5所示。可以看出: 在几种方法中, K-AFOSM 迭代次数最多, 收敛速度最慢; 相对于 K-AFOSM, UK-AFOSM 的收敛速度较快; 与另外 2 种方法相比, 本研究方法的迭代次数最少, 收敛速度也最快, 更有利于后续的高超声速飞行器动态可靠性分析。

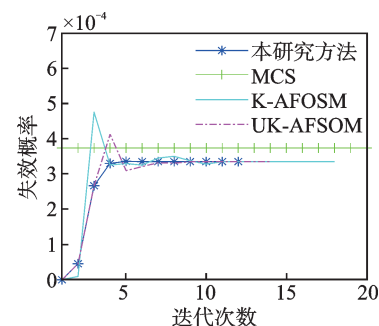


图5 失效概率迭代曲线

Fig.5 Kriging fitting curve and true limit function curve

在迎角  $\alpha = 1.52^\circ$  的条件下, 用本研究方法分析飞行器可靠度随飞行高度、速度等状态的变化关系, 结果如图6所示。

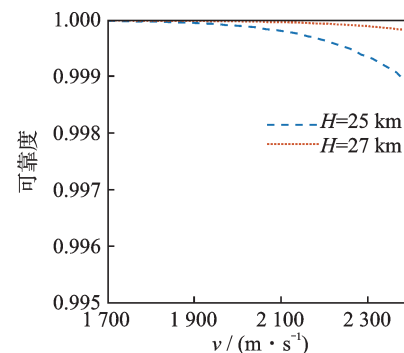


图6 可靠度随飞行状态的变化关系

Fig.6 The relationship between reliability and flight status

由图6可知: 当飞行高度、迎角不变时, 飞行器可靠度随飞行速度的提高而降低, 这是因为飞行器所受的气动力会随飞行速度的加快而增大; 当飞行速度、迎角不变时, 飞行器可靠度随高度的升高而提高, 这是由于空气密度随高度的升高而下降, 飞行器表面的气动力也随之减小。

综合前面的讨论, 本研究提出的基于两阶 Kriging 模型的可靠性分析方法的计算结果误差在可接受范围内, 而且具有计算效率高、收敛速度快的优点。

当输入变量为具有区间参数的随机变量时, 失

效概率以区间的形式表示, $S$ 、 $b$ 和 $h$ 的分布见表4。

表4 带区间参数随机变量 $S$ 、 $b$ 和 $h$ 的分布

Tab.4 Distribution of random variables  $S$ ,  $b$ , and  $h$  with interval parameters

参数	分布类型	平均值	不确定性/%	变异系数
$S$	正态分布	550 MPa	10	0.05
$b$	正态分布	0.11 m	5	0.10
$h$	正态分布	1.5 m	5	0.10

基于蒙特卡洛混合可靠性分析(MCS-hybrid reliability analysis, 简称MCS-HRA)和基于改进一次二阶矩混合可靠性分析(AFOSM-HRA)区间参数 $Y$ 的抽样数均为100。为了使初始条件保持一致,本研究算法 $N_1$ 、 $N_2$ 分别取100和10。

考虑区间参数条件下,对高超声速飞行器进行混合可靠性分析,结果见表5。

表5 混合可靠性分析结果

Tab.5 Hybrid reliability analysis results

方法	可靠度下界	可靠度上界	$t/s$
AFOSM-HRA	0.974 8	0.999 9	8.22
本研究方法	0.974 8	0.999 9	3.65
MCS-HRA	0.972 6	0.999 9	68.81

可靠度 $P_r=1-P_f$ ,为排除随机性带来的误差,表中的结果为多次实验平均值。

由表5可知,AFOSM-HAR和基于两阶段Kriging模型的混合可靠性分析方法计算的可靠度上下界都非常接近于MCS-HRA的计算结果,可靠度误差均小于1%,且本研究方法计算的可靠度与AFOSM-HRA的计算结果一致,说明了本研究方法的可行性和准确性。此外,由可靠性分析结果可知,MCS-HRA的计算时间为68.81 s,AFOSM-HRA的计算时间为8.22 s,而本研究提出方法仅用时3.65 s,大大缩短了计算时间,提高了可靠度的计算效率,更有利于高超声速飞行器的可靠性计算。

## 4 结 论

1) 针对高超声速飞行器可靠性分析问题,提出了一种基于两阶段Kriging模型的混合可靠性分析算法,并通过飞行器模型验证了该方法的准确性和高效性。

2) 对高超声速飞行器进行动态可靠性分析可知,在其他飞行状态不变时,飞行器的速度、高度变化会对飞行器可靠性造成一定的影响。

3) 由于本研究方法调用真实极限函数次数较少,计算效率和精度较高,也可运用于其他实际工程的可靠性计算,特别是那些隐式且非线性程度高的极限状态方程。

## 参 考 文 献

- [1] 苏振宇. 结构可靠性方法及比较研究[J]. 装备制造技术, 2022(5): 240-243, 251.  
SU Zhenyu. Structural reliability methods and comparative research[J]. Equipment Manufacturing Technology, 2022(5): 240-243, 251.(in Chinese)
- [2] 韩忠华. Kriging模型及代理优化算法研究进展[J]. 航空学报, 2016, 37(11): 3197-3225.  
HAN Zhonghua. Kriging surrogate model and its application to design optimization: a review of recent progress[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2016, 37(11): 3197-3225.(in Chinese)
- [3] 李宝玉, 张磊刚, 裘群海, 等. 基于Kriging模型梯度解析解的改进一次二阶矩方法[J]. 航空学报, 2019, 40(5): 150-157.  
LI Baoyu, ZHANG Leigang, QIU Qunhai, et al. An advanced first order and second moment method based on gradient analytical solution of Kriging surrogate model[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2019, 40(5): 150-157.(in Chinese)
- [4] 袁修开, 孔冲冲, 顾健. Kriging与改进一次二阶矩融合的可靠性分析方法[J]. 国防科技大学学报, 2020, 42(6): 150-156.  
YUAN Xiukai, KONG Chongchong, GU Jian. Reliability analysis approach based on Kriging and advanced first-order second moment method[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2020, 42(6): 150-156.(in Chinese)
- [5] 刘丞, 范文亮, 余书君, 等. 基于主动学习Kriging模型的改进一次可靠度方法[J]. 工程力学, 2024, 41(2): 35-42.  
LIU Cheng, FAN Wenliang, YU Shujun, et al. Improved first order reliability method based on adaptive kriging model[J]. Engineering Mechanics, 2024, 41(2): 35-42.(in Chinese)
- [6] CANIZES B, SOARES J, VALE Z, et al. Hybrid fuzzy monte carlo technique for reliability assessment in transmission power systems[J]. Energy, 2012, 45(1): 1007-1017.
- [7] DANG H V, TRESTIAN R, BUI T T, et al. Probabilistic method for time-varying reliability analysis of structure via variational Bayesian neural network[J]. Structures, 2021, 34: 3703-3715.

- [8] 方圣恩, 黄继源. 结合准静态挠度区间包络面的区间可靠度评估[J]. 振动、测试与诊断, 2022, 42(3): 427-431.  
FANG Sheng'en, HUANG Jiyuan. Interval reliability evaluation based on quasi-static deflection interval envelope surface[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2022, 42(3): 427-431.(in Chinese)
- [9] BOFAN D, LU Z Z. Efficient adaptive kriging for system reliability analysis with multiple failure modes under random and interval hybrid uncertainty[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2022, 35(5): 333-346.
- [10] YANG X F, LIU Y S, GAO Y, et al. An active learning kriging model for hybrid reliability analysis with both random and interval variables[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2015, 51(5): 1003-1016.
- [11] JIANG C, ZHENG J, HAN X. Probability-interval hybrid uncertainty analysis for structures with both aleatory and epistemic uncertainties: a review[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2018, 57(6): 2485-2502.
- [12] WANG W X, GAO H S, ZHOU C C, et al. Reliability analysis of motion mechanism under three types of hybrid uncertainties[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 121: 769-784.
- [13] WANG P, ZHOU H Y, HU H H, et al. A novel method for reliability analysis with interval parameters based on active learning Kriging and adaptive radial-based importance sampling[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2022, 123(14): 3264-3284.
- [14] OPPENHEIMER M, DOMAN D. A hypersonic vehicle model developed with piston theory[C]//AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit. Keystone, Colorado: AIAA, 2006: 6637.
- [15] 李云鑫. 基于气动弹性模型的高超声速飞行器减损控制研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2020.
- [16] 吴永端, 邓宗白, 周克印. 材料力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011: 76-212.
- [17] XIAO M, ZHANG J H, GAO L. A Kriging-assisted sampling method for reliability analysis of structures with hybrid uncertainties[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2021, 210: 107552.
- [18] 余萌晨, 龙湘云. 基于两阶段主动学习 Kriging 模型的广义概率区间混合可靠性分析[J]. 机械工程学报, 2022, 58(6): 274-288.  
YU Mengchen, LONG Xiangyun. Generalized probability and interval hybrid reliability analysis based on two-stage active learning kriging model[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2022, 58(6): 274-288.(in Chinese)
- [19] LOPHAVEN S N, NIELSEN H B, SØNDERGAARD J. DACE-A matlab Kriging toolbox [M]. Denmark: Technical University of Denmark, 2002: 1-24.
- [20] ZHOU J, LI J. IE-AK: a novel adaptive sampling strategy based on information entropy for kriging in metamodel-based reliability analysis[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2023, 229: 108824.
- [21] 佟操, 孙志礼, 杨丽, 等. 一种基于 Kriging 和 Monte Carlo 的主动学习可靠度算法[J]. 航空学报, 2015, 36(9): 2992-3001.  
TONG Cao, SUN Zhili, YANG Li, et al. An active learning reliability method based on Kriging and Monte Carlo[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2015, 36(9): 2992-3001.(in Chinese)
- [22] BICHON B J, ELDRED M S, SWILER L P, et al. Efficient global reliability analysis for nonlinear implicit performance functions[J]. AIAA Journal, 2008, 46(10): 2459-2468.
- [23] ECHARD B, GAYTON N, LEMAIRE M. AK-MCS: an active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo simulation[J]. Structural Safety, 2011, 33(2): 145-154.
- [24] LV Z Y, LU Z Z, WANG P. A new learning function for Kriging and its applications to solve reliability problems in engineering[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2015, 70(5): 1182-1197.



**第一作者简介:** 欧梦群, 女, 1999年6月生, 硕士生。主要研究方向为高超声速飞行器可靠性分析与控制。  
E-mail: oumq1999@nuaa.edu.cn

**通信作者简介:** 王玉惠, 女, 1980年2月生, 博士、教授。主要研究方向为控制理论与控制工程、兵器科学与技术。  
E-mail: wangyh@nuaa.edu.cn

damage, a database comprising 3 500 samples of damage signals is generated through iteratively running the numerical model. Subsequently, a one-dimensional convolutional neural network imaging model is constructed. The model is trained using the generated database to establish a mapping relationship between thickness maps and reception signals, and inputting the reception signals into the imaging model yields corresponding thickness maps. Finally, the feasibility of the proposed method is experimentally validated. The mean square error between experimental imaging results and actual values is  $8.6048 \times 10^{-4}$ , the correlation coefficient is 0.711 6, and the imaging model runtime is 0.538 5 seconds. The results indicate that the proposed method can achieve quantitative imaging of corrosion damage thickness within pipelines with high imaging efficiency.

**Keywords** ultrasonic guided wave; pipeline structure; damage imaging; finite difference method; convolutional neural network

## Reliability Analysis of Hypersonic Vehicle Based on Kriging Model

*OU Mengqun, WANG Yuhui*

(School of Automation, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics Nanjing, 211106, China)

**Abstract** In order to analyze the reliability of hypersonic flight vehicles, the longitudinal model of the vehicle is simplified as a cantilever beam structure, and a limit state function is formulated. To address the uncertainty of variable parameters within the limit state function, a hybrid reliability analysis method based on a two-stage Kriging model is proposed. For the first stage, initial sample points are selected to construct an initial Kriging model centered on potential failure points meeting specified accuracy requirements, ensuring the model satisfies this accuracy criterion. For the second stage, a hybrid reliability analysis of the flight vehicle is performed using the initial Kriging model and the first-order reliability method. The Kriging model is adaptively updated by incorporating learning functions, thereby enhancing the efficiency and accuracy of reliability calculations. Comparing the results with existing methods under different parameters of ultimate strength, cantilever beam height, and width, it is demonstrated that the proposed method can meet the requirements for real-time and accurate reliability analysis of the hypersonic vehicle.

**Keywords** hypersonic vehicle; equivalent cantilever beam; hybrid reliability analysis; Kriging model

## Experimental Study on Nonlinear Structure Dynamics Based on Response-Controlled

*GUO Ning<sup>1</sup>, ZHANG Xin<sup>2</sup>, DUAN Mianchao<sup>1,3</sup>, WAN Xiaozhong<sup>1</sup>, XU Chao<sup>1</sup>*

(1. School of Astronautics, Northwestern Polytechnical University Xi'an, 710072, China)

(2. Beijing Institute of Electronic System Engineering Beijing, 100854, China)

(3. Hubei Aerospace Flight Vehicle Institute Wuhan, 430040, China)

**Abstract** Nonlinear structures exhibit multiple responses under steady-state excitation, making it challenging to directly obtain their dynamic characteristics using traditional vibration test methods. To address this issue, a constant-force dynamic characteristics testing method based on acceleration-response-controlled step-sine frequency sweep test technology is proposed. First, the acceleration response at the excitation point is selected as the control signal, and a step-sine frequency sweep experiment is performed by maintaining a constant response amplitude. Secondly, the resulting simple harmonic excitation spectrum and acceleration response spectrum are