

# 考虑剪切效应的钢筋混凝土纤维梁 单元徐变分析方法

邓继华<sup>1,2</sup>, 鲁朵朵<sup>1</sup>, 谭建平<sup>1</sup>, 田仲初<sup>1</sup>

(1. 长沙理工大学土木与环境工程学院, 410114 长沙;  
2. 长沙理工大学桥梁工程安全控制教育部重点实验室, 410114 长沙)

**摘要:**基于 Euler-Bernoulli 梁理论的经典纤维模型忽略了剪切变形给截面带来的影响, 为了建立更加精确的钢筋混凝土纤维梁单元徐变分析方法, 基于考虑剪切效应的纤维梁单元, 根据 Timoshenko 梁理论, 推导了该纤维梁单元的刚度矩阵, 利用混凝土徐变分析的初应变法, 导出单元徐变等效节点力的有限元列式, 最终建立了钢筋混凝土纤维梁单元徐变分析的有限元方法。利用 FORTRAN 语言编制了计算程序, 进行了普通梁与钢筋混凝土梁的弹性分析, 以及钢筋混凝土梁的徐变分析, 分别与解析解、ABAQUS 有限元解以及其他文献解进行了比较。结果表明: 该方法在准确计入剪切效应的同时, 能清晰界定钢筋与混凝土在钢筋混凝土梁徐变性能中的行为; 同时也表明钢筋混凝土梁徐变分析模型中计入钢筋能有效提高计算结果的精度。

**关键词:** 钢筋混凝土纤维梁单元; 徐变; 剪切效应; Timoshenko 梁理论; 有限元分析

中图分类号: O34; TU378.2 文献标志码: A 文章编号: 1000-4939(2025)06-1330-10

## Creep analysis method for reinforced concrete fiber beam elements considering shear effect

DENG Jihua<sup>1,2</sup>, LU Duoduo<sup>1</sup>, TAN Jianping<sup>1</sup>, TIAN Zhongchu<sup>1</sup>

(1. School of Civil and Environmental Engineering, Changsha University of Science & Technology, 410114 Changsha, China;  
2. Key Laboratory of Safety Control of Bridge Engineering of Ministry of Education, Changsha University of Science & Technology, 410114 Changsha, China)

**Abstract:** The classic fiber model based on Euler-Bernoulli beam theory overlooks the influence of shear deformation on the section of the beam. In order to establish a more accurate creep analysis method for reinforced concrete fiber beam elements, this paper proposes a fiber beam element considering shear effects based on Timoshenko beam theory. The stiffness matrix of the fiber beam element is derived, and the finite element equation for the equivalent nodal force of creep analysis based on concrete creep analysis initial strain method is obtained. Finally, a finite element method for creep analysis of reinforced concrete fiber

收稿日期: 2024-03-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 52278142); 湖南省教育厅资助项目 (No. 21A0187); 广东省自然科学基金资助项目 (No. 2015A030310141); 桥梁结构健康与安全国家重点实验室开放基金资助项目 (No. BHSKL21-06-GF)

通信作者: 邓继华, 教授. E-mail: jihudeng@csust.edu.cn

引用格式: 邓继华, 鲁朵朵, 谭建平, 等. 考虑剪切效应的钢筋混凝土纤维梁单元徐变分析方法[J]. 应用力学学报, 2025, 42(6): 1330-1339.

DENG Jihua, LU Duoduo, TAN Jianping, et al. Creep analysis method for reinforced concrete fiber beam elements considering shear effect[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2025, 42(6): 1330-1339.

beam elements is established. A computing program is developed in FORTRAN language, and elastic analysis for normal beam and reinforced concrete beam, and creep analysis for reinforced concrete beam are conducted. The results are compared with analytical solutions, commercial software and other literature, indicating that the proposed method can accurately consider the shear effects and clearly define the behaviors of steel and concrete in the creep performance of reinforced concrete beams. Moreover, including steel in the creep analysis model can effectively improve the accuracy of the results.

**Key words:** reinforced concrete fiber beam element; creep; shear effect; Timoshenko beam theory; finite element analysis

经典的 Euler-Bernoulli 梁理论在实际工程结构分析中应用非常广泛,但由于未考虑剪切变形给截面带来的影响,在梁的高跨比较大时会有一定的误差<sup>[1]</sup>。相对而言,采用考虑剪切变形影响的深梁理论会改善分析结果<sup>[2-3]</sup>,这其中 Timoshenko 梁理论由于简单、求解方便、应用广泛而成为经典<sup>[4]</sup>。将 Timoshenko 梁理论与纤维梁模型结合能有效改善传统纤维梁模型<sup>[5-6]</sup>在模拟以剪切变形为主的结构行为时效果不好的缺点,为结构的非线性分析开辟了新的道路。在材料非线性分析方面,许多学者<sup>[7-12]</sup>通过引入纤维材料的多轴本构关系,推导了能考虑剪切变形影响的纤维梁模型。对于几何非线性分析,胡郑州等<sup>[13]</sup>推导了考虑剪切效应的三维纤维梁大位移增量非线性有限元 UL 列式,但未考虑材料非线性;李嘉钰等<sup>[1]</sup>在此基础上进行了改进,通过引入弹塑性增量理论,实现了能考虑结构几何非线性和材料非线性的功能。基于有限元理论发展的纤维梁单元,在进行几何与材料非线性分析时计算比较繁琐。林贤宏等<sup>[14]</sup>从有限质点法的基本原理出发推导了可考虑剪切和扭转变形的有限质点法纤维梁单元,几何与材料双非线性均已计入,相对于有限元法而言,有限质点法中由于各质点运动方程的求解过程相互独立,不涉及结构刚度矩阵的集成和求逆,无需迭代求解,因此能避免结构刚度矩阵奇异造成的数值求解困难,适合于求解复杂的结构非线性问题,因而应用较广<sup>[15-18]</sup>。在基于考虑剪切效应的纤维梁理论开展徐变效应研究方面,模型或结构试验上有部分成果<sup>[19-20]</sup>,但理论与分析方法方面研究较少。

对于钢筋混凝土梁的徐变分析,目前一般采用 Euler-Bernoulli 梁单元进行分析计算<sup>[21]</sup>,该方法除了未考虑剪切效应外,对于钢筋与混凝土之间由于徐变而产生的应力重分布计算不方便也不准确<sup>[22-23]</sup>。为解决此问题,许多学者改用较复杂的二

维或三维单元来进行<sup>[22,24-28]</sup>,但此方法又存在计算结果不方便直接用于结构设计的缺点。

鉴于此,本研究将徐变分析的初应变法<sup>[29-30]</sup>用于基于 Timoshenko 梁理论推导的考虑剪切效应的钢筋混凝土纤维梁单元,建立此类型单元的徐变分析方法。该方法不仅能准确计入剪切效应对结构受力行为的影响,还能解决徐变引起的混凝土和钢筋之间应力重分布问题,得到的计算结果,如弯矩、剪力以及轴力等能直接用于钢筋混凝土梁的结构分析与设计。

## 1 考虑剪切效应的钢筋混凝土纤维梁单元

### 1.1 基本假设

如图 1 所示钢筋混凝土纤维梁单元,为便于后续推导,采用以下假设:①满足平截面假定,但法线转角与中线倾角一般不再相等,两者差值为梁的横向剪切应变;②钢筋与混凝土充分黏结,两者变形协调;③剪应力与剪应变均匀分布。

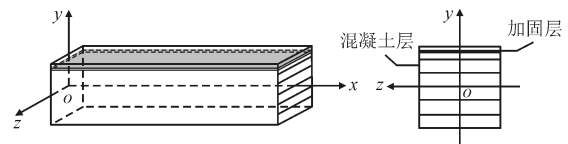


图1 钢筋混凝土纤维梁单元

Fig. 1 Reinforced concrete fiber beam element

### 1.2 单元刚度矩阵及平衡方程

每个钢筋混凝土纤维梁单元有 2 个节点,每个节点有 3 个自由度, $\mathbf{u}^e = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2]^T$  为单元节点位移向量,单元轴线上距始端  $x$  处截面的位移  $\mathbf{u} = [u_0 \quad \theta_0 \quad \gamma_0]^T$  可用  $\mathbf{u}^e$  表示为

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}(x) \mathbf{u}^e \quad (1)$$

式中,  $N(x)$  为形函数, 且有<sup>[31]</sup>

$$N(x) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & N_4 & 0 & N_5 & N_6 \\ 0 & N_7 & N_8 & 0 & N_9 & N_{10} \end{bmatrix},$$

$$N_1 = 1 - \zeta, \quad N_2 = \zeta, \quad N_3 = \frac{6\bar{\Phi}}{l}(-\zeta + \zeta^2),$$

$$N_4 = \bar{\Phi}[1 - 4\zeta + 3\zeta^2 + \Phi(1 - \zeta)],$$

$$N_5 = -\frac{6\bar{\Phi}}{l}(-\zeta + \zeta^2),$$

$$N_6 = \bar{\Phi}(-2\zeta + 3\zeta^2 + \Phi\zeta),$$

$$N_7 = -\frac{12\Lambda\bar{\Phi}}{l^3}, \quad N_8 = \frac{6\Lambda\bar{\Phi}}{l^2}, \quad N_9 = \frac{12\Lambda\bar{\Phi}}{l^3},$$

$$N_{10} = \frac{6\Lambda\bar{\Phi}}{l^2}, \quad \zeta = x/L, \quad \Lambda = \frac{EI}{kGA},$$

$$\Phi = -\frac{12\Lambda}{l^2} = \frac{12EI}{kGA l^2}, \quad \bar{\Phi} = \frac{1}{(1 + \Phi)}$$

式中:  $L$  为单元长度;  $EI$ 、 $GA$  分别为截面的抗弯及抗剪刚度;  $k$  为剪切修正系数。

由式(1)可建立单元轴线上任一点轴向应变、曲率以及剪应变与节点位移的关系为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \psi_0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{du_0}{dx} \\ \frac{d\theta_0}{dx} \\ \gamma_0 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_0 \mathbf{u}^e \quad (2)$$

$$\text{式中, } \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & B_4 & 0 & B_5 & B_6 \\ 0 & B_7 & B_8 & 0 & B_9 & B_{10} \end{bmatrix}$$

且有

$$B_1 = -\frac{1}{l}, \quad B_2 = \frac{1}{l}, \quad B_3 = 6\bar{\Phi}\left(\frac{2x}{l^3} - \frac{1}{l^2}\right),$$

$$B_4 = -\bar{\Phi}\left(\frac{\Phi}{l} - \frac{6x}{l^2} + \frac{4}{l}\right), \quad B_5 = -B_3,$$

$$B_6 = \bar{\Phi}\left(\frac{\Phi}{l} + \frac{6x}{l^2} - \frac{2}{l}\right), \quad B_7 = -\frac{12\Lambda\bar{\Phi}}{l^3},$$

$$B_8 = -\frac{6\Lambda\bar{\Phi}}{l^2}, \quad B_9 = -B_{c,7}, \quad B_{10} = B_8$$

在对钢筋混凝土梁进行如图 1 所示的纤维分层后, 任意第  $i$  层的轴向应变  $\varepsilon_i$  由平截面假定可得到, 有

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 + y_i \psi_0 \quad (3)$$

式中,  $y_i$  为第  $i$  层中心到形心轴的距离。

首先推导钢筋混凝土纤维梁中混凝土纤维对单元刚度矩阵的贡献。根据广义胡克定理, 在单元内

部具有初应变的情况下, 混凝土纤维层应力表达式为

$$\begin{bmatrix} \sigma_{c,i} \\ \tau_{c,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_c & 0 \\ 0 & G_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_i - \varepsilon_{c,i}^0 \\ \gamma_0 - \gamma_{c,i}^0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中: 下标  $c$  表示混凝土;  $\sigma_{c,i}$ 、 $\tau_{c,i}$  分别为第  $i$  层混凝土纤维的轴向应力及剪应力;  $E_c$ 、 $G_c$  分别为混凝土的弹性模量与剪切模量;  $\varepsilon_{c,i}^0$ 、 $\gamma_{c,i}^0$  为混凝土徐变所引起的初应变的轴向应变和剪切应变, 具体计算见后续部分。

对截面内所有混凝土纤维层积分, 可得到截面力  $\mathbf{P}_c$  的表达式为

$$\mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} n_c \\ m_c \\ q_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n A_i \sigma_{c,i} \\ \sum_{i=1}^n A_i \sigma_{c,i} y_i \\ \sum_{i=1}^n k A_i \tau_{c,i} \end{bmatrix} \quad (5)$$

对式(5)微分, 有

$$\delta \mathbf{P}_c = \mathbf{D}_c \delta \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (6)$$

可得到截面刚度矩阵  $\mathbf{D}_c$  为

$$\mathbf{D}_c = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n A_i E_c & \sum_{i=1}^n A_i E_c y_i & 0 \\ \sum_{i=1}^n A_i E_c y_i & \sum_{i=1}^n A_i E_c y_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^n k A_i G_c \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中,  $k_c$  为截面混凝土部分的剪切修正系数。

对式(2)微分, 有

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{B}_0 \delta \mathbf{u}^e \quad (8)$$

基于虚功原理, 有

$$\delta(\mathbf{u}^e)^T \mathbf{F}_c = \int_0^L \delta \boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{P}_c dx \quad (9)$$

式中:  $\mathbf{F}_c$  为混凝土部分对单元节点力的贡献;  $L$  为单元长度。

联立式(8)对式(9)整理得

$$\mathbf{F}_c = \int_0^L \mathbf{B}_0^T \mathbf{P}_c dx \quad (10)$$

联立式(6), 对式(10)微分得

$$\delta \mathbf{F}_c = \int_0^L \mathbf{B}_0^T \mathbf{D}_c \mathbf{B}_0 dx \delta \mathbf{u}^e = \mathbf{k}_c \delta \mathbf{u}^e \quad (11)$$

式中,  $\mathbf{k}_c \int_0^L \mathbf{B}_0^T \mathbf{D}_c \mathbf{B}_0 dx$  为混凝土部分对钢筋混凝土纤维梁在局部坐标系下单元刚度矩阵的贡献。

在求钢筋对钢筋混凝土纤维梁在局部坐标系下单元刚度矩阵的贡献  $k_s$  时,暂只考虑钢筋纤维层仅有一层,假定钢筋在轴向只承受均匀应变  $\varepsilon_s$  以及剪应变  $\tau_s$ ,钢筋本身转角  $\theta_s$  和曲率  $\psi_s$  为0。根据前述钢筋与混凝土充分黏结,两者变形协调的假定,有

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \tau_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{du_0}{dx} - y_s \frac{d\theta}{dx} \\ \gamma_0 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_s \mathbf{u}^e \quad (12)$$

式中,  $y_s$  为钢筋到形心轴的距离,且

$$\mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{s,b} \\ \mathbf{B}_{s,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{s,1} & B_{s,2} & B_{s,3} & B_{s,4} & B_{s,5} & B_{s,6} \\ 0 & B_{s,7} & B_{s,8} & 0 & B_{s,9} & B_{s,10} \end{bmatrix},$$

$$B_{s,1} = -B_{s,4} = -\frac{1}{L},$$

$$B_{s,2} = 6 \bar{\Phi} y_s \left( \frac{2x}{L^3} - \frac{1}{L^2} \right),$$

$$B_{s,3} = \bar{\Phi} y_s \left( \frac{\Phi}{L} - \frac{6x}{L^2} + \frac{4}{L} \right),$$

$$B_{s,5} = 6 \bar{\Phi} y_s \left( \frac{2x}{L^3} - \frac{1}{L^2} \right),$$

$$B_{s,6} = -\bar{\Phi} y_s \left( \frac{\Phi}{L} + \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right),$$

$$B_{s,7} = -B_{s,9} = -\frac{12\Lambda \bar{\Phi}}{L^3},$$

$$B_{s,8} = -B_{s,10} = -\frac{6\Lambda \bar{\Phi}}{L^2}$$

参照混凝土纤维层的推导,不难得出钢筋层对钢筋混凝土纤维梁在局部坐标系下单元刚度矩阵的贡献为

$$\mathbf{k}_s = \mathbf{k}_{s,b} + \mathbf{k}_{s,j} = E_s A_s \int_L \mathbf{B}_{s,b}^T \mathbf{B}_{s,b} dx + k_s G_s A_s \int_L \mathbf{B}_{s,j}^T \mathbf{B}_{s,j} dx \quad (13)$$

式中:  $E_s A_s$ 、 $G_s A_s$  分别为钢筋的抗压与抗剪刚度;  $k_s$  为钢筋剪切修正系数。

## 2 混凝土徐变效应分析

### 2.1 混凝土徐变的增量法计算

对于处于复杂应力状态下的混凝土,其应力应变关系计算式为<sup>[32]</sup>

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{A} \Delta \boldsymbol{\sigma}_0 J(t, \tau_0) + \int_{\tau_0}^t J(t, \tau) \mathbf{A} \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\tau} d\tau \quad (14)$$

式中:  $J(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau_0)$  为徐变柔量;  $C(t, \tau_0)$  称为徐变度,定义为单位应力作用下产生的徐

变;  $\tau_0$  为加载龄期;  $t$  为计算龄期;  $E(\tau)$  为  $\tau$  时刻的弹性模量; 矩阵  $\mathbf{A}$  用以考虑泊松比的影响,一般将混凝土的徐变泊松比视为常数并等于瞬时弹性应变的泊松比<sup>[32]</sup>。因此,对于考虑剪切效应的 Timoshenko 平面纤维梁单元,有

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2(1 + \mu) \end{bmatrix} \quad (15)$$

Timoshenko 平面纤维梁单元的应力和应变分别为

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \tau_{xy}]^T,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \gamma_{xy}]^T \quad (16)$$

采用增量法进行混凝土结构徐变分析时,一般将时间轴划分为一系列时段,即  $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$ , 其中  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ , 在假设混凝土弹性模量不随时间变化,即  $E(\tau)$  为常数  $E$  的情况下,首先得到徐变应变的计算式为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e(t) = \mathbf{A} \Delta \boldsymbol{\sigma}_0 \frac{\varphi(t, \tau_0)}{E} + \frac{1}{E} \int_{\tau_0}^t \mathbf{A} \varphi(t, \tau) \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\tau} d\tau \quad (17)$$

在假设时间段划分很小的前提下,可将式(17)改写为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e(t) = \mathbf{A} [\Delta \boldsymbol{\sigma}_0 C(t, t_0) + \Delta \boldsymbol{\sigma}_1 C(t, t_1) + \Delta \boldsymbol{\sigma}_2 C(t, t_2) + \dots] \quad (18)$$

式中,  $\Delta \boldsymbol{\sigma}_i$  为时间轴上  $t_i$  时刻的应力增量。

基于式(18)可分别计算出3个相邻时刻  $t_{n-1}$ 、 $t_n$ 、 $t_{n+1}$  的徐变应变  $\boldsymbol{\varepsilon}^e(t_{n-1})$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon}^e(t_n)$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon}^e(t_{n+1})$ , 对于  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$  与  $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$  时间段内的徐变应变增量  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^e$  和  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$ , 显然有

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^e &= \boldsymbol{\varepsilon}^e(t_n) - \boldsymbol{\varepsilon}^e(t_{n-1}) \\ &= \mathbf{A} [\Delta \boldsymbol{\sigma}_0 (C(t_n, t_0) - C(t_{n-1}, t_0)) + \\ &\quad \Delta \boldsymbol{\sigma}_1 (C(t_n, t_1) - C(t_{n-1}, t_1)) + \dots + \\ &\quad \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n-1} (C(t_n, t_{n-1}) - C(t_{n-1}, t_{n-1})) + \\ &\quad \Delta \boldsymbol{\sigma}_n C(t_{n-1}, t_{n-1})] \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}^e(t_{n+1}) - \boldsymbol{\varepsilon}^e(t_n) \\ &= \mathbf{A} [\Delta \boldsymbol{\sigma}_0 (C(t_{n+1}, t_0) - C(t_n, t_0)) + \\ &\quad \Delta \boldsymbol{\sigma}_1 (C(t_{n+1}, t_1) - C(t_n, t_1)) + \dots + \\ &\quad \Delta \boldsymbol{\sigma}_n (C(t_{n+1}, t_n) - C(t_n, t_n)) + \\ &\quad \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1} C(t_n, t_n)] \end{aligned} \quad (20)$$

按式(19)、式(20)计算需储存各个单元在不同时刻的应力值,会显著增加储存量,降低计算效率。文献[33]提出用指数函数来表示徐变函数,建立相邻时刻徐变应变增量之间的递推关系,从而避免储存应力历史,本研究也采用此方法。

令混凝土徐变度  $C(t, t_0)$  的表达式为

$$C(t, t_0) = \sum_{j=1}^m \phi_j(\tau) [1 - e^{-\gamma_j(t-\tau)}] \quad (21)$$

基于式(21), 有

$$\begin{aligned} & C(t_{n+1}, t_i) - C(t_n, t_i) \\ &= \sum_{j=1}^m \phi_j(t_i) e^{-\gamma_j(t_n-t_i)} [1 - e^{-\gamma_j \Delta t_{n+1}}] \end{aligned} \quad (22)$$

联立式(20)与式(22), 可得

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^c = \sum_{j=1}^m [1 - e^{-\gamma_j \Delta t_{n+1}}] \boldsymbol{\omega}_{j,n+1} + \mathbf{A} \Delta \boldsymbol{\sigma}_n C(t_n, t_n) \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{j,n+1} = & \mathbf{A} [\Delta \boldsymbol{\sigma}_0 \phi_j(t_0) e^{-\gamma_j(t_n-t_0)} + \\ & \Delta \boldsymbol{\sigma}_1 \phi_j(t_1) e^{-\gamma_j(t_n-t_1)} + \dots + \\ & \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n-1} \phi_j(t_{n-1}) e^{-\gamma_j(t_n-t_{n-1})} + \Delta \boldsymbol{\sigma}_n \phi_j(t_n)] \end{aligned} \quad (24)$$

对于式(24)的  $\boldsymbol{\omega}$ , 由于本研究的 Timoshenko 平面纤维梁单元处于复杂应力状态, 故  $\boldsymbol{\omega}$  是向量且有  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \quad \omega_{xy}]^T$ 。

联立式(19)与式(22), 可得

$$\Delta \boldsymbol{\omega}_n^c = \sum_{j=1}^m [1 - e^{-\gamma_j(t-t_0)}] \boldsymbol{\omega}_{j,n} + \mathbf{A} \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n-1} C(t_{n-1}, t_{n-1}) \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{j,n} = & \mathbf{A} [\Delta \boldsymbol{\sigma}_0 \phi_j(t_0) e^{-\gamma_j(t_{n-1}-t_0)} + \\ & \Delta \boldsymbol{\sigma}_1 \phi_j(t_1) e^{-\gamma_j(t_{n-1}-t_1)} + \dots + \\ & \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n-2} \phi_j(t_{n-2}) e^{-\gamma_j(t_{n-1}-t_{n-2})} + \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n-1} \phi_j(t_{n-1})] \end{aligned} \quad (26)$$

联立式(24)与式(26), 可得

$$\boldsymbol{\omega}_{j,n+1} = \boldsymbol{\omega}_{j,n} e^{-\gamma_j \Delta t_n} + \mathbf{A} \Delta \boldsymbol{\sigma}_0 \phi_j(t_n) \quad (27)$$

显然

$$\boldsymbol{\omega}_{j,1} = \mathbf{A} \Delta \boldsymbol{\sigma}_0 \phi_j(t_0), \quad \boldsymbol{\omega}_{j,0} = 0 \quad (28)$$

联立式(23)~式(28), 可建立 Timoshenko 平面纤维梁单元徐变应变增量计算的递推式为

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^c = \boldsymbol{\eta}_{n+1} + q_{n+1} \mathbf{A} \Delta \boldsymbol{\sigma}_n \quad (29)$$

式中

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= C(t_n, t_n), \\ \boldsymbol{\eta}_{n+1} &= \sum_{j=1}^m (1 - e^{-q_j \Delta t_{n+1}}) \boldsymbol{\omega}_{j,n+1}, \\ \boldsymbol{\omega}_{j,n+1} &= \boldsymbol{\omega}_{j,n} e^{-q_j \Delta t_n} + \mathbf{A} \Delta \boldsymbol{\sigma}_n \phi_j(t_n), \\ \boldsymbol{\omega}_{j,1} &= \mathbf{A} \Delta \boldsymbol{\sigma}_0 \phi_j(t_0), \quad j=1, m \end{aligned}$$

应指出的是, 对于本研究分析的 Timoshenko 平面纤维梁单元,  $\boldsymbol{\eta}$  与  $\boldsymbol{\omega}$  一样也是向量, 有  $\boldsymbol{\eta} = [\eta_x \quad \eta_{xy}]^T$ 。

将  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^c$  作为初应变, 计算出其等效节点荷载增

量  $\Delta \mathbf{P}_{n+1}^c$ , 并将其作用于  $\Delta t_{n+1}$  时段末, 按有限元的基本方法,  $\Delta \mathbf{P}_{n+1}^c$  可表示为

$$\Delta \mathbf{P}_{n+1}^c = \int_V \mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^c dV \quad (30)$$

对式(30)进行具体计算时, 可利用弹性矩阵  $\mathbf{D}$  与矩阵  $\mathbf{A}$  之间存在  $\mathbf{D} = \mathbf{E} \mathbf{A}^{-1}$  关系以简化式(25)的具体计算<sup>[32]</sup>。

## 2.2 混凝土徐变分析流程

由以上理论分析可知, 基于应力应变层次用初应变法分析 Timoshenko 平面纤维梁单元组成的结构徐变效应的具体步骤如下。

首先是输入基本参数, 确定时间轴, 然后进行时步循环, 时步循环结束则徐变计算结束, 其中在时步的每次循环中又包括 6 个主要步骤。

①按常规方法计算结构刚度矩阵(如果各时步内结构无变化, 则结构刚度矩阵在整个分析中只需计算一次, 保存后被后续调用)及外加荷载形成的等效节点荷载矩阵。

②将按式(30)计算的上一时步徐变等效节点荷载叠加进等效节点荷载矩阵。

③解平衡方程, 获得节点位移增量, 叠加形成节点位移总量。

④基于线性应变矩阵  $\mathbf{B}_0$  与节点位移增量得到 Timoshenko 平面纤维梁单元纤维层各高斯点的应变增量, 叠加形成应变总量  $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ , 将其减去存储的上一时步末徐变应变总量(也可称为非应力应变总量)得到应力应变总量后再得到应力总量, 将其减去存储的上一时步末的应力总量得到本时步的应力增量。

⑤基于第④步算得的本时步的应力增量利用式(24)进行徐变效应分析, 计算出截止到本时步末的徐变应变增量  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^c$ , 进而按式(25)计算出用于下一时步分析的徐变等效结点荷载  $\Delta \mathbf{P}^c$ 。

⑥返回①, 开始下一时步的分析。

## 3 算例分析

本研究包含 3 个算例, 前 2 个算例用于验证本研究计算 Timoshenko 梁的方法是否正确, 在此基础上, 用第 3 个算例来验证本研究提出的 Timoshenko 钢筋混凝土纤维梁徐变分析方法的正确性。

### 3.1 简支梁静力分析

如图 2 所示简支梁, 与文献[34]相同, 本研究也

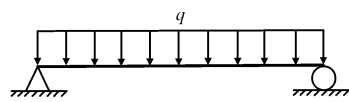
采用归一化,几何尺寸、材料及荷载等均未设置单位。满跨均布荷载  $q = 1$  及跨中集中荷载  $P = 1$ ,梁截面为矩形,宽度  $B$  始终为 1.0,改变梁高  $H$  与跨径  $L$  以体现 Timoshenko 梁的特点。材料的弹性模量  $E = 2.0 \times 10^7$ ,剪切模量  $G = 7.8125 \times 10^6$ ,剪切系数

$k = 5/6$ 。表 1 列出了本研究计算方法计算值、文献[34]的解以及基于厚梁理论求得的解,可看出三者在各种高跨比下均吻合良好,因此本研究求解 Timoshenko 梁的解的精度是有保证的。

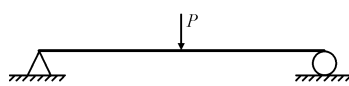
表 1 简支梁跨中挠度对比

Tab. 1 Comparison of mid-span deflection of simply supported beams

梁高与跨径	单元数量	集中荷载			均布荷载		
		厚梁理论 <sup>[34]</sup>	文献[34]解	本研究解	厚梁理论 <sup>[34]</sup>	文献[34]解	本研究解
$H = 1 \quad L = 10$	2	$1.28840 \times 10^{-5}$	$1.28840 \times 10^{-5}$	$1.28852 \times 10^{-5}$	$8.00450 \times 10^{-5}$	$8.00450 \times 10^{-5}$	$8.00530 \times 10^{-5}$
	4		$1.28840 \times 10^{-5}$	$1.28853 \times 10^{-5}$	$8.00450 \times 10^{-5}$	$8.00450 \times 10^{-5}$	$8.00530 \times 10^{-5}$
	8		$1.28840 \times 10^{-5}$	$1.28853 \times 10^{-5}$	$8.00452 \times 10^{-5}$	$8.00450 \times 10^{-5}$	$8.00530 \times 10^{-5}$
$H = 0.5 \quad L = 10$	2	$1.00768 \times 10^{-4}$	$1.00768 \times 10^{-4}$	$1.00778 \times 10^{-4}$	$6.28840 \times 10^{-4}$	$6.28840 \times 10^{-4}$	$6.28900 \times 10^{-4}$
	4		$1.00768 \times 10^{-4}$	$1.00778 \times 10^{-4}$	$6.28840 \times 10^{-4}$	$6.28840 \times 10^{-4}$	$6.28900 \times 10^{-4}$
	8		$1.00769 \times 10^{-4}$	$1.00778 \times 10^{-4}$	$6.28844 \times 10^{-4}$	$6.28840 \times 10^{-4}$	$6.28900 \times 10^{-4}$
$H = 0.1 \quad L = 10$	2	$1.25038 \times 10^2$	$1.25038 \times 10^{-2}$	$1.25051 \times 10^{-2}$	$7.81442 \times 10^{-2}$	$7.81442 \times 10^{-2}$	$7.81520 \times 10^{-2}$
	4		$1.25038 \times 10^{-2}$	$1.25051 \times 10^{-2}$	$7.81442 \times 10^{-2}$	$7.81442 \times 10^{-2}$	$7.81520 \times 10^{-2}$
	8		$1.25039 \times 10^{-2}$	$1.25051 \times 10^{-2}$	$7.81443 \times 10^{-2}$	$7.81442 \times 10^{-2}$	$7.81520 \times 10^{-2}$
$H = 1 \quad L = 20$	2	$1.00768 \times 10^{-4}$	$1.00768 \times 10^{-4}$	$1.00778 \times 10^{-3}$	$1.25768 \times 10^{-3}$	$1.25768 \times 10^{-3}$	$1.25780 \times 10^{-3}$
	4		$1.00768 \times 10^{-4}$	$1.00778 \times 10^{-4}$	$1.25768 \times 10^{-3}$	$1.25768 \times 10^{-3}$	$1.25780 \times 10^{-3}$
	8		$1.00769 \times 10^{-4}$	$1.00778 \times 10^{-4}$	$1.25769 \times 10^{-3}$	$1.25768 \times 10^{-3}$	$1.25781 \times 10^{-3}$
$H = 0.5 \quad L = 20$	2	$8.01536 \times 10^{-4}$	$8.01536 \times 10^{-4}$	$8.01616 \times 10^{-4}$	$1.00154 \times 10^{-2}$	$1.00154 \times 10^{-2}$	$1.00164 \times 10^{-2}$
	4		$8.01536 \times 10^{-4}$	$8.01616 \times 10^{-4}$	$1.00154 \times 10^{-2}$	$1.00154 \times 10^{-2}$	$1.00164 \times 10^{-2}$
	8		$8.01538 \times 10^{-4}$	$8.01616 \times 10^{-4}$	$1.00153 \times 10^{-2}$	$1.00154 \times 10^{-2}$	$1.00164 \times 10^{-2}$
$H = 0.1 \quad L = 20$	2	$1.00008 \times 10^{-1}$	$1.00008 \times 10^{-1}$	$1.00018 \times 10^{-1}$	1.25008	1.25008	1.25020
	4		$1.00008 \times 10^{-1}$	$1.00018 \times 10^{-1}$	1.25008	1.25008	1.25020
	8		$1.00008 \times 10^{-1}$	$1.00018 \times 10^{-1}$	1.25008	1.25008	1.25020



(a) 承受均布荷载的简支梁



(b) 承受集中荷载的简支梁

图 2 承受不同荷载的简支梁

Fig. 2 Simply supported beams subjected to different loads

### 3.2 钢筋混凝土悬臂梁静力分析

如图 3 所示正方形截面钢筋混凝土悬臂梁,梁长 1 650 mm,截面边长 550 mm,钢筋和混凝土的弹

性模量分别为  $2.0 \times 10^5$  MPa 和  $2.64 \times 10^4$  MPa,泊松比分别为 0.3 和 0.2,在梁端承受一个竖向荷载  $P$ 。

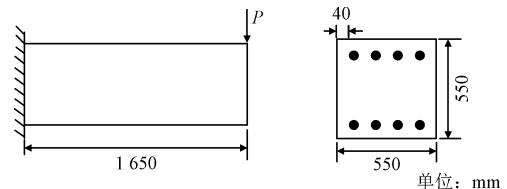


图 3 钢筋混凝土悬臂梁

Fig. 3 Reinforced concrete cantilever beam

采用 ABAQUS 程序进行建模分析,分别采用考虑剪切变形的梁单元 B31 和不考虑剪切变形的梁单元 B33 来模拟悬臂梁,假定钢筋与混凝土黏结良好,使用 rebar 命令将钢筋嵌入到混凝土内部,作为比

较,也进行了不考虑钢筋的计算,采用 ABAQUS 程序提供的位移加载形式。

图4给出了悬臂梁在加载前后的变形图。图5给出了基于本研究方法和 ABAQUS 程序分别考虑和不考虑剪切变形所得到的荷载-位移曲线。表2则列出了具体数值并进行了比较。可看出:考虑剪切效应时,本研究解与 ABAQUS 解两者误差最大不超过 2.3%,而不考虑剪切效应时,两者误差则不超过 1%,均吻合良好,验证了本研究理论及程序的正确。

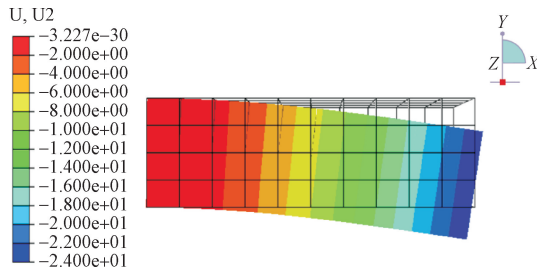


图4 ABAQUS 加载前后变形图

Fig.4 Deformation diagram before and after ABAQUS loading

对于钢筋的影响,由表2可知,考虑剪切效应,

当梁端位移为 22 mm 时,考虑钢筋和不考虑钢筋分别需要施加 3 035.4 kN 和 2 802.1 kN 的集中荷载,两者相差 7.69%;不考虑剪切效应,当梁端位移为 22 mm 时,考虑钢筋和不考虑钢筋分别需要施加 3 218.9 kN 和 2 957.8 kN 的集中荷载,相差 8.11%,表明钢筋对钢筋混凝土梁的挠度等受力行为具有一定影响。

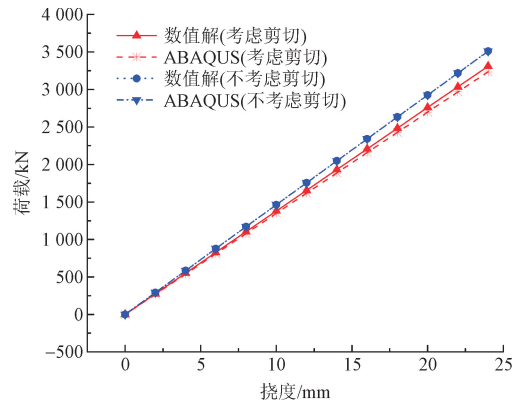


图5 悬臂梁荷载位移图

Fig.5 Load displacement diagram of cantilever beam

表2 悬臂梁悬臂端荷载对比

Tab.2 Comparison of load at cantilever end of cantilever beam

钢筋截面面积	荷载(考虑剪切)/kN		相差/%	荷载(不考虑剪切)/kN		相差/%
	本研究	ABAQUS		本研究	ABAQUS	
$A_s = 0$	2 802.1	2 744.5	2.05	2 957.8	2 957.8	0
$A_s \neq 0$	3 035.4	2 967.2	2.25	3 218.9	3 218.7	0.01

### 3.3 钢筋混凝土简支梁徐变分析

该算例来自文献[27]。跨径 10 m 的钢筋混凝土简支梁,截面尺寸与配筋等如图6所示,其他计算所需的几何、材料及荷载等参数详见文献[27],该文献是采用虚拟层合单元<sup>[35]</sup>与钢筋杆单元所形成的组合单元来模拟钢筋混凝土梁,本研究在分析时将梁均分成 20 个钢筋混凝土 Timoshenko 梁单元。

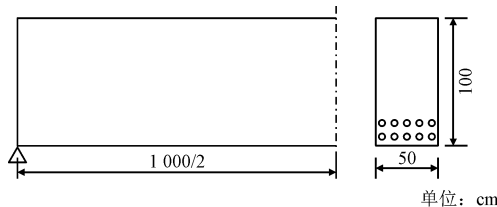


图6 承受均布荷载的钢筋混凝土简支梁

Fig.6 Reinforced concrete beam with simple support under uniform load

图7~图9给出了本研究计算的钢筋混凝土简支梁在3年内由于徐变引起的挠度、应力及钢筋内力的变化,同时作为比较,也列出了文献[27]的对

应值,并将相应误差值统计于表3。可以看出,本研究与文献[27]的计算结果吻合良好。

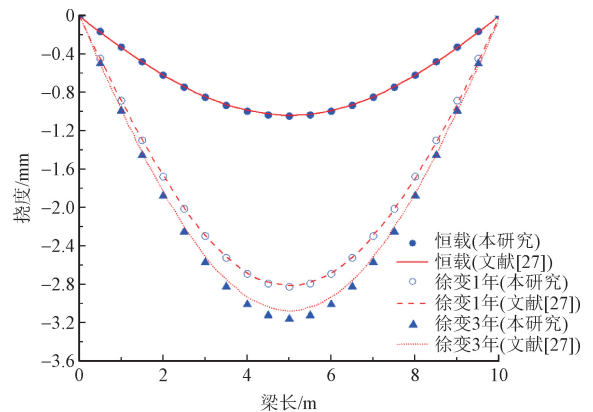


图7 简支梁挠度变化图

Fig.7 Deflection variation of simple support beam

图10给出了钢筋考虑与否对梁挠度的影响,考虑钢筋后简支梁跨中挠度在自重恒载、徐变1年以及徐变3年后的值分别为 1.050、2.832 与 3.167 mm,不考虑钢筋的对应值分别为 1.206、3.688 与 4.213 mm,两者之间分别相差 14.9%、

30.2% 与 33.0%。

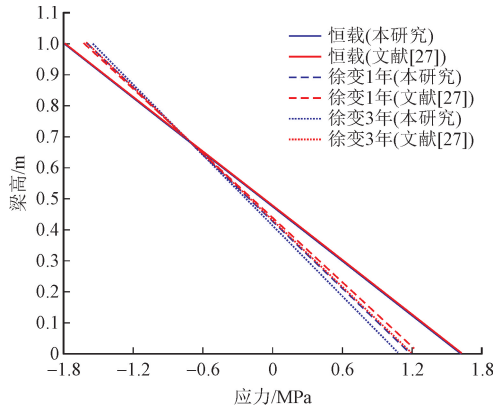


图 8 混凝土应力在跨中截面沿梁高变化图

Fig. 8 Stress variation along the height of middle section

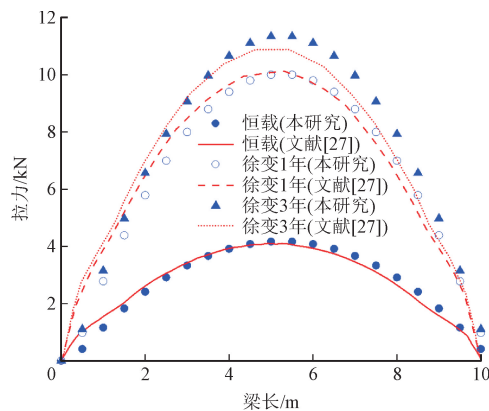


图 9 钢筋拉力沿梁长变化图

Fig. 9 Variation of axial force in steel along the beam

从图 7 ~ 图 10 可看出,钢筋对钢筋混凝土梁的挠度、应力等影响是比较大的,特别是在拉压受力钢筋配筋率比较高(本算例配筋率为 0.982%)的情况下。因此,为提高钢筋混凝土梁的徐变分析精度,计算模型中考虑钢筋是很有必要的。

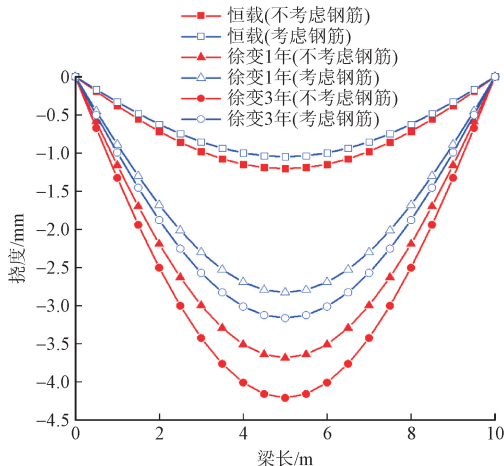


图 10 钢筋对梁挠度影响图

Fig. 10 Effect of reinforcement on beam deflection

表 3 本研究与文献[27]各计算值相对误差

Tab. 3 Relative error of each calculated value in this

参数	paper and literature [27] (单位:%)		
	恒载	徐变 1 年	徐变 3 年
跨中挠度	0.53	0.53	2.60
上缘应力	0.18	2.04	3.52
下缘应力	0.34	5.29	10.22
跨中处钢筋拉力	1.44	0.57	4.03

### 4 结 论

1) 本研究提出的钢筋混凝土纤维梁单元徐变分析方法,能考虑实际结构中可能存在的剪切效应,且计算结果与 Euler-Bernoulli 梁一样体现为单元的轴力、剪力及弯矩,方便用于截面设计与配筋验算等结构设计;同时,不像解析法等针对钢筋混凝土简支梁或连续梁需采用不同的假设而导致方法不通用,本研究基于有限元法,完全不存在此不通用问题,在各种类型的钢筋混凝土结构中可自由运用。

2) 本研究在进行徐变分析时,分别计入钢筋和混凝土对单元刚度矩阵以及抗力矩阵的贡献,因此钢筋对混凝土徐变的阻碍作用可明确计入,能清晰地界定钢筋与混凝土之间的应力重分布问题。

3) 算例 2 和算例 3 的结果表明,钢筋对钢筋混凝土梁的受力行为影响较明显,对于拉压受力钢筋配筋率为 0.982% 的算例 3,考虑徐变 3 年后钢筋混凝土简支梁跨中挠度计入与不计入钢筋影响相差 33.0%。因此,为提高分析精度,对于钢筋混凝土梁特别是其拉压钢筋配筋率比较高时,建议计算模型中考虑钢筋。

### 参考文献:

[1] 李嘉钰,陈梦成,王开心. 基于剪切效应纤维梁单元的结构非线性有限元数值模拟[J]. 应用数学和力学,2022,43(1):34-48.  
LI Jiayu, CHEN Mengcheng, WANG Kaixin. Nonlinear numerical simulation of finite elements based on fiber beam elements with shear effects for structures [J]. Applied mathematics and mechanics, 2022, 43(1): 34-48 (in Chinese).

[2] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1981.

[3] 夏桂云,曾庆元. 深梁理论的研究现状与工程应用[J]. 力学与实践, 2015, 37(3): 302-316.  
XIA Guiyun, ZENG Qingyuan. Timoshenko beam theory and its

- applications[J]. *Mechanics in engineering*, 2015, 37(3): 302-316 (in Chinese).
- [4] TIMOSHENKO S P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars[J]. *Philosophical magazine*, 1921, 41: 744-746.
- [5] SPACONE E, FILIPPOU F C, TAUCER F F. Fibre beam-column model for non-linear analysis of R/C frames: part I. formulation [J]. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 1996, 25(7): 711-725.
- [6] SPACONE E, FILIPPOU F C, TAUCER F F. Fibre beam-column model for non-linear analysis of R/C frames: part II. applications [J]. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 1996, 25(7): 727-742.
- [7] PETRANGELI M, PINTO P E, CIAMPI V. Fiber element for cyclic bending and shear of RC structures. I: theory[J]. *Journal of engineering mechanics*, 1999, 125(9): 994-1001.
- [8] PETRANGELI M. Fiber element for cyclic bending and shear of RC structures. II: verification [J]. *Journal of engineering mechanics*, 1999, 125(9): 1002-1009.
- [9] CERESA P, PETRINI L, PINHO R, et al. A fibre flexure-shear model for seismic analysis of RC-framed structures[J]. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 2009, 38(5): 565-586.
- [10] 李忠献, 高营, 李宁. 基于结构精细化模拟分析平台的弯剪纤维单元模型[J]. *建筑结构学报*, 2016, 37(9): 69-77.  
LI Zhongxian, GAO Ying, LI Ning. Refined simulation analysis platform of structures-based flexure-shear fiber element model[J]. *Journal of building structures*, 2016, 37(9): 69-77 (in Chinese).
- [11] FENG D C, XU J. An efficient fiber beam-column element considering flexure-shear interaction and anchorage bond-slip effect for cyclic analysis of RC structures [J]. *Bulletin of earthquake engineering*, 2018, 16(11): 5425-5452.
- [12] FENG D C, WU J Y. Improved displacement-based timoshenko beam element with enhanced strains[J]. *Journal of structural engineering*, 2020, 146(3): 04019221.
- [13] 胡郑州, 吴明儿. 考虑剪切效应三维纤维梁单元的几何非线性增量有限元分析[J]. *工程力学*, 2014, 31(8): 134-143.  
HU Zhengzhou, WU Ming'er. Geometrically nonlinear incremental finite element analysis of 3D fiber beam element considering shear effect[J]. *Engineering mechanics*, 2014, 31(8): 134-143 (in Chinese).
- [14] 林贤宏, 罗尧治, 唐敬哲, 等. 考虑剪切和扭转变形的有限质点法纤维梁单元研究[J]. *工程力学*, 2022, 39(5): 34-43.  
LIN Xianhong, LUO Yaozhi, TANG Jingzhe, et al. A fiber beam element for the finite particle method considering shear and torsion deformation [J]. *Engineering mechanics*, 2022, 39(5): 34-43 (in Chinese).
- [15] 罗尧治, 郑延丰, 杨超, 等. 结构复杂行为分析的有限质点法研究综述[J]. *工程力学*, 2014, 31(8): 1-7.  
LUO Yaozhi, ZHENG Yanfeng, YANG Chao, et al. Review of the finite particle method for complex behaviors of structures [J]. *Engineering mechanics*, 2014, 31(8): 1-7 (in Chinese).
- [16] ZHENG Y F, YANG C, WAN H P, et al. Dynamics analysis of spatial mechanisms with dry spherical joints with clearance using finite particle method [J]. *International journal of structural stability and dynamics*, 2020, 20(3): 2050035.
- [17] 郑延丰, 杨超, 刘磊, 等. 基于有限质点法的含间隙铰平面机构动力分析[J]. *工程力学*, 2020, 37(3): 8-17.  
ZHENG Yanfeng, YANG Chao, LIU Lei, et al. Dynamics analysis of planar mechanism with revolute joint clearance based on finite particle method [J]. *Engineering mechanics*, 2020, 37(3): 8-17 (in Chinese).
- [18] TANG J Z, ZHENG Y F, YANG C, et al. Parallelized implementation of the finite particle method for explicit dynamics in GPU [J]. *Computer modeling in engineering & sciences*, 2020, 122(1): 5-31.
- [19] 姚未来, 江世永, 蔡涛, 等. 粘贴纤维增强复合材料加固混凝土梁的蠕变特性研究进展[J]. *材料导报*, 2019, 33(17): 2890-2901.  
YAO Weilai, JIANG Shiyong, CAI Tao, et al. Research progress on creep response of FRP-strengthened reinforced concrete beams [J]. *Materials reports*, 2019, 33(17): 2890-2901 (in Chinese).
- [20] 余斌. 自然暴露环境下预应力 CFRP 加固 RC 梁长期力学性能研究[D]. 广州: 华南理工大学, 2020.
- [21] IZZUDDIN B A, SIYAM A A F M, SMITH D L. An efficient beam-column formulation for 3D reinforced concrete frames [J]. *Computers & structures*, 2002, 80(7/8): 659-676.
- [22] 向天宇, 童育强, 赵人达. 基于退化梁单元的混凝土结构徐变分析[J]. *工程力学*, 2006, 23(4): 140-143.  
XIANG Tianyu, TONG Yuqiang, ZHAO Renda. Creep analysis of concrete structure by degenerated beam element [J]. *Engineering mechanics*, 2006, 23(4): 140-143 (in Chinese).
- [23] MARU S, ASFAW M, NAGPAL A K. Consistent procedure for creep and shrinkage effects in RC frames [J]. *Journal of structural engineering*, 2001, 127(7): 726-732.
- [24] 黄海东, 向中富, 郑皆连. PC 箱梁桥三维徐变效应精细化分析[J]. *中国公路学报*, 2013, 26(5): 108-114.  
HUANG Haidong, XIANG Zhongfu, ZHENG Jielian. Refined analysis of three-dimensional creep effect for PC box-girder bridges [J]. *China journal of highway and transport*, 2013, 26(5): 108-114 (in Chinese).
- [25] 杨永清, 李世伟, 蒲黔辉, 等. 大跨悬浇箱梁桥三维非线性收缩徐变效应[J]. *东南大学学报(自然科学版)*, 2018, 48(6):

- 1036-1043.
- YANG Yongqing, LI Shiwei, PU Qianhui, et al. 3D nonlinear shrinkage and creep effects of long span cantilever casting box girder bridges[J]. Journal of Southeast University(natural science edition), 2018, 48(6): 1036-1043 (in Chinese).
- [26] 牛艳伟,石雪飞,阮欣. 混凝土结构三维徐变的有限元计算方法[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2009, 37(4): 475-480.
- NIU Yanwei, SHI Xuefei, RUAN Xin. A finite element analysis method of concrete structure with three dimensional creep [J]. Journal of Tongji University (natural science), 2009, 37(4): 475-480 (in Chinese).
- [27] 孙永明,黄侨,任远. 基于组合单元的混凝土结构徐变分析方法[J]. 工程力学, 2009, 26(1): 98-103.
- SUN Yongming, HUANG Qiao, REN Yuan. Creep analysis method of concrete structures based on composite elements [J]. Engineering mechanics, 2009, 26(1): 98-103 (in Chinese).
- [28] CHEN W Z, MA C. Spatial embedded slip model for analyzing time-relative coupling effects of creep and prestress on PC bridges [J]. Journal of bridge engineering, 2015, 20(8): B4014002.
- [29] 颜东煌,田仲初,李学文,等. 混凝土桥梁收缩徐变计算的有限元方法与应用[J]. 中国公路学报, 2004, 17(2): 55-58.
- YAN Donghuang, TIAN Zhongchu, LI Xuewen, et al. Finite element method and application for the shrinkage and creep of concrete bridges [J]. China journal of highway and transport, 2004, 17(2): 55-58 (in Chinese).
- [30] 邓继华,邵旭东,谭平. 几何非线性与徐变共同作用下三维杆系结构有限元分析[J]. 工程力学, 2015, 32(6): 117-123.
- DENG Jihua, SHAO Xudong, TAN Ping. Finite element analysis for 3-D frame structures under combined actions of geometric nonlinearity and creep [J]. Engineering mechanics, 2015, 32(6): 117-123 (in Chinese).
- [31] BAZOUNE A, KHULIEF Y A, STEPHEN N G. Shape functions of three-dimensional Timoshenko beam element [J]. Journal of sound and vibration, 2003, 259(2): 473-480.
- [32] 朱伯芳. 有限单元法原理与应用 [M]. 2 版. 北京: 中国水利水电出版社, 1998.
- [33] ZIENKIEWICZ O C, WATSON M, KING I P. A numerical method of visco-elastic stress analysis [J]. International journal of mechanical sciences, 1968, 10(10): 807-827.
- [34] 夏桂云,曾庆元,李传习,等. 建立 Timoshenko 深梁单元的新方法[J]. 交通运输工程学报, 2004, 4(2): 27-32.
- XIA Guiyun, ZENG Qingyuan, LI Chuanxi, et al. New method for formulations of Timoshenko deep beam element [J]. Journal of traffic and transportation engineering, 2004, 4(2): 27-32 (in Chinese).
- [35] 凌道盛,张金江,项贻强,等. 虚拟层合单元法及其在桥梁工程中的应用[J]. 土木工程学报, 1998, 31(3): 22-29.
- LING Daosheng, ZHANG Jinjiang, XIANG Yiqiang, et al. The method of virtual laminated element and its application in bridge engineering [J]. China civil engineering journal, 1998, 31(3): 22-29 (in Chinese).

(编辑 李坤璐)