

# CS-FEM 在膝关节有限元模型中的应用

杨平川, 潘红玲

(长沙理工大学体育学院, 410114 长沙)

**摘要:** **目的** 通过使用光滑有限元法 (cell-based smoothed finite element method, CS-FEM) 来提高膝关节有限元模型中网格的质量与效率。 **方法** 在传统有限元法的基础上引入梯度光滑技术, 采用基于单元的光滑有限元法 (CS-FEM) 对膝关节有限元模型进行网格划分, 对比传统有限元法与 CS-FEM 实验数据的精确性。 **结果** CS-FEM 较传统有限元法更加精确且减少了网格划分的复杂度, 同时降低了单元数量, 使得求解过程更加高效。 **结论** 传统有限元法 (finite element method, FEM) 方法由于其应用广泛和成熟性, 在处理相对简单的几何结构和线性材料时具有较高的计算精度和稳定性。然而, 在复杂结构和非线性材料的生物力学模拟中, CS-FEM 通过优化网格划分和减少应力集中, 提供了更高的计算效率和精度。因此, 在未来膝关节和其他复杂生物结构的建模中, CS-FEM 有望得到更广泛的应用。

**关键词:** 膝关节; 有限元模型; CS-FEM 网格划分技术

中图分类号: G842

文献标志码: A

文章编号: 1000-4939(2025)06-1439-08

## Application of CS-FEM to finite element modelling of knee joints

YANG Pingchuan, PAN Hongling

(Physical Education Institute, Changsha University of Science & Technology, 410114 Changsha, China)

**Abstract:** **Objective** To improve the quality and efficiency of the mesh in the finite element model of the knee joint by using the cell-based smoothed finite element method (CS-FEM). **Methods** The gradient smoothing technique is introduced on the basis of the traditional finite element method, and CS-FEM is used to mesh the finite element model of the knee joint, and to compare which of the two methods (traditional finite element method and CS-FEM) is more accurate for the experimental data of the previous study. **Results** CS-FEM is more accurate and reduces the complexity of meshing than the traditional finite element method, and reduces the number of cells, making the solution process more efficient. **Conclusion** The conventional FEM methods offer high computational accuracy and stability when dealing with relatively simple geometries and linear materials due to their wide application and maturity. However, in biomechanical simulation of complex structures and nonlinear materials, CS-FEM provides higher computational efficiency and accuracy by optimizing meshing and reducing stress concentration. Therefore, CS-FEM is expected to be more widely used in the modelling of knee joints and other complex bio-

收稿日期: 2024-12-02

基金项目: 国家社科基金资助项目 (No. 23BTY121)

通信作者: 杨平川. E-mail: yang.pch@163.com

引用格式: 杨平川, 潘红玲. CS-FEM 在膝关节有限元模型中的应用[J]. 应用力学学报, 2025, 42(6): 1439-1446.

YANG Pingchuan, PAN Hongling. Application of CS-FEM to finite element modelling of knee joints[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2025, 42(6): 1439-1446.

logical structures in the future.

**Key words:** knee joint; finite element modelling; CS-FEM meshing technique

在人体膝关节生物力学分析中,由于膝关节解剖结构复杂,且构成膝关节的骨、软骨、韧带、肌肉和肌腱实体表面往往是不规则的自由曲面,故如何建立合理有效的膝关节有限元模型一直是一项非常重要和复杂的工作<sup>[1]</sup>。网格单元是将一个复杂的连续体(如膝关节)分割成小的离散单元的基本单元,网格单元质量的好坏将直接决定有限元的计算结果<sup>[2]</sup>,不合理的网格划分会导致结果的不稳定性和收敛性问题。因此,合适的网格划分对于获得准确结果至关重要<sup>[3]</sup>。

传统膝关节有限元模型的网格划分方法主要有四面体网格自动划分法和六面体映射网格划分法<sup>[4-6]</sup>。例如:鲍春雨等<sup>[4]</sup>通过 Geomagic Studio 软件将人体膝关节有限元模型划分为六面体(Solid185)。姜亚琼等<sup>[5]</sup>选择四节点线性四面体单元,网格大小 3 mm,对膝关节各部件进行网格划分。张楠等<sup>[6]</sup>通过 HyperMesh 软件将排球运动员膝关节有限元模型划分为六面体(Solid185)。传统的网格划分方法具有一定的局限性:①四面体单元计算精度较低<sup>[7]</sup>;②四面体单元对于复杂的接触条件常伴随计算不收敛,无法满足复杂载荷条件下的力学分析<sup>[8]</sup>;③六面体单元耗时耗力且对于曲率变化复杂的畸形表面难以实现<sup>[9]</sup>。

LIU 等<sup>[10]</sup>提出的基于单元的光滑有限元法(cell-based smoothed finite element method, CS-FEM)有效解决了传统网格划分方法的局限性。与传统的有限元方法相比,CS-FEM 网格划分方法通过采用切割单元的技术在计算中提供了更大的灵活性和精度,尤其是在处理复杂或不规则域的情况下。使用类似于传统有限元法(finite element method, FEM)的单元网格直接计算形状函数值,并执行光滑操作以获得光滑应变,而无需对形状函数进行微分<sup>[11]</sup>。其中单元被进一步划分以形成平滑单元,然后通过沿平滑单元边界的边界积分沿着进行平滑应变计算<sup>[12-13]</sup>。在 CS-FEM 中,光滑 Galerkin 弱形式与光滑应变场一起使用,因此通常被称为弱化弱列式。从理论上讲,CS-FEM 生成的刚度矩阵总是比使用相同底层网格的 FEM 生成的刚度矩阵“更软”<sup>[11,14]</sup>。CS-FEM 的这一特殊功能引入了许多基本特征<sup>[15]</sup>,能建立一个上限解<sup>[16]</sup>甚至接近范数<sup>[17]</sup>

的精确解的模型。由于软化效应,CS-FEM 可以处理高扭曲网格和  $n$  边形单元。

本研究采用 CS-FEM 对人体膝关节有限元模型进行网格划分,通过比较两种方法(传统有限元法与 CS-FEM)得出哪种方法对于之前研究的实验数据更加精确。

通过采用 CS-FEM 方法,有限元分析能够更加高效、精确地应对实际工程中的复杂问题,尤其是在模拟不规则几何、动态变化和物理场耦合时具有明显优势。这使得 CS-FEM 在许多领域,如生物力学、结构力学、流体力学等,成为了非常重要的工具。

## 1 CS-FEM 算法

### 1.1 梯度光滑技术

如图 1 所示,考虑域  $\Omega$ ,将域  $\Omega$  分为  $N$  个边界为  $\Gamma_p$  ( $p = 1, 2, \dots, N$ ) 的不重合光滑域  $\Omega_p$ 。每个光滑域  $\Omega_p$  对应一个物质点  $X_p$ <sup>[18]</sup>。

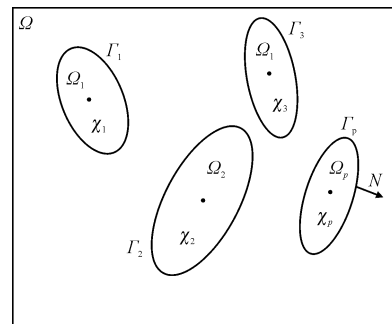


图 1 光滑域示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the smooth domain

光滑域  $\Omega_p$  内的场变量  $u_i$  的光滑梯度定义如下

$$\bar{u}_{i,j} = \int_{\Omega_p} u_{i,j} W(X; X - X_p) d\Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i(X_p)}{\partial x_j} = \int_{\Omega_p} \frac{\partial u_i(X)}{\partial x_j} W(X; X - X_p) d\Omega \quad (2)$$

式中,  $\bar{u}_{i,j}$  为场变量的梯度(二维问题,  $i, j = 1, 2$ ; 三维问题,  $i, j = 1, 2, 3$ ),  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ;  $\bar{u}_{i,j}$  为光滑后的场

变量梯度,  $\bar{u}_{i,j} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$ ;  $W(X; X - X_p)$  为光滑函数,

$$\int_{\Omega_p} u_{i,j} W(X; X - X_p) d\Omega = 1.$$

在光滑域内,光滑函数可表示为

$$W(X;X - X_p) = \begin{cases} 1/A_p & (X \in \Omega_p) \\ 0 & (X \notin \Omega_p) \end{cases} \quad (3)$$

式中,  $A_p$  为光滑域的面积(三维问题为光滑域的体积)。

应用散度定理至式(2)可得

$$\bar{u}_{i,j}(X_p) = \int_{\Gamma_p} u_i(X)W(X;X - X_p)\mathbf{n}d\Gamma - \int_{\Omega_p} u_i(X)W(X;X - X_p)d\Omega \quad (4)$$

式中,  $\mathbf{n}$  为光滑域边界上  $\Gamma_p$  的单位外法向量的大小。

将式(3)代入式(4)得到光滑梯度的计算式

$$\bar{u}_{i,j}(X_p) = \frac{1}{A_p} \int_{\Gamma_p} u_i(X)\mathbf{n}d\Gamma \quad (5)$$

梯度光滑的求解方式从域积分转变为边界积分,并且梯度光滑计算只需要场变量本身和光滑域边界的单位外法向量。

### 1.2 单元刚度矩阵的构造

将问题域  $\Omega$  离散为  $N$  个六面体单元,问题域  $\Omega$  中某个单元  $\Omega_e$  沿单元边的中点被分割为  $j$  个光滑域  $\Omega_{C_j}(1 \leq j \leq q)$ ,  $\Omega_{C_j} \subset \Omega_e \subset \Omega$ ,  $e$  为问题域内单元数。 $\Omega_e = \Omega_{C1} \cup \Omega_{C2} \cup \dots \cup \Omega_{Cq}$ ,  $\Omega_{C1} \cup \Omega_{C2} \cup \dots \cup \Omega_{Cq} = \Omega_e$ 。六面体单元划分光滑域示意图如图 2 所示。

FEM 中单元应变  $\boldsymbol{\varepsilon}$  与节点位移矢量  $\mathbf{u}$  之间的关系为

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \mathbf{B}_C(x)\mathbf{u} \quad (6)$$

式中:  $\mathbf{B}_C$  为单元应变-位移矩阵;  $x$  为积分点。

CS-FEM 要将式(6)中的  $\mathbf{B}_C$  修正为  $\tilde{\mathbf{B}}_C$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}_C$  包括 8 个光滑域,其形式为

$$\tilde{\mathbf{B}}_C = [\tilde{\mathbf{B}}_{C1}, \tilde{\mathbf{B}}_{C2}, \tilde{\mathbf{B}}_{C3}, \dots, \tilde{\mathbf{B}}_{C8}] \quad (7)$$

在三维问题域  $\Omega$  中,每一个  $\mathbf{B}_{Ci}(1 \leq i \leq 8)$  都是  $6 \times 3$  的矩阵,可以表示为

$$\tilde{\mathbf{B}}_{Ci} = \frac{1}{V} \int_{S_C} \mathbf{n}_C^T(x)N_i(x)dS = \int_{S_C} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{Cx} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{n}_{Cy} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{n}_{Cz} \\ \mathbf{n}_{Cy} & \mathbf{n}_{Cx} & 0 \\ 0 & \mathbf{n}_{Cz} & \mathbf{n}_{Cy} \\ \mathbf{n}_{Cz} & 0 & \mathbf{n}_{Cx} \end{bmatrix} (x)N_i(x)dS \quad (8)$$

( $C \in \{1, 2, \dots, q\}$ )

式中:  $N_i(x)$  为单元形函数;  $V$  为光滑域体积;  $\mathbf{n}_{Cx}$ 、

$\mathbf{n}_{Cy}$ 、 $\mathbf{n}_{Cz}$  为光滑域积分点上的单位外法向量。

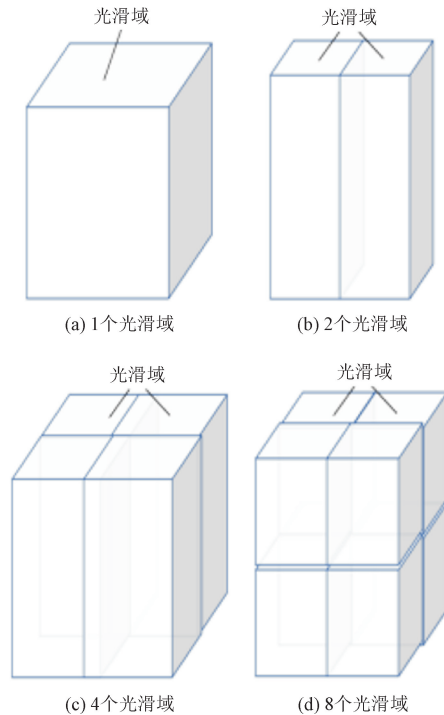


图 2 六面体单元划分光滑域示意图

Fig. 2 Schematic diagram of a hexahedral unit dividing a smooth domain

将光滑域上一个积分点代入式(8)得

$$\tilde{\mathbf{B}}_{Ci}(x_C) = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^b \begin{bmatrix} N_i(x_C)\mathbf{n}_{Cx} & 0 & 0 \\ 0 & N_i(x_C)\mathbf{n}_{Cy} & 0 \\ 0 & 0 & N_i(x_C)\mathbf{n}_{Cz} \\ N_i(x_C)\mathbf{n}_{Cy} & N_i(x_C)\mathbf{n}_{Cx} & 0 \\ 0 & N_i(x_C)\mathbf{n}_{Cz} & N_i(x_C)\mathbf{n}_{Cy} \\ N_i(x_C)\mathbf{n}_{Cz} & 0 & N_i(x_C)\mathbf{n}_{Cx} \end{bmatrix} A_C \quad (9)$$

式中:  $x_C$  为光滑域表面的积分点;  $b$  为光滑域上积分点个数;  $A_C$  为积分点所在光滑域表面面积。

光滑域表面积分点及单位外法向量如图 3 所示。

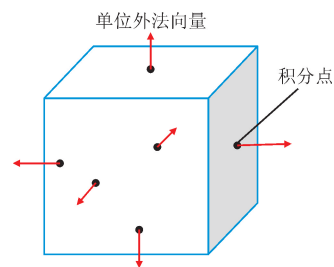


图 3 光滑域表面积分点及单位外法向量示意图

Fig. 3 Schematic diagram of the surface product score point

and unit outer normal vector of the smooth domain

将式(8)和式(9)代入式(7)得到  $\mathbf{B}_c$  的表达式。单元刚度矩阵为每个光滑域刚度矩阵求和,即

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{K}}^e &= \sum_{j=1}^q \int_{\Omega_c} \tilde{\mathbf{B}}_c^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{B}}_c d\Omega \\ &= \sum_{j=1}^q \tilde{\mathbf{B}}_c^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{B}}_c V_c\end{aligned}\quad (10)$$

式中,  $\mathbf{D}$  为材料矩阵。

## 2 网格模型验证

### 2.1 模型建立

使用 Light Speed VCT( GE 公司, 美国) 与 MRI Signa 3.0 T( GE 公司, 美国) 电子计算机断层扫描( computerized tomography, CT) 和磁共振成像( magnetic resonance imaging, MRI) 具体扫描参数( 表 1)。收集一名受试者右侧膝关节的 CT 和 MRI 数据, 继而在 Mimics 软件中, 重建出膝关节三维几何模型。将得到的膝关节三维几何模型导入 SolidWorks 软件, 进行逆向建模<sup>[4]</sup>。通过 HyperMesh 对膝关节三维模型进行网格划分<sup>[6]</sup>。

表 2 膝关节的材料与网格参数

Tab. 2 Material and mesh parameters of the knee joint

划分方法	结构	弹性模量/MPa	泊松比	网格尺寸/mm	接触面网格尺寸/mm	六面体单元数	四面体单元数
CS-FEM	骨	17 000	0.30	1.0	1.0	20 647	54 998
	半月板	59	0.49	0.5	0.5		
	关节软骨	5	0.46	0.5	0.5		
	韧带	215.3	0.4	1.0	1.0		
传统 FEM	骨	17 000	0.3	1.0	1.0	0	90 774
	半月板	59	0.49	0.5	0.5		
	关节软骨	5	0.46	0.5	0.5		
	韧带	215.3	0.4	1.0	1.0		

### 2.3 模型验证和对比

对模型进行应变和应力测试, 验证模型的有效性。具体的方法为: ①完全固定股骨、膝关节处中立位, 对胫骨上端施加 134 N 向前推力<sup>[4,19]</sup>, 观察 ACL 等效应力。②通过在股骨顶端施加纵向 750 N 荷载及 10 N·m 内翻力矩, 模拟膝内翻; 观察半月板、股骨软骨、胫骨软骨等效应力与最大剪切应力<sup>[20]</sup>。

CS-FEM 网格划分方法模型验证结果显示, 方法一: CS-FEM 模型验证结果发现胫骨平台平移为

表 1 CT 与 MRI 具体扫描参数

Tab. 1 CT and MRI specific scanning parameters

磁共振成像	T2 TSE	3DT1 TSE	DWI EPI
回波时间/ms	3 500	5.18	4 900
重复时间/ms	95	2.56	119
翻转角度/(°)	170	10	—
切片厚度/mm	4	2.5	5.5
平均采集次数	1	1	3
时间/s	93	19	65

注: 电子计算机断层扫描: 扫描层厚 0.5 mm, 层间距 0.5 mm, CT 排数: 320, 准直器宽度: 0.5, 图片大小: 512 × 512, 图像格式: DICOM; 表中 DWI EPI 序列翻转角度“—”表示该序列无需设置相关参数。

### 2.2 材料属性与边界载荷

材料定义根据前人研究得出相应膝关节各个结构的材料参数( 表 2)<sup>[4]</sup> 和约束载荷, 完整膝关节的约束和载荷条件: ACL 后交叉韧带、内侧副韧带、外侧副韧带在止点处与股骨和胫骨完全固定; 胫骨与腓骨相对固定; 内侧副韧带与股骨和胫骨内侧光滑接触; 股骨近端和中端完全固定<sup>[19]</sup>; 同时有限元模型的网格尺寸( 表 2)。

4.75 mm( 图 4), 同样的载荷条件下, 与鲍春雨等<sup>[4]</sup> 的膝关节模型( 4.30 mm) 基本一致。且与 PEÑA 等( 4.75 mm)<sup>[21]</sup>、刘晓敏等( 4.83 mm)<sup>[22]</sup>、GABRIEL 等( 5.0 mm)<sup>[23]</sup>、SONG 等( 4.6 mm)<sup>[24]</sup> 提出的膝关节有限元模型验证结果更加接近。ACL 等效应力为 18.04 ~ 20.29 MPa, 与文献[4, 19] 结果基本一致。方法二: 模拟膝内翻时半月板、股骨软骨、胫骨软骨等效应力为: 14.93、2.22、2.50 MPa; 最大剪切应力为: 7.75、1.18、1.41 MPa( 图 4)。本研究模型与杨骏良模型<sup>[20]</sup> 基本一致。

传统 FEM 网格划分方法模型验证结果显示,方法一:传统 FEM 模型验证结果发现胫骨平台平移为 5.30 mm(图 4),同样的载荷条件下,与 CS-FEM 模型相差较大。与鲍春雨等(4.30 mm)<sup>[4]</sup>、PEÑA 等(4.75 mm)<sup>[21]</sup>、刘晓敏等(4.83 mm)<sup>[22]</sup>、SONG 等(4.6 mm)<sup>[24]</sup>提出的膝关节有限元模型验证结果相

差更大。而与 GABRIEL 等(5.0 mm)<sup>[23]</sup>相差较小。方法二:模拟膝内翻时半月板、股骨软骨、胫骨软骨等效应力为:12.14、1.78、2.60 MPa;最大剪切应力为:6.94、0.94、1.46 MPa(图 4)。本研究模型与杨骏良模型<sup>[20]</sup>存在较大差异。

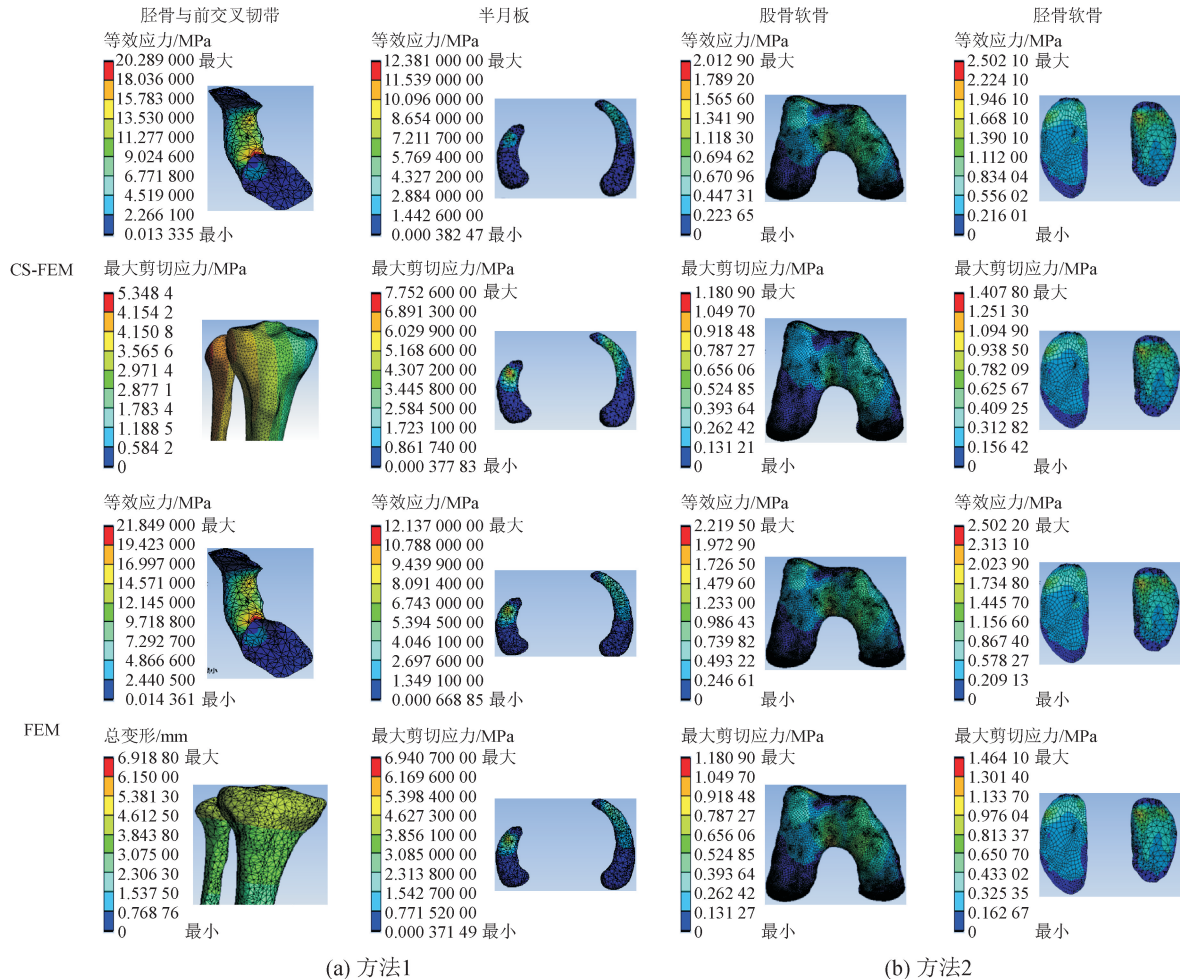


图4 两种网格划分方法模型验证结果

Fig. 4 Model validation results of two meshing methods

因此传统 FEM 划分的网格质量与 CS-FEM 有较大差距,从应力、应变结果看 CS-FEM 与前人研究具有高度相似。

### 3 讨论

FEM 和 CS-FEM 是两种在工程和生物力学中广泛应用的数值模拟技术。二者均用于建立复杂结构的仿真模型,如膝关节模型,用于分析生物组织在不同载荷条件下的应力和变形。本研究将从网格划分、计算效率、精度和适用性 4 个方面对这两种方法进行讨论。

### 3.1 网格划分

FEM 和 CS-FEM 的核心区别之一在于网格的划分方式和单元类型的选择<sup>[25]</sup>。传统的 FEM 通常使用四面体和六面体单元来划分几何结构<sup>[7-8]</sup>。六面体单元能够提供较高的计算精度,但生成高质量的六面体网格非常复杂<sup>[9]</sup>。而四面体单元虽然容易生成,但需要更多数量才能达到同等精度<sup>[8]</sup>。相比之下,CS-FEM 通过传统 FEM 网格的基础上加入“平滑”技术,允许使用多面体单元进行网格划分。这种方法可以减少所需单元的数量,并且更容易适应几何复杂的区域,从而显著降低计算资源的消

耗<sup>[18]</sup>。本研究的膝关节有限元模型采用 CS-FEM 通过优化四面体和六面体网格的组合(四面体为 54 998 个,六面体为 20 647 个。见表 2),使其数量分别控制在合理范围内。采用传统的 FEM 对膝关节有限元模型进行划分,将其全部划分为四面体(90 774 个)。两种方法的单元总数量基本一致,但是传统 FEM 的精度较 CS-FEM 差非常多。CS-FEM 可以通过优化四面体和六面体网格的组合,使其数量分别控制在合理范围内,而传统的 FEM 需要更高的单元数才能达到相似的精度。

### 3.2 计算效率

FEM 和 CS-FEM 在计算效率上的差异也非常明显。传统 FEM 模型中,采用细密的四面体或六面体单元划分,计算时间和内存消耗会大幅增加。这在生物力学建模中尤其表现突出,如在膝关节的三维动态有限元分析中,模型通常需要数万个单元来描述膝关节在不同角度下的受力情况<sup>[26]</sup>。CS-FEM 则通过平滑技术减少了网格划分的复杂度,同时降低了单元数量,使得求解过程更加高效<sup>[27-30]</sup>。在一个膝关节有限元模型中,若传统 FEM 需要 2 倍或以上的单元来达到 CS-FEM 相同的精度,则计算时间和内存需求也会呈线性增加。这使得 CS-FEM 在处理大型生物力学模型时表现出明显的优势<sup>[28]</sup>。

### 3.3 计算精度

在计算精度方面,传统 FEM 依赖于网格的精细度来提高计算结果的准确性,但这种方法存在局限性。即使是高质量的六面体单元,在某些复杂几何形状和非线性材料特性下,其应力和变形计算结果也可能出现误差<sup>[31]</sup>。CS-FEM 通过在有限元单元内部引入平滑函数,将应力和应变的计算更加精确化。这种方法不仅减少了网格依赖性,还可以更好地捕捉膝关节软组织如软骨层和韧带的非线性响应,从而提高整体模型的准确性。特别是在模拟高应力集中区域,如膝关节弯曲运动中的胫骨和股骨接触面,CS-FEM 能有效地减少局部应力集中现象,提供更可靠的应力分布图<sup>[32-35]</sup>。

### 3.4 适用性

两种方法的适用性也存在差异。传统 FEM 广泛应用于结构工程和生物力学建模,是研究和应用最成熟的方法之一。它在简单几何结构和线性材料

建模中效果尤为突出,如钢板固定系统的有限元仿真<sup>[36]</sup>。

然而,在涉及复杂几何和生物材料(如软骨、韧带等)的建模中,CS-FEM 具有优势。由于其对网格单元类型和数量的优化,CS-FEM 能够在复杂的生物结构中更好地表现<sup>[37-40]</sup>。例如,在髌股关节的受力研究中,CS-FEM 可以更精确地模拟髌骨在膝关节屈曲角度变化下的受力情况。此外,在预测膝关节置换前后不同结构受力分布的研究中,CS-FEM 也被证明是一种高效且精确的模拟方法。

## 4 结束语

FEM 和 CS-FEM 在膝关节建模中的应用各有优劣。传统 FEM 方法由于其应用的广泛性和成熟性,在处理相对简单的几何结构和线性材料时具有较高的计算精度和稳定性。然而,在复杂结构和非线性材料的生物力学模拟中,CS-FEM 通过优化网格划分和减少应力集中,提供了更高的计算效率和精度。因此,在未来膝关节和其他复杂生物结构的建模中,CS-FEM 有望得到更广泛的应用。

### 参考文献:

- [1] ESTELL E G, MURPHY L A, GANGI L R, et al. Attachment of cartilage wear particles to the synovium negatively impacts friction properties[J]. *Journal of biomechanics*, 2021, 127: 110668.
- [2] 陈彦飞, 鲁超, 赵勇, 等. 基于 CT 影像动态膝关节有限元模型的构建及仿真力学分析[J]. *中国骨伤*, 2020, 33(5): 479-484.  
CHEN Yanfei, LU Chao, ZHAO Yong, et al. Construction and simulation mechanical analysis of dynamic knee joint finite element model based on CT image[J]. *China journal of orthopaedics and traumatology*, 2020, 33(5): 479-484(in Chinese).
- [3] RAO H, BAKKER R, MCLACHLIN S, et al. Computational study of extrinsic factors affecting ACL strain during single-leg jump landing[J]. *BMC musculoskeletal disorders*, 2024, 25(1): 318.
- [4] 鲍春雨, 郭宝川, 孟庆华. 人体膝关节有限元模型建立及其有效性验证[J]. *应用力学学报*, 2017, 34(3): 559-563.  
BAO Chunyu, GUO Baochuan, MENG Qinghua. A finite element model of human knee joint and its validation[J]. *Chinese journal of applied mechanics*, 2017, 34(3): 559-563(in Chinese).
- [5] 姜亚琼, 路坦, 徐彪, 等. 内侧副韧带不同程度损伤时膝关节的应力变化[J]. *中国组织工程研究*, 2024, 28(33): 5270-5275.  
JIANG Yaqiong, LU Tan, XU Biao, et al. Stress changes of knee joint with different degrees of medial collateral ligament injury[J]. *Chinese journal of tissue engineering research*, 2024, 28(33):

- 5270-5275 (in Chinese).
- [6] 张楠, 孟庆华, 鲍春雨, 等. 脑卒中患者运动过程中动力学特征的智能预测[J]. 医用生物力学, 2024, 39(3): 489-496.  
ZHANG Nan, MENG Qinghua, BAO Chunyu, et al. Intelligent prediction for dynamic characteristics of stroke patients during exercise[J]. Journal of medical biomechanics, 2024, 39(3): 489-496 (in Chinese).
- [7] RAHIMIZADEH A, NOURMOHAMMADI Z, ARABNEJAD S, et al. Porous architected biomaterial for a tibial-knee implant with minimum bone resorption and bone-implant interface micromotion [J]. Journal of the mechanical behavior of biomedical materials, 2018, 78: 465-479.
- [8] ALI A A, HARRIS M D, SHALHOUB S, et al. Combined measurement and modeling of specimen-specific knee mechanics for healthy and ACL-deficient conditions[J]. Journal of biomechanics, 2017, 57: 117-124.
- [9] FAN Y H, ZHOU G Y, ZHAN G T, et al. Comparative study on the mechanical behavior of the interface between natural cartilage and artificial cartilage [J]. Soft materials, 2021, 19(4): 400-419.
- [10] LIU G R, NGUYEN T T, DAI K Y, et al. Theoretical aspects of the smoothed finite element method (SFEM) [J]. International journal for numerical methods in engineering, 2007, 71(8): 902-930.
- [11] LIU G R. A G space theory and a weakened weak ( $W^2$ ) form for a unified formulation of compatible and incompatible methods: part I theory[J]. International journal for numerical methods in engineering, 2010, 81(9): 1093-1126.
- [12] CHEN J S, WU C T, YOON S, et al. A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods[J]. International journal for numerical methods in engineering, 2001, 50(2): 435-466.
- [13] LIU G R. Meshfree methods: moving beyond the finite element method[M]. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2009.
- [14] ALMEIDA E S, SPILKE R L. Mixed and penalty finite element models for the nonlinear behavior of biphasic soft tissues in finite deformation: part II — nonlinear examples[J]. Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, 1997, 1(2): 151-170.
- [15] DAI K Y, LIU G R, NGUYEN T T. An n-sided polygonal smoothed finite element method (nSFEM) for solid mechanics [J]. Finite elements in analysis and design, 2007, 43(11/12): 847-860.
- [16] LIU G R, NGUYEN-THOI T, NGUYEN-XUAN H, et al. A node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solutions to solid mechanics problems [J]. Computers & structures, 2009, 87(1/2): 14-26.
- [17] LIU G R, NGUYEN-THOI T, LAM K Y. A novel alpha finite element method ( $\alpha$ FEM) for exact solution to mechanics problems using triangular and tetrahedral elements[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2008, 197(45/46/47/48): 3883-3897.
- [18] 叶楠, 程建宇, 冯世哲. 基于 CS-FEM 的某制导炮弹弹体动力特性分析[J]. 机械设计, 2024, 41(4): 14-19.  
YE Nan, CHENG Jianyu, FENG Shizhe. Analysis on dynamic characteristics of guided projectile body based on CS-FEM [J]. Journal of machine design, 2024, 41(4): 14-19 (in Chinese).
- [19] 任爽, 时会娟, 张家豪, 等. 前交叉韧带重建术后移植植物应力的有限元分析[J]. 北京大学学报(医学版), 2021, 53(5): 865-870.  
REN Shuang, SHI Huijuan, ZHANG Jiahao, et al. Finite element analysis of the graft stresses after anterior cruciate ligament reconstruction [J]. Journal of Peking University (health sciences), 2021, 53(5): 865-870 (in Chinese).
- [20] 杨骏良, 路坦, 徐彪, 等. 前交叉韧带部分断裂对膝关节应力影响的三维有限元分析[J]. 中国组织工程研究, 2024, 28(9): 1347-1353.  
YANG Junliang, LU Tan, XU Biao, et al. Three-dimensional finite element analysis of effects of partial anterior cruciate ligament rupture on knee joint stress[J]. Chinese journal of tissue engineering research, 2024, 28(9): 1347-1353 (in Chinese).
- [21] PEÑA E, CALVO B, MARTÍNEZ M A, et al. A three-dimensional finite element analysis of the combined behavior of ligaments and menisci in the healthy human knee joint [J]. Journal of biomechanics, 2006, 39(9): 1686-1701.
- [22] 刘晓敏, 王学锋, 吕劲, 等. 膝关节后外侧复合体有限元模拟重建的研究[J]. 中国修复重建外科杂志, 2012, 26(11): 1310-1314.  
LIU Xiaomin, WANG Xuefeng, LÜ Jin, et al. Analog reconstruction of posterolateral complex by the finite element [J]. Chinese journal of reparative and reconstructive surgery, 2012, 26(11): 1310-1314 (in Chinese).
- [23] GABRIEL M T, WONG E K, WOO S L Y, et al. Distribution of in situ forces in the anterior cruciate ligament in response to rotatory loads[J]. Journal of orthopaedic research, 2004, 22(1): 85-89.
- [24] SONG Y H, DEBSKI R E, MUSAHL V, et al. A three-dimensional finite element model of the human anterior cruciate ligament: a computational analysis with experimental validation[J]. Journal of biomechanics, 2004, 37(3): 383-390.
- [25] GUAN W Y, BHOWMICK S, GAO G J, et al. A phase-field modelling for 3D fracture in elasto-plastic solids based on the cell-based smoothed finite element method [J]. Engineering fracture mechanics, 2021, 254: 107920.
- [26] LI E, CHEN J N, ZHANG Z P, et al. Smoothed finite element method for analysis of multi-layered systems-applications in biomaterials[J]. Computers & structures, 2016, 168: 16-29.
- [27] LIU G R, TRUNG N T. Smoothed finite element methods[M]. Boca Raton: CRC Press, 2010.
- [28] LIU G R, NOURBAKHSNIA N, CHEN L, et al. A novel general formulation for singular stress field using the es-fem method for the analysis of mixed-mode cracks [J]. International journal of

- computational methods, 2010, 7(1): 191-214.
- [29] HOFACKER M, MIEHE C. A phase field model of dynamic fracture: robust field updates for the analysis of complex crack patterns [J]. International journal for numerical methods in engineering, 2013, 93(3): 276-301.
- [30] GABRIEL A A, LI D, CHIOCCETTI S, et al. A unified first-order hyperbolic model for nonlinear dynamic rupture processes in diffuse fracture zones [J]. Philosophical transactions of the royal society a: mathematical, physical and engineering sciences, 2021, 379(2196): 20200130.
- [31] 常先坤, 张建新. 不同鞋底厚度的运动鞋对高中生步态参数和爆发力的影响 [J]. 应用力学学报, 2024, 41(3): 719-728. CHANG Xiankun, ZHANG Jianxin. Gait parameters and explosive power of sports shoes with different sole thickness of high school students [J]. Chinese journal of applied mechanics, 2024, 41(3): 719-728 (in Chinese).
- [32] RAINA A, MIEHE C. A phase-field model for fracture in biological tissues [J]. Biomechanics and modeling in mechanobiology, 2016, 15(3): 479-496.
- [33] MIEHE C, HOFACKER M, SCHÄNZEL L M, et al. Phase field modeling of fracture in multi-physics problems. Part II. Coupled brittle-to-ductile failure criteria and crack propagation in thermo-elastic - plastic solids [J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2015, 294: 486-522.
- [34] ULMER H, HOFACKER M, MIEHE C. Phase field modeling of brittle and ductile fracture [J]. PAMM, 2013, 13(1): 533-536.
- [35] ALESSI R, MARIGO J J, MAURINI C, et al. Coupling damage and plasticity for a phase-field regularisation of brittle, cohesive and ductile fracture: one-dimensional examples [J]. International journal of mechanical sciences, 2018, 149: 559-576.
- [36] 杜娟, 夏晓宇, 孟琳, 等. 基于肌骨动力学与有限元耦合模型的脊柱生物力学研究应用进展 [J]. 应用力学学报, 2024, 41(1): 233-240. DU Juan, XIA Xiaoyu, MENG Lin, et al. A review on applications of computational models combining finite element methods and musculoskeletal model [J]. Chinese journal of applied mechanics, 2024, 41(1): 233-240 (in Chinese).
- [37] DUDA F P, CIARBONETTI A, SÁNCHEZ P J, et al. A phase-field/gradient damage model for brittle fracture in elastic - plastic solids [J]. International journal of plasticity, 2015, 65: 269-296.
- [38] BORDEN M J, HUGHES T J R, LANDIS C M, et al. A phase-field formulation for fracture in ductile materials: Finite deformation balance law derivation, plastic degradation, and stress triaxiality effects [J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2016, 312: 130-166.
- [39] AMBATI M, GERASIMOV T, DE LORENZIS L. Phase-field modeling of ductile fracture [J]. Computational mechanics, 2015, 55(5): 1017-1040.
- [40] LIU G W, LI Q B, MSEKH M A, et al. Abaqus implementation of monolithic and staggered schemes for quasi-static and dynamic fracture phase-field model [J]. Computational materials science, 2016, 121: 35-47.

(编辑 吕茵)