

考虑根系对水文特性影响下非饱和植被土中水分一维瞬态渗流解析解

王浩^{1,2}, 侯泓冰^{1,2}, 江文豪^{1,2}

(1. 福州大学 紫金地质与矿业学院, 福建 福州 350108; 2. 福州大学 地质工程福建省高校工程研究中心, 福建 福州 350108)

摘要: 在自然环境和工程场景中, 不仅存在裸露非饱和土, 也存在被植被覆盖的非饱和土(即非饱和植被土)。针对根系为均匀形的非饱和植被土, 在考虑根系对水文特性影响的基础上, 通过一些简化假定和变量代换得到了线性化的水分一维瞬态渗流控制方程。采用分离变量和级数变换等方法, 求得了非饱和植被土中水分一维瞬态渗流解析解。随后, 将该解析解计算结果与现有解析解和相应有限差分解的计算结果比较, 验证了其合理性。最后, 以一个简单的植被盖层为例, 分析了根系相关参数对其阻隔雨水入渗效果的影响。结果表明, 与无植被的单一盖层相比, 相同降雨场景下植被盖层底部的累计渗漏量 CQ_b 较小, 且根系土层厚度 l_g 越大, 这种阻隔雨水渗漏的效果越为显著。蒸腾速率 T_p 的增大可明显降低降雨场景下植被盖层底部的渗漏速率, 且随着 T_p 增大, 累计渗漏量 CQ_b 呈线性减小趋势。与根系体积占比 R_v 为 0 且忽略根系对土体水文特性影响的极端情况相比, 当 R_v 值使得根系土的饱和渗透系数减小时, 植被盖层阻隔雨水渗漏的效果会增强, 反之则会减弱。总的来说, 本研究可为非饱和植被土中水分渗流相关工程实践提供科学指导。

关键词: 非饱和植被土; 瞬态渗流; 解析解; 水文特性; 根系吸水

中图分类号: TV 139.1

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598(2025)11-3329-17

Analytical solution for one-dimensional transient seepage of water in the unsaturated vegetated soil considering the effects of roots on hydrological properties

WANG Hao^{1,2}, HOU Hong-bing^{1,2}, JIANG Wen-hao^{1,2}

(1. Zijin School of Geology and Mining, Fuzhou University, Fuzhou, Fujian 350108, China;

2. Engineering Research Center of Geological Engineering, Fuzhou University, Fuzhou, Fujian 350108, China)

Abstract: In the natural environment and engineering scenarios, there are not only bare unsaturated soils but also unsaturated soils covered by vegetation (i.e., unsaturated vegetated soils). For the unsaturated vegetated soil with a uniform root architecture, on the basis of considering the effects of roots on the hydrological properties, the linearized governing equations for one-dimensional transient seepage of water are acquired by some simplifying assumptions and variable substitution. The analytical solution for one-dimensional transient seepage of water in the unsaturated vegetated soil is obtained through the methods of separation of variable and series transformation. Subsequently, the computational results of this analytical solution have been compared with those of the existing analytical solution and the corresponding finite-difference solution to verify its reasonableness. Finally, a simple vegetated cover is taken as an example to analyze the influences of root-related parameters on its effectiveness in blocking rainwater infiltration. The results show that the cumulative leakage CQ_b at the bottom zone of a vegetated cover under the same rainfall scenario is smaller than that of a single cover without vegetation, and an increase in the rooted soil thickness l_g enhances the effectiveness of the vegetated cover in blocking rainwater leakage. The increase of the transpiration rate T_p significantly reduces the leakage rate at the bottom zone of the vegetated cover under the rainfall scenario, and the cumulative leakage CQ_b tends to decrease linearly with an increase in T_p . Compared with the extreme case where the root volume ratio R_v is zero and the effects of roots on the hydrological properties of soil are ignored, the effectiveness of the vegetated cover in blocking rainwater leakage is enhanced when the saturated

收稿日期: 2024-12-01

录用日期: 2025-02-21

基金项目: 福州大学科研启动基金项目 (No. 511503); 国家自然科学基金面上项目 (No. 42477165)。

This work was supported by the Project of Research Initiation Fund of Fuzhou University (511503) and the Project of National Natural Science Foundation of China (42477165).

第一作者简介: 王浩, 男, 1978年生, 博士, 教授, 主要从事地质灾害防治、环境岩土工程等方面的研究。E-mail: h_wang@126.com

通讯作者: 江文豪, 男, 1996年生, 博士, 副教授, 主要从事边坡工程、环境岩土工程方面的研究。E-mail: Geo_Jiang2020@163.com

permeability coefficient of the rooted soil decreases due to the value R_v , and conversely, it is weakened. Overall, this study could provide scientific guidance for engineering practices related to water infiltration in unsaturated vegetated soils.

Keywords: unsaturated vegetated soil; transient seepage; analytical solution; hydrologic properties; root water uptake

1 引言

水分在非饱和土中渗流是无处不在的现象^[1-2], 其往往涉及边坡稳定性^[3-5]、路基沉降^[6-7]、填埋场盖层性能评估^[8-9], 以及污染物迁移等多种工程问题^[10-11]。为此, 近几十年来, 已有许多学者对非饱和土中水分的渗流行为开展了研究。

降雨场景下非饱和土中水分一维渗流是最为经典和最为常见的非饱和渗流问题之一^[12-15]。在现有研究中, 学者们多基于 Richards 所提一维偏微分方程 (即一维 Richards 方程) 来描述该物理过程^[16-22]。例如, 基于 Richards 方程, Warrick 等^[17]获得时变入渗条件下水分一维渗流解析解, 并分析了不同初始条件下非饱和土中体积含水率的分布。Huang 等^[19]假设体积含水率和渗透系数均为压力水头的指数函数, 利用 Richards 方程得到了降雨场景下非饱和土中水分一维竖向渗流的解析解。此外, 采用 Laplace 变换和一些简化假定, Srivastava 等^[21]得到了降雨作用下水分在双层非饱和土中一维渗流的瞬态解析解。陈佩佩等^[23]基于齐次化构建原理, 获得了非饱和土中水分一维瞬态渗流解析解, 这种解法也为水分非饱和和渗流问题的解析计算提供新思路。尽管上述解析解的提出丰富了非饱和土中水分一维渗流的解析理论, 但它们都仅限于研究裸露非饱和土中水的非饱和和渗流行为^[12-14, 17-23]。

在自然环境中, 不仅有裸露非饱和土, 也存在表层被植被覆盖的非饱和土 (即非饱和植被土, 下同)^[24-26]。实际上, 近些年来, 植被在岩土工程中的应用得到了越来越多的关注^[24-27]。例如, 对于填埋场盖层, 鉴于传统单一土质盖层在干湿循环和冻融循环等自然环境影响下易发生开裂, 从而导致防渗性能失效, 植被盖层 (即表层有植被的填埋场盖层) 逐渐在工程实践得到了应用^[28-31], 如图 1 所示。

植被盖层通常包括根系土层和下卧土层 (见图 1)。对于根系土层, 其存在不仅可保护下卧土层如黏质土层免受风雨侵蚀, 还可通过根系吸水来降低孔隙水压力, 并增大土体抗剪强度^[32-34]。此外, 根系吸水也可减少雨水入渗, 进而提升填埋场盖层的储水能力^[32-35]。值得补充的是, 植被还具有很好的美学与生态价值。由于植被盖层为填埋场上方, 在服役时通常处于非饱和状态, 因而可认为其是一类典型的非饱和植被土。

实地和室内试验研究均发现, 植被根系占据土孔隙会改变土体的孔径分布, 从而影响土的渗透性^[31-38]。此外, 植被根系会吸收水分, 进而影响土体中孔隙水压力的分布^[32-35]。这些研究结果表明, 植被根系存在会显著影响非饱和土中水分的渗流行为^[32-35]。目前, 已有一些学者对非饱和植被土中水分的渗流特性开展了研究^[32-35, 39-42]。例如, 基于指数函数形式的土-水特征曲线, Yuan 等^[39]发展得到了非饱和植被土中水分一维渗流解析解。考虑到实际的根系结构可能呈现均匀形、三角形、指数形和椭圆形等多种形式, Ng 等^[32]推导得到了无限非饱和植被边坡中水分渗流的稳态解和瞬态解。上述解析解可用于计算降雨作用下植被盖层底部中水分的渗漏速率。此外, Min^[40]和 Feng^[41]等分别给出了不同根系结构下植被单层土和植被多层土中水分非饱和和渗流的稳态解析解, 这些解析解可预测稳态条件下孔隙水压力随深度分布特征。

尽管上述解析解可用于描述非饱和植被土中水分的渗流行为, 但它们尚存在一些局限性。例如, 对于现有稳态解析解, 其无法计算降雨场景下水分渗流速率随时间变化。对于瞬态解析解, 其往往假定根系土层的渗透系数与下卧土层的渗透系数一致^[32-33, 39], 忽略了根系存在对土体饱和和渗透系数的影响, 这可能会产生相当大误差。实际上, 植被根系存在会显著改变土体的水文性质^[35-37], 如改变土体饱和和渗透系数和饱和含水率。因此, 相比于单层非饱和土, 基于双层非饱和土 (即认为根系土层与下卧土层是两种不同类型的土层, 如图 1 所示) 开展水分渗流的解析理论研究更为合理。此外, 现有瞬态解析解大多采用前期稳态计算得到的含水率分布作为初始条件^[32-33, 39], 难模拟任意初始条件下非饱和植被土中水分一维瞬态渗流行为。值得补充的是, 现有瞬态解析解获得常基于 Laplace 变换, 由于涉及 Laplace

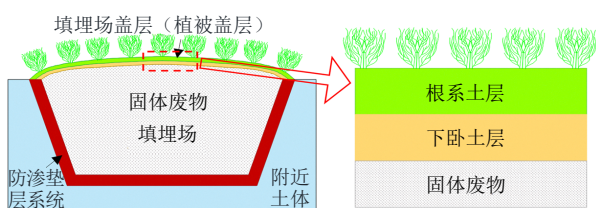


图 1 固体废物填埋场上方的填埋场盖层 (植被盖层)
Fig.1 Landfill cover (i.e., a vegetated cover) above the solid waste landfill

正逆变换步骤，因而求解过程较为复杂^[32-33, 39]。基于这些考虑，有必要采用新方法发展非饱和植被土中水分一维瞬态渗流解析解，以更为合理地描述降雨场景下水分的渗流特性。

本研究的目的是推导考虑根系对水文特性影响下非饱和植被土中水分一维瞬态渗流解析解。该解析解的求解过程涉及变量代换、分离变量和级数变换等方法。随后，通过与现有解析解及相应有限差分对比，有效验证了该解析解的正确性。最后，以一个简单植被盖层为例，开展参数分析，研究了根系土层厚度、根系体积占比等因素对降雨场景下植被盖层对阻隔雨水渗漏效果的影响。

2 数学模型

2.1 模型示意图和简要说明

参考 Min^[40]和 Feng^[41]等研究，图 2 展示了降雨或蒸发场景下非饱和植被土（由根系土层和下卧土层组成）中水分瞬态渗流示意图。特别地，在非饱和植被土中，考虑了任意初始含水率的分布（ $\theta_c(z, 0) = f_c(z)$ 和 $\theta_g(z, 0) = f_g(z)$ 分别表示下卧土和根系土的初始含水率， $f_c(z)$ 和 $f_g(z)$ 分别为下卧土和根系土中初始体积含水率的分布函数）。为便于描述，自底部向上建立直角坐标系（坐标轴用 z 表示）。根系土层和下卧土层厚度分别记为 l_g 和 l_c 。参考 Min^[40]和 Feng^[41]等研究，设定土体的下边界为恒定孔隙水压力（简称恒压水头，下同）边界，对应水头大小记为 h_0 。在土体上方，当对应降雨场景时，上边界处的水分渗流量 q_0 为正值^[40-41]；当对应蒸发场景时，上边界处的水分渗流量 q_0 为负值^[40-41]。

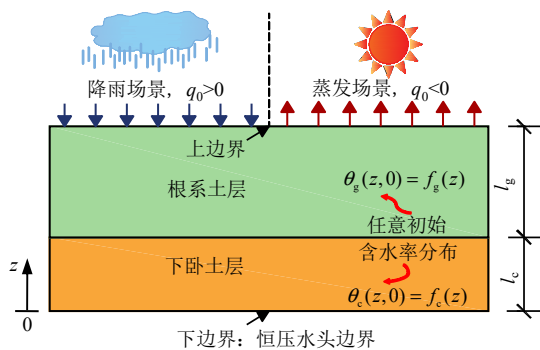


图 2 水分在非饱和植被土中一维瞬态渗流示意图
Fig.2 Schematic diagram of one-dimensional transient seepage of water in the unsaturated vegetated soil

进一步，在后续建立数学模型时，除考虑根系存在影响土体的水文特性等特别说明外，参考

Yuan^[39]和 Min^[40]等研究，作如下几点假定：

- (1) 在饱和状态下，根系土层和下卧土层均是均质、各项同性的弹性材料；
- (2) 在降雨过程中，忽略非饱和植被土中土骨架和孔隙水发生变形；
- (3) 在降雨作用下，非饱和植被土中水分的瞬态渗流是一维的；
- (4) 在根系土层，可采用一个“汇项”来表征根系吸水引起的蒸腾效应；
- (5) 在雨水入渗过程中，忽略非饱和植被土中孔隙气压力的变化。

2.2 根系对土体水文特性的影响

在植被种植前，可认为根系土层中土体的物理力学性质与下卧土的物理力学性质完全一致^[36, 40]。在植被种植后，根系的存在会占据土体孔隙，从而影响土体的饱和渗透系数和饱和含水率等水文性质。参考 Liu^[35]、Ng^[36]等研究，可采用如下公式来近似描述根系引起的孔隙率变化：

$$e_g = \frac{e_0^b - R_v(1 + e_0^b)}{1 + R_v(1 + e_0^b)} \quad (1)$$

式中： e_0^b 和 e_g 分别为植被种植前后土体的孔隙比（植被种植后的土体也称为根系土）； R_v 为根系体积占比，其定义是单位体积土体中根系总体积^[36]（该参数主要受根系直径大小和根系数量的影响）。值得补充的是，出于数学简化考虑，这里认为根系的存在不影响土体的孔隙结构^[35, 43]。

进一步，参考 Liu 等^[35]和 Yin^[44]的研究，根系土的饱和渗透系数随孔隙比的变化关系可写为

$$k_{g,s} = \eta_{dec} \cdot k_{s0}^b \cdot \exp[(e_g - e_0^b)/C_k] \quad (2)$$

式中： k_{s0}^b 和 $k_{g,s}$ 分别为植被种植前后土体的饱和渗透系数； C_k 为饱和渗透系数随孔隙比变化的拟合参数； η_{dec} 为根系腐烂或根系土中优先流引起的渗透系数增大参数。参考 Ni 等^[45]研究可知，土中根系存在通常会使得 k_{s0}^b 增大 1.3~6.5 倍。因此， η_{dec} 通常在 1.3~6.5 之间变化。值得补充的是，对于这些与渗透相关的参数，其大小可通过开展多类型根系土的渗透系数测定试验来确定^[35-38, 45]。

根据现有非饱和土中水分瞬态渗流解析理论，指数函数形式最常被用于描述土体的渗透系数和体积含水率随压力水头变化^[32-35, 39-42]。基于此，可采用该函数形式来表征根系土的渗透系数和体积含水率随压力水头变化^[32-35]：

$$k_g = k_{g,s} \exp(\alpha_g \psi_g) \quad (3)$$

$$\theta_g = \theta_{g,r} + (\theta_{g,s} - \theta_{g,r}) \exp(\alpha_g \psi_g) \quad (4)$$

式中： k_g 为根系土的渗透系数； α_g 为根系土的去饱和系数； ψ_g 为根系土中的压力水头； θ_g 、 $\theta_{g,s}$ 和 $\theta_{g,r}$ 分别为根系土的含水率、饱和含水率和残余含水率。

2.3 非饱和瞬态渗流控制方程

参考 Min^[40]和 Feng^[41]等研究工作，下卧土层中水分一维瞬态渗流的控制方程可写为

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[k_c \left(\frac{\partial \psi_c}{\partial z} + 1 \right) \right] = \frac{\partial \theta_c}{\partial t} \quad (0 \leq z \leq l_c) \quad (5)$$

式中： t 为时间； k_c 为下卧土的渗透系数； ψ_c 为下卧土中的压力水头； θ_c 为下卧土的体积含水率。

同样，结合 Min^[40]和 Feng^[41]等研究工作，如下关系式可被采用以描述下卧土的渗透系数 k_c 和体积含水率 θ_c 随压力水头 ψ_c 的变化：

$$k_c(\psi_c) = k_{c,s} \exp(\alpha_c \psi_c) \quad (6)$$

$$\theta_c = \theta_{c,r} + (\theta_{c,s} - \theta_{c,r}) \exp(\alpha_c \psi_c) \quad (7)$$

式中： $k_{c,s}$ 为下卧土的饱和渗透系数； α_c 为下卧土的去饱和系数； $\theta_{c,s}$ 和 $\theta_{c,r}$ 分别为下卧土的饱和含水率和残余含水率。

令 $\Omega_c = \exp(\alpha_c \psi_c)$ ，并结合式(6)、(7)，控制方程式(5)可改为

$$\frac{\partial^2 \Omega_c}{\partial z^2} + \alpha_c \frac{\partial \Omega_c}{\partial z} = \frac{\alpha_c (\theta_{c,s} - \theta_{c,r})}{k_{c,s}} \frac{\partial \Omega_c}{\partial t} \quad (8)$$

值得补充的是，根据式(7)可知，关键变量 Ω_c 也可称为下卧土的有效饱和度^[46]。

对于根系土层中水分一维非饱和瞬态渗流控制方程，可参考 Ng^[32]和 Yuan^[39]等研究获得。在考虑根系吸水情况下，根系土层中水分一维瞬态渗流的控制方程可写为

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[k_g \left(\frac{\partial \psi_g}{\partial z} + 1 \right) \right] - S(z) \cdot H(z - l_c) = \frac{\partial \theta_g}{\partial t} \quad (l_c \leq z \leq (l_c + l_g)) \quad (9)$$

式中： $H(z - l_c)$ 为 Heaviside 函数； $S(z)$ 表示根系吸水的汇项^[32-34]。

根据 Ng 等^[32]研究， $H(z - l_c)$ 的表达式为

$$H(z - l_c) = \begin{cases} 0, & 0 \leq z \leq l_c \\ 1, & l_c \leq z \leq (l_c + l_g) \end{cases} \quad (10)$$

参考 Liu 等^[35]研究工作，这里设定根系呈均匀形分布。在这种情况下，根系土的饱和渗透系数 $k_{g,s}$

和饱和含水率 $\theta_{g,s}$ 将随深度均匀分布。也因此， $S(z)$ 的表达式可写为^[35]

$$S(z) = T_p / l_g \quad (11)$$

式中： T_p 为根系吸水引起的蒸腾速率。

进一步，令 $\Omega_g = \exp(\alpha_g \psi_g)$ ，利用式(3)和式(4)，式(9)可改写为

$$\frac{\partial^2 \Omega_g}{\partial z^2} + \alpha_g \frac{\partial \Omega_g}{\partial z} - \frac{\alpha_g}{k_{g,s}} \cdot S(z) \cdot H(z - l_c) = \frac{\alpha_g (\theta_{g,s} - \theta_{g,r})}{k_{g,s}} \frac{\partial \Omega_g}{\partial t} \quad (12)$$

式中： Ω_g 也称为根系土的有效饱和度^[46]。

根据上述推导，我们可获得线性化的水分一维瞬态渗流控制方程，其中式(8)和式(12)分别对应下卧土层和根系土层。

2.4 对应的求解条件

非饱和植被土底部的压力水头为 h_0 ，则下边界可写为^[40]

$$\psi_c(0, t) = h_0 \quad (13)$$

根据 $\Omega_c = \exp(\alpha_c \psi_c)$ ，可将式(13)改写为

$$\Omega_c(0, t) = \psi_0 \quad (14)$$

式中： $\psi_0 = \exp(\alpha_c h_0)$ ， ψ_0 为常数。

在非饱和植被土的上方，需满足水分渗流量连续。则有：

$$v_g(z, t) \Big|_{z=l_c+l_g} = -k_g(z, t) \cdot \left[\frac{\partial \psi_g(z, t)}{\partial z} + 1 \right] \Big|_{z=l_c+l_g} = -q_0 \quad (15)$$

式中： v_g 为根系土中的水分渗流量（也称为水分渗流速率）。

利用式(3)、(4)和 $\Omega_g = \exp(\alpha_g \psi_g)$ ，式(15)可改写为

$$\frac{\partial \Omega_g(l_c + l_g, t)}{\partial z} + \alpha_g \Omega_g(l_c + l_g, t) = \frac{\alpha_g}{k_{g,s}} q_0 \quad (16)$$

在下卧土层和根系土层界面处，需满足压力水头和水分渗流量连续：

$$\left. \begin{aligned} \psi_c(l_c, t) &= \psi_g(l_c, t) \\ v_c(z, t) \Big|_{z=l_c} &= -k_c(z, t) \left[\frac{\partial \psi_c(z, t)}{\partial z} + 1 \right] \Big|_{z=l_c} = \\ -k_g(z, t) \left[\frac{\partial \psi_g(z, t)}{\partial z} + 1 \right] \Big|_{z=l_c} & \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中： v_c 为下卧土中的水分渗流量。

同样，利用 $\Omega_c = \exp(\alpha_c \psi_c)$ 和 $\Omega_g = \exp(\alpha_g \psi_g)$ ，式 (17) 可进一步改写为：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\ln \Omega_c(l_c, t)}{\alpha_c} &= \frac{\ln \Omega_g(l_c, t)}{\alpha_g} \\ \frac{k_{c,s}}{\alpha_c} \cdot \left[\frac{\partial \Omega_c(l_c, t)}{\partial z} + \alpha_c \Omega_c(l_c, t) \right] &= \\ \frac{k_{g,s}}{\alpha_g} \cdot \left[\frac{\partial \Omega_g(l_c, t)}{\partial z} + \alpha_g \Omega_g(l_c, t) \right] & \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

在 α_c 和 α_g 不相等情况下，式 (18) 中第 1 式会呈现高度非线性特征^[47-50]。为得到相应解析解，参考现有研究，假定根系存在未改变去饱和系数^[32-33, 39]。

因此，有 $\alpha_g = \alpha_c$ ，则式 (18) 可改写为

$$\left. \begin{aligned} \Omega_c(l_c, t) &= \Omega_g(l_c, t) \\ \left[\frac{\partial \Omega_c(l_c, t)}{\partial z} + \alpha_c \Omega_c(l_c, t) \right] &= \\ \left[\frac{\partial \Omega_g(l_c, t)}{\partial z} + \alpha_c \Omega_g(l_c, t) \right] & \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

根据图 2，初始时刻的体积含水率分布可写为

$$\left. \begin{aligned} \theta_c(z, 0) &= f_c(z), \quad 0 \leq z \leq l_c \\ \theta_g(z, 0) &= f_g(z), \quad l_c \leq z \leq (l_c + l_g) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

结合式 (4)、(7)、 $\Omega_g = \exp(\alpha_g \psi_g)$ 和 $\Omega_c = \exp(\alpha_c \psi_c)$ ，式 (19) 可变换为

$$\left. \begin{aligned} \Omega_c(z, 0) &= S_{c,ini}(z), \quad 0 \leq z \leq l_c \\ \Omega_g(z, 0) &= S_{g,ini}(z), \quad l_c \leq z \leq (l_c + l_g) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式中： $S_{c,ini}(z) = [f_c(z) - \theta_{c,r}] / (\theta_{c,s} - \theta_{c,r})$ ，为下卧土在初始时刻的有效饱和度^[46]； $S_{g,ini}(z) = [f_g(z) - \theta_{g,r}] / (\theta_{g,s} - \theta_{g,r})$ ，为根系土在初始时刻的有效饱和度。

3 数学模型对应解析解

为了更好地进行解析求解，可将控制方程 (8) 和 (12) 重新表示为以下形式：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} &= \Theta_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} \quad (L_0 \leq z \leq L_1) \\ \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial \Omega_2}{\partial z} - \omega_2 &= \Theta_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial t} \quad (L_1 \leq z \leq L_2) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

式中： $\alpha = \alpha_c = \alpha_g$ ， α 为土体的去饱和系数； $\Theta_1 = \alpha \cdot (\theta_{1,s} - \theta_{1,r}) / k_{1,s}$ ； $\omega_2 = \alpha \cdot T_p / (l_g \cdot k_{2,s})$ ； $\Theta_2 = \alpha \cdot (\theta_{2,s} - \theta_{2,r}) / k_{2,s}$ ； $L_0 = 0$ ； $L_1 = l_c$ ， $L_2 = l_c + l_g$ 。下

标 i 分别为 1、2，表示下卧土和根系土。 Ω_1 、 Ω_2 、 Θ_1 、 Θ_2 、 ω_2 、 L_1 和 L_2 均为变换后的参数或待求解的变量。

因此，边界条件、连续性条件和初始条件可重新表达为

$$\Omega_1(0, t) = \psi_0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial \Omega_2(L_2, t)}{\partial z} + \alpha \Omega_2(L_2, t) = \frac{\alpha}{k_{2,s}} q_0 \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1(L_1, t) &= \Omega_2(L_1, t) \\ \left[\frac{\partial \Omega_1(L_1, t)}{\partial z} + \alpha \Omega_1(L_1, t) \right] &= \\ \frac{k_{2,s}}{k_{1,s}} \cdot \left[\frac{\partial \Omega_2(L_1, t)}{\partial z} + \alpha \Omega_2(L_1, t) \right] & \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\Omega_i(z, 0) = S_{i,ini}(z) \quad (i = 1, 2) \quad (26)$$

式中： $\psi_0 = \exp(\alpha h_0)$ ； $k_{1,s}$ 、 $k_{2,s}$ 和 $S_{i,ini}$ ($i = 1, 2$) 均为变换后的参数。

参考 Yuan^[39]、江文豪^[51]等所开展的研究，可令 $\Omega_i(z, t) = U_i(z) \cdot q_0 + Z_i(z) + W_i(z, t)$ ，则待求解式 (22) 可转换为如下 3 个子问题：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 U_i(z)}{dz^2} + \alpha \frac{dU_i(z)}{dz} &= 0 \quad (i = 1, 2) \\ \frac{d^2 Z_1(z)}{dz^2} + \alpha \frac{dZ_1(z)}{dz} &= 0 \\ \frac{d^2 Z_2(z)}{dz^2} + \alpha \frac{dZ_2(z)}{dz} - \omega_2 &= 0 \\ \frac{\partial^2 W_i(z, t)}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial W_i(z, t)}{\partial z} &= \Theta_i \frac{\partial W_i(z, t)}{\partial t} \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

式中： $U_i(z)$ 、 $Z_i(z)$ 和 $W_i(z, t)$ 为待求解的 3 个变量。

对于变量 $U_i(z)$ ，其求解条件可写为

$$U_1(0) = 0 \quad (28)$$

$$\frac{dU_2(L_2)}{dz} + \alpha U_2(L_2) = \frac{\alpha}{k_{2,s}} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} U_1(L_1) &= U_2(L_1) \\ \left[\frac{dU_1(L_1)}{dz} + \alpha U_1(L_1) \right] &= \frac{k_{2,s}}{k_{1,s}} \cdot \left[\frac{dU_2(L_1)}{dz} + \alpha U_2(L_1) \right] \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

对于变量 $Z_i(z)$ ，其求解条件可写为

$$Z_1(0) = \psi_0 \quad (31)$$

$$\frac{dZ_2(L_2)}{dz} + \alpha Z_2(L_2) = 0 \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_1(L_1) &= Z_2(L_1) \\ \left[\frac{dZ_1(L_1)}{dz} + \alpha Z_1(L_1) \right] &= \frac{k_{2,s}}{k_{1,s}} \cdot \left[\frac{dZ_2(L_1)}{dz} + \alpha Z_2(L_1) \right] \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

对于变量 $W_i(z, t)$, 其求解条件可写为

$$W_1(0, t) = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial W_2(L_2, t)}{\partial z} + \alpha W_2(L_2, t) = 0 \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} W_1(L_1, t) &= W_2(L_1, t) \\ \frac{\partial W_1(L_1, t)}{\partial z} + \alpha W_1(L_1, t) &= \frac{k_{2,s}}{k_{1,s}} \left[\frac{\partial W_2(L_1, t)}{\partial z} + \alpha W_2(L_1, t) \right] \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$W_i(z, 0) = S_{i,\text{ini}}(z) - U_i(z) \cdot q_0 - Z_i(z) \quad (37)$$

3.1 待求解变量 $U_i(z)$ 的求解

根据式 (27) 中第 1 式, 可以确定变量 $U_i(z)$ 的通解为

$$U_i(z) = a_i + b_i \exp(-\alpha z) \quad (i=1, 2) \quad (38)$$

式中: a_1 、 b_1 、 a_2 和 b_2 均为待定参数。

结合式 (30), 可获得如下关系式:

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

式中: $r_{11} = k_{1,s}/k_{2,s}$; $r_{12} = 0$; $r_{21} = (1 - k_{1,s}/k_{2,s}) \cdot \exp(\alpha L_1)$; $r_{22} = 1$ 。

进一步, 利用式 (28)、(29), 则有

$$a_2 = 1/k_{2,s} \quad (40)$$

$$a_1 + b_1 = 0 \quad (41)$$

根据式 (39) ~ (41), 可确定待定参数 a_1 、 b_1 、 a_2 和 b_2 为

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 1/k_{1,s} \\ b_1 &= -1/k_{1,s} \\ a_2 &= 1/k_{2,s} \\ b_2 &= [(1 - k_{1,s}/k_{2,s}) \exp(\alpha L_1) - 1]/k_{1,s} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

3.2 待求解变量 $Z_i(z)$ 的求解

根据式 (27) 中第 2 式, 可以确定与变量 $Z_i(z)$

相关的两个关系式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dZ_1(z)}{dz} + \alpha Z_1(z) &= c_1 \\ \frac{dZ_2(z)}{dz} + \alpha Z_2(z) &= \omega_2 z + c_2 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

式中: c_1 和 c_2 均为待确定的常数。

进一步, 利用式 (31) 和式 (43) 中第 1 式可得

$$Z_1(z) = \psi_0 + \frac{(\alpha \psi_0 - c_1)}{\alpha} [\exp(-\alpha z) - 1] \quad (44)$$

利用式 (32), 可确定 $c_2 = -\omega_2 L_2$ 。

因此, 利用式 (33) 中第 2 式可得

$$\frac{dZ_1(L_1)}{dz} + \alpha Z_1(L_1) = \frac{k_{2,s}}{k_{1,s}} (\omega_2 L_1 - \omega_2 L_2) \quad (45)$$

进一步, 根据式 (44)、(45), 可确定 $Z_1(z)$ 的表达式为

$$Z_1(z) = \exp[-\alpha(z - h_0)] + \frac{T_p}{k_{1,s}} [\exp(-\alpha z) - 1] \quad (46)$$

因此, 式 (33) 中第 1 式可改写为

$$Z_2(L_1) = Z_1(L_1) = \psi_1 \quad (47)$$

式中: $\psi_1 = \exp[-\alpha(L_1 - h_0)] + T_p/k_{1,s} \cdot [\exp(-\alpha L_1) - 1]$, ψ_1 为常数。

进一步, 令 $Z_2(z) = R_2(z) + \psi_1 \exp[-\alpha(z - L_1)]$, 则有关 $R_2(z)$ 的控制方程和边界条件可写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 R_2(z)}{dz^2} + \alpha \frac{dR_2(z)}{dz} - \omega_2 &= 0 \\ R_2(L_1) &= 0 \\ \frac{dR_2(L_2)}{dz} + \alpha R_2(L_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

参考 Yuan 等^[39]的研究工作和式 (48), 可获得 $R_2(z)$ 的解析解为

$$R_2(z) = \int_{L_1}^{L_2} G(z, s) \cdot \omega_2 ds \quad (49)$$

$$G(z, s) = \begin{cases} \frac{\exp[-\alpha(z - L_1)]}{\alpha} [1 - \exp(\alpha s - \alpha L_1)], & L_1 \leq s \leq z \leq L_2 \\ \frac{1}{\alpha} \{ \exp[-\alpha(z - L_1)] - 1 \}, & L_1 \leq z \leq s \leq L_2 \end{cases} \quad (50)$$

式中: $G(z, s)$ 为 Green 函数; s 为待积分的虚拟变

量。

利用式 (49) 以及 $Z_2(z)$ 和 $R_2(z)$ 的关系, 可确定 $Z_2(z)$ 的表达式为

$$Z_2(z) = \frac{T_p/l_2}{\alpha \cdot k_{2,s}} [\exp(\alpha L_1 - \alpha z)(\alpha L_2 - \alpha L_1) - 1 + \exp(\alpha L_1 - \alpha z) - \alpha(L_2 - z)] + \psi_1 \exp[-\alpha(z - L_1)] \quad (51)$$

3.3 待求解变量 $W_i(z,t)$ 的求解

结合江文豪等^[51-52]的研究和式 (27) 中第 3 式的形式, 可假定 $W_i(z,t)$ 的表达式为

$$W_i(z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \exp(-\alpha z/2) P_{i,m}(z) T_m(t) \quad (i=1,2) \quad (52)$$

式中: $m=1,2,\dots,\infty$; $P_{i,m}(z)$ 为与 m 和 i 有关的待求解变量; $T_m(t)$ 为与 m 有关的待求解变量。

将式 (52) 代入到式 (27) 中第 3 式, 可得到如下两个关键方程:

$$\left. \begin{aligned} T'_m(t)/T_m(t) &= -\beta_m^2 \\ \frac{P''_{i,m}(z) - \alpha^2/4 \cdot P_{i,m}(z)}{\Theta_i P_{i,m}(z)} &= -\beta_m^2 \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

式中: β_m 为与 m 有关的待确定参数。

根据式 (53) 中第 1 式, 可获得 $T_m(t)$ 的通解为

$$T_m(t) = h_m \cdot \exp(-\beta_m^2 t) \quad (54)$$

式中: h_m 为与 m 有关的待确定参数。

对于 $P_{i,m}(z)$ 的通解, 存在两种情况^[51-53]。当 $\beta_m^2 \Theta_i < \alpha^2/4$ 时^[51-53], 则有

$$P_{i,m}(z) = I_{i,m} \sinh(\lambda_{i,m} z) + J_{i,m} \cosh(\lambda_{i,m} z) \quad (55)$$

式中: $\lambda_{i,m} = \sqrt{\beta_m^2 \Theta_i - \alpha^2/4}$, $\lambda_{i,m}$ 、 $I_{i,m}$ 和 $J_{i,m}$ 均为与 m 和 i 有关的待确定参数。

当 $\beta_m^2 \Theta_i \geq \alpha^2/4$ 时, 则有

$$P_{i,m}(z) = I_{i,m} \sin(\lambda_{i,m} z) + J_{i,m} \cos(\lambda_{i,m} z) \quad (56)$$

进一步, 根据式 (36) 可得

$$\begin{bmatrix} I_{2,m} \\ J_{2,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1,m} \\ J_{1,m} \end{bmatrix} \quad (57)$$

式中: n_{11} 、 n_{12} 、 n_{21} 和 n_{22} 均表示待定系数。

由于 $P_{i,m}(z)$ 的表达式与 β_m^2 的大小有关, 因此待定系数 n_{11} 、 n_{12} 、 n_{21} 和 n_{22} 存在 4 种情况。情况 1

为 $\beta_m^2 \Theta_1 < \alpha^2/4$ 和 $\beta_m^2 \Theta_2 < \alpha^2/4$; 情况 2 为 $\beta_m^2 \Theta_1 < \alpha^2/4$ 和 $\beta_m^2 \Theta_2 \geq \alpha^2/4$; 情况 3 为 $\beta_m^2 \Theta_1 \geq \alpha^2/4$ 和 $\beta_m^2 \Theta_2 < \alpha^2/4$; 情况 4 为 $\beta_m^2 \Theta_1 \geq \alpha^2/4$ 和 $\beta_m^2 \Theta_2 \geq \alpha^2/4$ 。关于这 4 种情况的类似讨论, 可参见 Jiang 等^[53]的研究。对于 4 种情况下 n_{11} 、 n_{12} 、 n_{21} 和 n_{22} 的表达式, 见附录 A。

进一步, 利用上下边界条件可得

$$[V_{11} \quad V_{12}] \begin{bmatrix} I_{1,m} \\ J_{1,m} \end{bmatrix} = 0 \quad (58)$$

$$[N_{11} \quad N_{12}] \begin{bmatrix} I_{2,m} \\ J_{2,m} \end{bmatrix} = 0 \quad (59)$$

式中: V_{11} 、 V_{12} 、 N_{11} 和 N_{12} 均为待定系数。

在式 (58) 中, 鉴于 $\sin(\lambda_{1,m} L_0)$ 和 $\sinh(\lambda_{1,m} L_0)$ 均为 0, 而 $\cos(\lambda_{1,m} L_0)$ 和 $\cosh(\lambda_{1,m} L_0)$ 均为 1。因此有: $V_{11} = 0$, $V_{12} = 1$ 。

在式 (59) 中, N_{11} 和 N_{12} 的表达式存在两种情况, 这与 β_m^2 的大小有关。当 $\beta_m^2 \Theta_2 < \alpha^2/4$ 时, 则有 $N_{11} = \alpha/2 \sinh(\lambda_{2,m} L_2) + \lambda_{2,m} \cosh(\lambda_{2,m} L_2)$, $N_{12} = \alpha/2 \cosh(\lambda_{2,m} L_2) + \lambda_{2,m} \sinh(\lambda_{2,m} L_2)$; 相反, 当 $\beta_m^2 \Theta_2 \geq \alpha^2/4$ 时, 则有 $N_{11} = \alpha/2 \sin(\lambda_{2,m} L_2) + \lambda_{2,m} \cos(\lambda_{2,m} L_2)$, $N_{12} = \alpha/2 \cos(\lambda_{2,m} L_2) - \lambda_{2,m} \sin(\lambda_{2,m} L_2)$ 。

此外, 为进一步求解, 可令 $I_{1,m} = 1$, 则 $J_{1,m} = 0$ 。

结合式 (57)、(58)、(59), 可获得与 β_m 有关的超越方程为

$$[N_{11} \quad N_{12}] \cdot \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{1,m} \\ J_{1,m} \end{bmatrix} = 0 \quad (60)$$

在实际开展运算时, 尽管利用式 (60) 可获得无穷多个 β_m , 但通常取前 100 个即可获得稳定的计算结果。有关这种通过超越方程确定待定系数 β_m 的解析运算方法在 Chen^[1]、Jiang^[54]等的研究中也介绍。当 β_m 确定后, 待定系数 $\lambda_{1,m}$ 和 $\lambda_{2,m}$ 可被确定。利用上述关系式, 可确定 $J_{1,m}$ 、 $I_{2,m}$ 和 $J_{2,m}$ 。也因此, 可确定待定函数 $P_{1,m}(z)$ 和 $P_{2,m}(z)$ 。

进一步, 根据式 (37), 可确定 h_m 表达式为

$$h_m = \frac{\sum_{i=1}^2 \int_{L_{i-1}}^{L_i} W_i(z,0) \cdot (\theta_{i,s} - \theta_{i,r}) \exp(\alpha z/2) P_{i,m}(z) dz}{\sum_{i=1}^2 \int_{L_{i-1}}^{L_i} (\theta_{i,s} - \theta_{i,r}) P_{i,m}(z) P_{i,m}(z) dz} \quad (61)$$

鉴于 $\alpha^2/4$ 的值是恒定的, 而 β_m 的值会随级数 m 的增大而增大。因此, β_m^2 小于 $\alpha^2/(4 \cdot \Theta_1)$ 或 $\alpha^2/(4 \cdot \Theta_2)$ 的个数是有限的^[51-53]。这里记 β_m^2 小于 $\alpha^2/(4 \cdot \Theta_i)$ 为 B_i (B_i 为大于或等于 0 的整数), 则

$W_i(z,t)$ 的表达式可写为

$$W_i(z,t) = \exp\left(-\frac{\alpha}{2}z\right) \times \left\{ \sum_{m=1}^{B_i} [I_{i,m} \sinh(\lambda_{i,m}z) + J_{i,m} \cosh(\lambda_{i,m}z)] \exp(-\beta_m^2 t) h_m + \sum_{m=B_i+1}^{\infty} [I_{i,m} \sin(\lambda_{i,m}z) + J_{i,m} \cos(\lambda_{i,m}z)] \exp(-\beta_m^2 t) h_m \right\} \quad (62)$$

3.4 几个关键参数的表达式

根据 $\Omega_i(z,t) = U_i(z) \cdot q_0 + Z_i(z) + W_i(z,t)$ 和上述关系式, 可确定 $\Omega_i(z,t)$ 的表达式为

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1(z,t) &= [a_1 + b_1 \exp(-\alpha z)] q_0 + \exp[-\alpha(z - h_0)] + \frac{T_p}{k_{1,s}} [\exp(-\alpha z) - 1] + \exp\left(-\frac{\alpha}{2}z\right) \left\{ \sum_{m=1}^{B_1} \sinh(\lambda_{1,m}z) \exp(-\beta_m^2 t) h_m + \sum_{m=B_1+1}^{\infty} \sin(\lambda_{1,m}z) \exp(-\beta_m^2 t) h_m \right\} \\ \Omega_2(z,t) &= [a_2 + b_2 \exp(-\alpha z)] q_0 + T_p/l_2 \cdot k_{2,s} \cdot [\exp(-\alpha z) \cdot l_2 - (L_2 - z)] + \frac{T_p/l_2}{\alpha} k_{2,s} \cdot [\exp(\alpha L_1 - \alpha z) - 1] + \psi_1 \exp[-\alpha(z - L_1)] + \exp\left(-\frac{\alpha}{2}z\right) \times \left\{ \sum_{m=1}^{B_2} [I_{2,m} \sinh(\lambda_{2,m}z) + J_{2,m} \cosh(\lambda_{2,m}z)] \exp(-\beta_m^2 t) h_m + \sum_{m=B_2+1}^{\infty} [I_{2,m} \sin(\lambda_{2,m}z) + J_{2,m} \cos(\lambda_{2,m}z)] \cdot \exp(-\beta_m^2 t) h_m \right\} \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

进一步, 可确定渗透系数 $k_i(z,t)$ 、含水率 $\theta_i(z,t)$ 和压力水头 $\psi_i(z,t)$ 的表达式为

$$k_i(z,t) = k_{i,s} \cdot \Omega_i(z,t) \quad (i=1,2) \quad (64)$$

$$\theta_i(z,t) = \theta_{i,r} + (\theta_{i,s} - \theta_{i,r}) \cdot \Omega_i(z,t) \quad (i=1,2) \quad (65)$$

$$\psi_i(z,t) = \ln[\Omega_i(z,t)]/\alpha \quad (i=1,2) \quad (66)$$

若本研究所考虑非饱和和植被土为植被盖层, 则在任意时刻, 其底部的渗漏速率 (即渗流速率) Q_b 和累计渗漏量 CQ_b 可写为^[40, 55]

$$Q_b(t) = -v_c(0,t) = \frac{k_{1,s}}{\alpha} \left[\frac{\partial \Omega_1(0,t)}{\partial z} + \alpha \Omega_1(0,t) \right] \quad (67)$$

$$CQ_b(t) = \int_0^t Q_b(\tau) d\tau \quad (68)$$

值得补充说明的是, 对于式 (67) 的具体表达式, 可通过式 (63) 中第 1 式确定。对于蒸发和降雨速率较小的工程场景, 渗漏速率 Q_b 值可能会出现小于 0 的情况。当 Q_b 值小于 0 时, 由于此时不会产生累计渗漏量的增加, 式 (68) 中的 Q_b 取为 0。

4 解析解的对比验证

4.1 与 Yuan 等^[39]解析解对比

Yuan 等^[39]基于 Laplace 变换, 发展得到了恒定降雨速率下水分在非饱和和植被土中一维瞬态渗流解析解。在该解析解中, 初始含水率被设定为之前稳态渗流计算得到的含水率。此外, 为得到相应解析解, Yuan 等^[39]未考虑根系存在引起的渗透系数、饱和含水率等水文性质改变, 仅考虑了根系吸水引起的蒸腾作用。设前期降雨/蒸发速率为 q_a , 在稳态渗流条件下, 渗透系数 $k_i(z)$ 的表达式为

$$\left. \begin{aligned} k_1(z) &= k_{1,s} \cdot \exp[\alpha(h_0 - z)] + q_a [\exp(-\alpha z) - 1] + [T_p/(L_2 - L_1)] \cdot (L_2 - L_1) \cdot [\exp(-\alpha z) - 1] \\ k_2(z) &= k_{1,s} \cdot \exp[\alpha(\psi_0 - z)] + q_a [\exp(-\alpha z) - 1] + \frac{T_p/(L_2 - L_1)}{\alpha} \cdot [\alpha(L_2 - L_1) + \exp(\alpha \cdot L_1)] \cdot \exp(-\alpha z) - \frac{T_p/(L_2 - L_1)}{\alpha} [\alpha(L_2 - z) + 1] \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

因此, 本研究可参考 Yuan 等^[39]解析解简化相关参数, 如忽略根系引起的土体饱和和渗透系数等水文性质变化, 并将两种解析解的计算结果进行对比。在开展后续分析时, 具体计算参数见表 1。

图 3 展示了两种解析解计算所得的有效饱和度和 $\Omega_i (i=1,2)$ 随竖向坐标 z 分布。在两种初始稳态渗流条件下, 可发现两个解析解所得计算结果均具有很好的 consistency。进一步, 图 4 对比了两种初始稳态渗

表 1 非饱和和植被土中水分渗流的简化计算参数

Table 1 Simplified calculation parameters for water seepage in the unsaturated vegetated soil

速率 $q_a / (10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})$		$q_0 / (10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})$		厚度 / m		去饱和系数 α_c	饱和和渗透系数 $k_{c,s}$	蒸腾速率 T_p	饱和和体积含水率 $\theta_{c,s}$	残余体积含水率 $\theta_{c,r}$	压力水头 h_0
前期降雨	蒸发	降雨	蒸发	l_c	l_g	$/(1 \cdot \text{m}^{-1})$	$/(10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})$	$/(10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})$	$/(\text{m}^3 \cdot \text{m}^{-3})$	$/(\text{m}^3 \cdot \text{m}^{-3})$	/ m
-0.1	0.9	0.9	-0.1	1.5	0.5	0.5	1.0	0.4	0.38	0.08	0.0

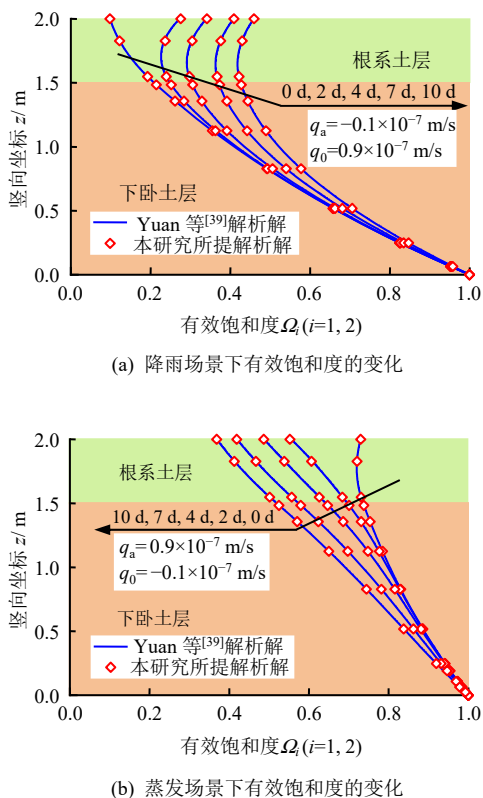


图 3 本研究所提解析解与 Yuan 等^[39]解析解在有效饱和度方面对比
Fig.3 Comparison between the analytical solution proposed in this study and the analytical solution of Yuan et al. ^[39] in terms of effective saturation

流条件下底部渗流速率 Q_b 随时间变化, 可发现两个解析解所得结果同样具有较好一致性。图 3、4 中的

对比结果一定程度验证了本研究所提解析解的正确性。

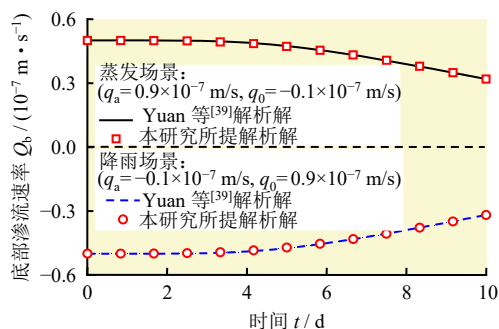


图 4 本研究所提解析解与 Yuan 等^[39]解析解在底部渗流速率方面对比
Fig.4 Comparison between the analytical solution proposed in this study and that of Yuan et al. ^[39] in terms of bottom seepage rate

4.2 与有限差分分解对比

数值方法如有限差分法也用于求解水分瞬态渗流控制方程, 进而模拟水分在非饱和土中的渗流规律^[56-57]。为进一步验证所提解析解的合理性, 本节可将解析解计算结果与相应有限差分计算结果对比。在开展数值计算时, 参考朱帅润等^[56]采用的 Chebyshev 网格划分方法(一种改进的非均匀网格划分方法)进行有限差分, 详细步骤和数值计算方法可参考朱帅润^[56]和 Wu^[57]等的研究。在对比研究中, 表 2 所示的参数被采用。

表 2 与非饱和植被土相关的计算参数
Table 2 Calculated parameters related to the unsaturated vegetated soil

降雨速率 q_0 $/(10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})$	厚度 l_g 和 l_c /m	去饱和 系数 α_c $/(1 \cdot \text{m}^{-1})$	饱和和渗透 系数 k_{cs} $/(10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})$	植被根系 的蒸腾 速率 T_p $/(\text{mm} \cdot \text{d}^{-1})$	饱和体积 含水率 θ_{cs} $/(\text{m}^3 \cdot \text{m}^{-3})$	残余体积 含水率 θ_{cr} $/(\text{m}^3 \cdot \text{m}^{-3})$	下卧土 初始体积 含水率 $f_c(z)$	底部压 力水头 h_0 /m	根系体 积占比 R_v	渗透系 数拟合 参数 C_k	渗透系 数增大 参数 η_{dec}	根系土 初始体 积含水率 $f_g(z)$	残余体积 含水率 θ_{gr} $/(\text{m}^3 \cdot \text{m}^{-3})$
0.4 和 0.8	0.5 和 0.5	1.6	1.0	4.0	0.40	0.10	$\theta_{cs} - (\theta_{cs} - \theta_{cr}) \cdot z / (2L_2)$	0.0	0.05	0.067 6	5.2	$\theta_{gs} - (\theta_{gs} - \theta_{gr}) \cdot z / (2L_2)$	$\theta_{gs} / 4$

图 5 所示为两种计算方法所得压力水头 ψ_i ($i=1,2$) 随竖向坐标 z 的变化。在不同时刻和两种降雨速率下, 可发现基于解析和数值两种方法所得压力水头 ψ_i 的分布也具有较好的一致性, 这进一步验证了本研究所提解析解的正确性。

5 参数分析

在工程实践中, 固废填埋场地的顶部区域通常需建造一个盖层系统以隔绝周边生态环境^[8-10, 40],

如图 1 所示的植被盖层。为研究植被存在对填埋场盖层阻隔雨水渗漏效果的影响, 可开展参数分析, 明确不同根系土层厚度 l_g 、蒸腾速率 T_p 、根系体积占比 R_v 等关键参数下底部渗漏速率 Q_b 和累计渗流量 CQ_b 的变化特征。值得说明的是, 为便于比较分析, 无植被的情况也被考虑, 此时根系土层与下卧土层的工程性质完全相同, 且不存在蒸腾作用, 该盖层也被记为单一盖层。除特别说明外, 可采用表 2 中所示参数开展后续研究。

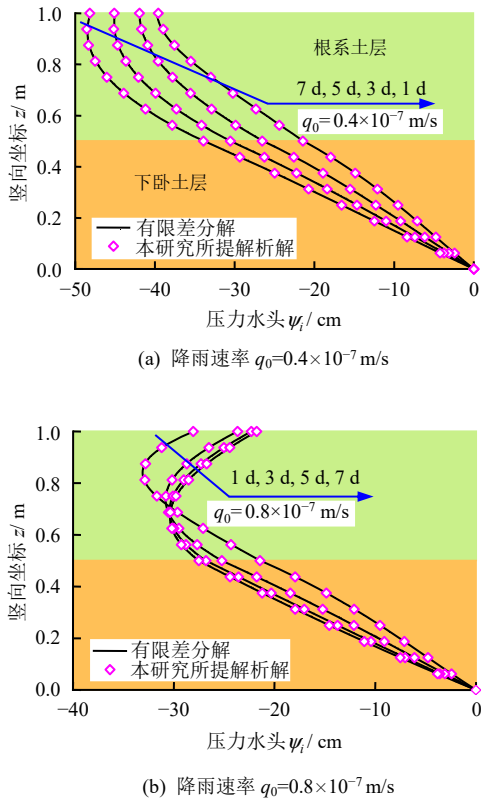


图5 本研究所提解析解与有限差分解的计算结果对比
Fig.5 Comparison of the computational results of the proposed analytical solution in this study and the finite difference solution

5.1 根系土层厚度的影响

根系垂直长度的变化意味着根系土层厚度 l_g 发生变化。为研究其影响，图 6 给出了不同 l_g 下植被盖层底部的渗漏速率 Q_b 随时间变化，其中单一盖层下 Q_b 的变化也被提供。可以发现，在同一时刻和两种降雨速率 q_0 下，单一盖层中的渗漏速率 Q_b 均始终大于植被盖层中的渗漏速率 Q_b ，且对应的 Q_b 差值随时间呈增大趋势。此外，可发现 l_g 的增大会使同一时间下的 Q_b 值减小，即 l_g 越大，同一时刻下的 Q_b 值越小。上述结果表明，植被根系存在有助于减小降雨场景下填埋场盖层底部水分渗透量，且 l_g 越大，这种阻隔雨水渗透的效果越为显著。

值得补充说明的是，当 q_0 为 0.4×10^{-7} m/s 时，不同类型盖层中 Q_b 均随时间逐渐减小。当 q_0 为 0.8×10^{-7} m/s 时，对于植被盖层，在 l_g 较小情况下（如 $l_g = 0.2$ m 时）， Q_b 随时间也呈逐渐减小趋势。然而，对于单一盖层和 l_g 较大的植被盖层（如 $l_g = 0.8$ m 时）， Q_b 随时间呈先减小后增大的变化趋势。出现这一结果的主要原因在于，对于本研究所考虑的初始条件，填埋场盖层自身（初始时刻未达到 Q_b 值为

0 的稳定渗流状态）会产生底部渗漏，因而在初始阶段，不同盖层渗漏速率 Q_b 均会出现先减小的变化趋势。根据渗流连续性条件可知，对于单一盖层，对应 Q_b 会趋于 q_0 ，因而在 q_0 较小情况下， Q_b 会逐渐减小；在 q_0 较大情况下，由于雨水入渗至底部的时间较长，因而 Q_b 会先减小后逐渐增大。在降雨场景下，植被盖层与单一盖层中的渗流行为是基本一致的，但由于植被土层中的根系可吸收水分，因而对应的 Q_b 值以更大的下降速率减小。同样，由于雨水在植被盖层中的入渗需要时间，对于 l_g 较大的植被盖层，其底部水分的渗漏速率 Q_b 出现了先减小后略微增大的变化趋势。

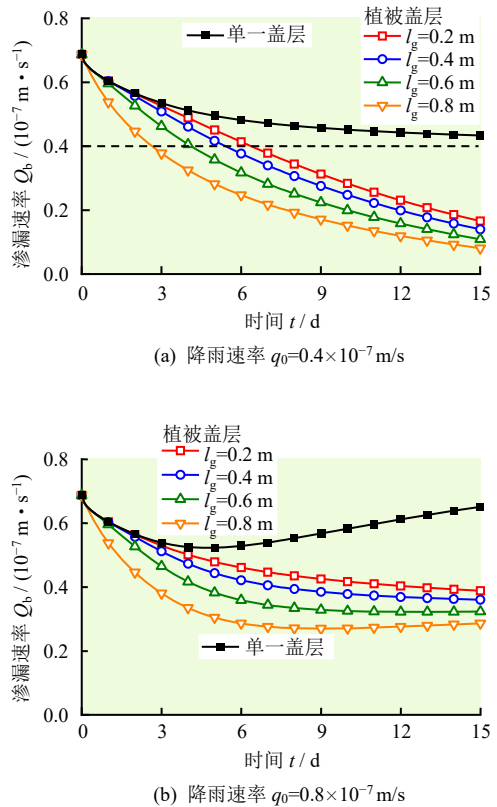


图6 不同根系土层厚度下渗漏速率随时间变化
Fig.6 Variations of leakage rate with time under different rooted soil thicknesses

为进一步分析根系土层厚度 l_g 对植被盖层阻隔雨水渗透效果的影响，图 7 给出了 15 d 时两种降雨速率 q_0 下的累计渗透量 CQ_b ，并给出了单一盖层下的 CQ_b 值。与渗漏速率 Q_b 的变化趋势一致，在同一 q_0 下，单一盖层中的 CQ_b 值最大。当 q_0 为 0.4×10^{-7} m/s 和 0.8×10^{-7} m/s 时，单一盖层中对应的 CQ_b 值分别为 0.063 5 m 和 0.074 8 m。对于植被盖层，在 q_0 等于 0.4×10^{-7} m/s 情况下， l_g 为 0.2、0.4、0.6、0.8 m

时对应的 CQ_b 值依次为 0.048 9、0.045 4、0.039 8、0.032 6 m；在 q_0 等于 0.8×10^{-7} m/s 情况下， l_g 为 0.2、0.4、0.6、0.8 m 时对应的 CQ_b 值依次为 0.060 4、0.056 6、0.050 6、0.042 9 m。另外，对比可发现，对于不同类型盖层，两种降雨速率下的 CQ_b 差值基本一致，对应平均差值为 0.011 0 m。上述结果进一步表明，植被土层厚度 l_g 的增大有助于减小填埋场盖层底部的渗漏量。同时，这一结果也显示，不同 l_g 下植被盖层对雨水渗漏的阻隔效果有限。当降雨速率 q_0 继续增大时，相同 q_0 增量下 CQ_b 增量的变化较小。

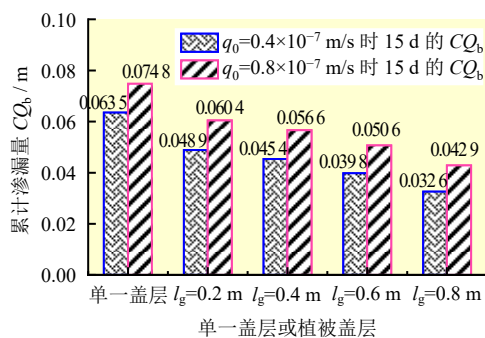


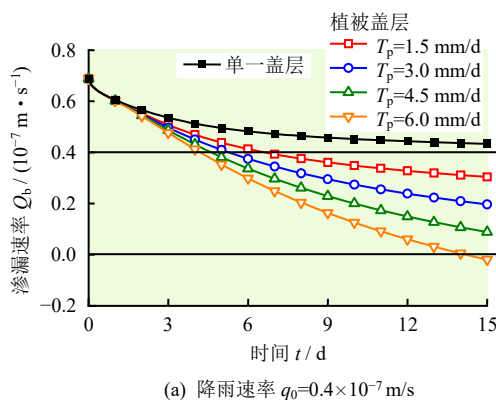
图 7 不同植被土层厚度下的累计渗流量
Fig.7 Cumulative leakage under different rooted soil thicknesses

5.2 蒸腾速率的影响

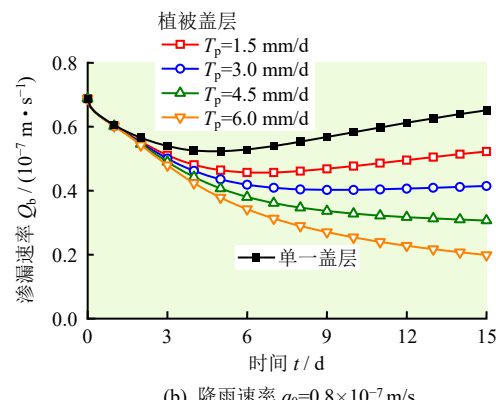
蒸腾速率 T_p 是影响降雨场景下植被盖层中水分入渗速率的重要参数，其与根系的吸水强度有关。为研究其影响，图 8 给出了不同 T_p 下植被盖层底部的渗漏速率 Q_b 随时间变化，其中单一盖层下 Q_b 的变化也被给出以作参考。与图 6 一致，在同一时刻和两种降雨速率 q_0 下，植被盖层中的渗漏速率 Q_b 始终低于单一盖层中的渗漏速率 Q_b ，且蒸腾速率 T_p 越大，两类盖层下 Q_b 的差异也越大。进一步，可发现 T_p 的增大会使同一时刻下的 Q_b 值减小。上述结果表明，蒸腾速率 T_p 的增大可显著减小降雨场景下填埋场盖层底部的渗漏速率。

为进一步探讨蒸腾速率 T_p 对植被盖层阻隔雨水渗漏效果的影响，图 9 展示了 15 d 时两种降雨速率 q_0 下的累计渗流量 CQ_b ，并给出了单一盖层下的 CQ_b 值。可以发现，在不同 q_0 下，单一盖层中的 CQ_b 值始终大于植被盖层中的 CQ_b 值，这与图 8 中 Q_b 的变化一致。进一步，可以看出，随着蒸腾速率 T_p 的增大，两种降雨速率 q_0 下填埋场盖层底部的累计渗流量 CQ_b 呈线性减小趋势。例如，在 q_0 为 $0.4 \times$

10^{-7} m/s 时， T_p 从 1.5 mm/d 增大至 6.0 mm/d，使得 CQ_b 从 0.053 9 m 减小至 0.034 0 m。相似地，在 q_0 为 0.8×10^{-7} m/s 时， T_p 从 1.5 mm/d 增大至 6.0 mm/d，使得 CQ_b 从 0.065 0 m 减小至 0.045 0 m。需补充的是，与图 7 相似，对于不同类型填埋场盖层，两种降雨速率下的 CQ_b 差值基本一致，对应平均差值为 0.011 0 m。这些结果进一步显示，蒸腾速率 T_p 是影响植被盖层阻隔雨水渗漏效果的关键参数，在特定降雨场景下，盖层底部的累计渗流量 CQ_b 会随 T_p 的



(a) 降雨速率 $q_0 = 0.4 \times 10^{-7}$ m/s



(b) 降雨速率 $q_0 = 0.8 \times 10^{-7}$ m/s

图 8 不同蒸腾速率下渗漏速率随时间的变化
Fig.8 Variations of leakage rate with time under different transpiration rates

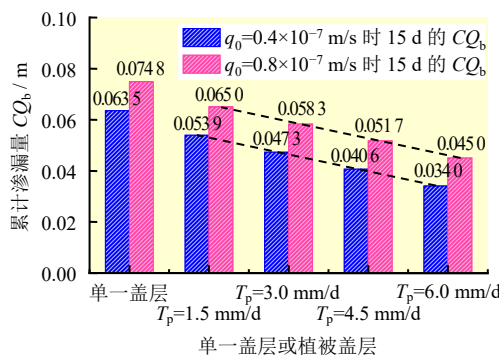


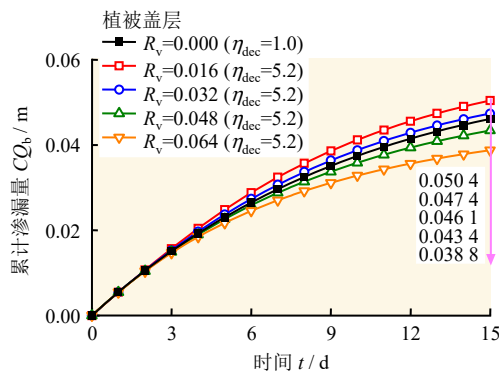
图 9 不同蒸腾速率下的累计渗流量
Fig.9 Cumulative leakage under different transpiration rates

增大呈线性降低趋势。

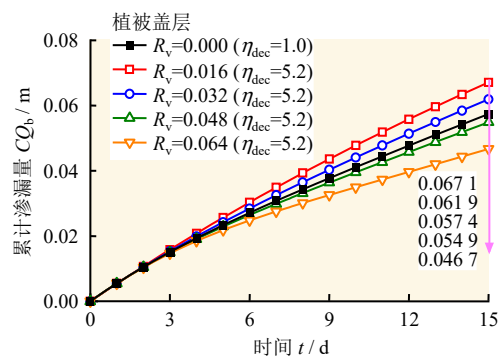
值得注意的是，在图 8(a)中，当蒸腾速率 T_p 为 6 mm/d (即 0.694×10^{-7} m/s) 时，由于 T_p 明显大于植被盖层上方的降雨速率 q_0 (此时 q_0 为 0.4×10^{-7} m/s)，因而渗漏速率 Q_b 出现了为负值的情况，其本质是填埋场盖层底部的水分出现了向上渗流。这一结果反映了当降雨速率 q_0 小于根系土层中根系吸水所引起的蒸腾速率 T_p 时，降雨场景可能不会引起填埋场盖层中的水分发生向下渗漏。

5.3 根系体积占比的影响

根系体积占比 R_v 的变化会改变根系土的水文性质如饱和渗透系数和饱和含水率，从而影响植被盖层的工程性能。鉴于填埋场盖层中底部的渗漏速率 Q_b 与累计渗漏量 CQ_b 变化规律一致，图 10 仅给出了不同 R_v 下 CQ_b 随时间的变化，其中 R_v 为 0 的极端情况也被考虑。对于 R_v 为 0.00 的极端情况，渗透系数增大参数 η_{dec} 被设定等于 1.0 以模拟忽略根系对水文特性影响对应的工程场景^[32, 35]。



(a) 降雨速率 $q_0=0.4 \times 10^{-7}$ m/s



(b) 降雨速率 $q_0=0.8 \times 10^{-7}$ m/s

图 10 不同根系体积占比下累计渗漏量随时间变化

Fig.10 Variations of cumulative leakage with time under different root volume ratios

从图 10 可知，当 R_v 为 0.016 和 0.032 时，同一时刻下植被盖层底部的累计渗漏量 CQ_b 大于极端

情况 ($R_v = 0.00$) 下的 CQ_b 。相反，当 R_v 为 0.048 和 0.064 时，同一时刻下植被盖层中的 CQ_b 值低于极端情况下的 CQ_b 值。此外，当 R_v 处于 0.016~0.064 之间，在 η_{dec} 保持不变的情况下， CQ_b 值随 R_v 的增大而减小。这说明，根系体积占比的增大有助于提升植被盖层阻隔雨水渗漏的效果。

进一步，出现图 10 中计算结果的主要原因可通过图 11 来说明。图 11 为不同根系体积占比 R_v 下根系土饱和渗透系数 $k_{g,s}$ 的变化。可以看出，与极端情况 ($R_v = 0.00$) 下的 $k_{g,s}$ 相比，当 R_v 为 0.016 和 0.032 时，根系土的 $k_{g,s}$ 较大；当 R_v 为 0.048 和 0.064 时，根系土的 $k_{g,s}$ 较小。在本研究中，由于未考虑渗透系数增大参数 η_{dec} 的变化，根系体积占比 R_v 的增大会使 $k_{g,s}$ 呈对数形式减小^[35]，这会减小降雨场景下底部水分的渗漏速率，进而降低同一时刻下填埋场盖层底部的累计渗漏量 CQ_b 。上述结果表明，根系存在引起饱和渗透系数变化也会影响植被盖层阻隔雨水渗漏的效果，不应被忽略。

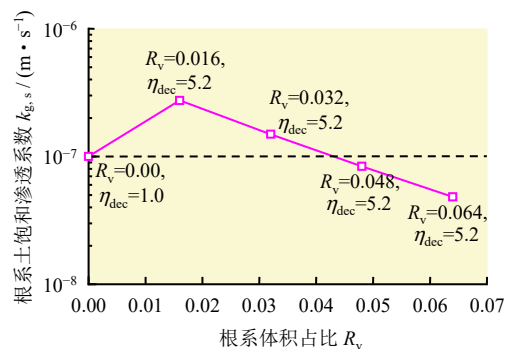


图 11 根系土饱和和渗透系数随根系体积占比的变化

Fig.11 Variation of saturated permeability coefficient of the rooted soils with root volume ratio

值得补充说明的是，Ni 等^[45]总结现有研究结果指出，渗透系数增大参数 η_{dec} 通常在 1.3~6.5 之间变化。对于低密度植被土，根系生长会占据土体孔隙，这会降低根系土的饱和渗透系数^[36-37, 58]。然而，对于高密度植被土，腐烂根系的存在容易形成优势渗流孔道，这可能会整体上增大根系土的饱和渗透系数^[36-37, 58]。对于不同类型的植被根系，渗透系数增大参数 η_{dec} 也可能存在较大差异^[45]。在根系体积占比等参数相同情况下， η_{dec} 的增大会增大根系土的渗透系数，从而增加降雨作用下植被盖层底部雨水的渗漏量。此外，当根系体积占比 R_v 变化时， η_{dec} 也可能发生变化，从而改变根系土的饱和渗透系数 (或增大，或减小)^[26, 58]，但出于实用、简

化分析考虑, 这方面被忽略了。在后续研究中, 有必要结合根系类型和试验结果进一步分析 R_v 对植被盖层阻隔雨水渗漏效果的影响。

6 主要结论

本文针对根系为均匀形的非饱和植被土, 在考虑根系对水文特性影响的基础上, 通过变量代换获得了线性化的水分一维瞬态渗流控制方程。采用变量分离和级数变换等方法, 求得了非饱和植被土中水分瞬态渗流解析解。随后, 将其计算结果与已有解析解和相应有限差分解的计算结果比较, 验证了该解的合理性。最后, 以一个简单的植被盖层(一类填埋场盖层)为例, 分析了根系相关参数对其阻隔雨水渗漏效果影响。主要结论如下:

(1) 与无植被的单一盖层相比, 相同降雨场景下植被盖层底部的累计渗漏量 CQ_0 较小, 且根系土层厚度 l_g 越大, 这种阻隔雨水渗漏的效果越为显著。然而, 不同 l_g 下的植被盖层对雨水渗漏的阻隔效果有限, 当降雨速率 q_0 继续增大时, 相同 q_0 增量下 CQ_0 增量的变化较小。

(2) 根系土层中蒸腾速率 T_p 的增大可明显降低降雨场景下盖层底部水分的渗漏速率, 且随着 T_p 的增大, 累计渗漏量 CQ_0 呈线性减小趋势。此外, 当降雨速率 $q_0 < T_p$ 时, 降雨场景可能不会引发植被盖层底部水分发生向下渗漏。

(3) 相较于根系体积占比 R_v 为 0 且不考虑根系对水文特性影响的极端情况, 当 R_v 值使得根系土的饱和渗透系数减小时, 植被盖层阻隔雨水入渗的效果会增强, 反之则会减弱。这主要是由于 R_v 的变化会改变根系土的饱和渗透系数, 从而影响植被盖层在服役时的工程性能。

参 考 文 献

- [1] CHEN Z L, HUANG Y Y, FANG H W, et al. An exact solution to the linearized Richards equation for layered media with flexible initial condition[J]. *Water Resources Research*, 2023, 59(9): e2023WR035383.
- [2] ASSOULINE S. Infiltration into soils: conceptual approaches and solutions[J]. *Water Resources Research*, 2013, 49(4): 1755-1772.
- [3] 詹良通, 李鹤, 陈云敏, 等. 东南沿海残积土地区降雨诱发型滑坡预报雨强-历时曲线的影响因素分析[J]. *岩土力学*, 2012, 33(3): 872-880, 886.
ZHAN Liang-tong, LI He, CHEN Yun-min, et al. Parametric analyses of intensity-duration curve for predicting rainfall-induced landslides in residual soil slope in Southeastern coastal areas of China[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2012, 33(3): 872-880.
- [4] 王述红, 何坚, 杨天娇. 考虑降雨入渗的边坡稳定性数值分析[J]. *东北大学学报(自然科学版)*, 2018, 39(8): 1196-1200.
WANG Shu-hong, HE Jian, YANG Tian-jiao. Numerical analysis on stability of slope considering rainfall infiltration[J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2018, 39(8): 1196-1200.
- [5] FENG S, LIU H W, NG C W W. Analytical analysis of the mechanical and hydrological effects of vegetation on shallow slope stability[J]. *Computers and Geotechnics*, 2020, 118: 103335.
- [6] 崔书珍, 周金国. 季节性降雨变化对长三角高速铁路路基工后沉降影响分析[J]. *重庆交通大学学报(自然科学版)*, 2016, 35(3): 58-60, 161.
CUI Shu-zhen, ZHOU Jin-guo. Influence of seasonal rainfall changes on subgrade settlement during operation of high-speed railway in the Yangtze river delta[J]. *Journal of Chongqing Jiaotong University (Natural Science)*, 2016, 35(3): 58-60, 161.
- [7] YAO Y S, NI J J, LI J. Stress-dependent water retention of granite residual soil and its implications for ground settlement[J]. *Computers and Geotechnics*, 2021, 129: 103835.
- [8] ZHAN T L T, QIU Q W, XU W J. Analytical solution for infiltration and deep percolation of rainwater into a monolithic cover subjected to different patterns of rainfall[J]. *Computers and Geotechnics*, 2016, 77: 1-10.
- [9] RAHARDJO H, SATYANAGA A, LEONG E C, et al. Performance of residual soil as cover system for a sanitary landfill in Singapore[J]. *Journal of Performance of Constructed Facilities*, 2017, 31(1): D4016004.
- [10] FITYUS S G, SMITH D W, BOOKER J R. Contaminant transport through an unsaturated soil liner beneath a landfill[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1999, 36(2): 330-354.
- [11] 李华伟, 白冰, 王梦恕, 等. 可溶性污染物在非饱和成层土中的迁移规律研究[J]. *土木工程学报*, 2015, 48(增刊 1): 206-211.
LI Wei-hua, BAI Bing, WANG Meng-shu, et al. Researches on miscible contaminant transport in unsaturated multi-layered soils[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2015, 48(Suppl.1): 206-211.
- [12] MENZIANI M, PUGNAGHI S, VINCENZI S. Analytical solutions of the linearized Richards equation for discrete

- arbitrary initial and boundary conditions[J]. **Journal of Hydrology**, 2007, 332(1-2): 214-225.
- [13] WU L Z, ZHANG L M, LI X. One-Dimensional coupled infiltration and deformation in unsaturated soils subjected to varying rainfall[J]. **International Journal of Geomechanics**, 2016, 16(2): 06015004.
- [14] HAYEK M. An exact explicit solution for one-dimensional, transient, nonlinear Richards' equation for modeling infiltration with special hydraulic functions[J]. **Journal of Hydrology**, 2016, 535: 662-670.
- [15] 曾铃, 李光裕, 史振宁, 等. 降雨入渗条件下非饱和土渗流特征试验[J]. 中国公路学报, 2018, 31(2): 191-199.
ZENG Ling, LI Guang-yu, SHI Zhen-ning, et al. Experiment on seepage characteristics of unsaturated soil under rainfall infiltration[J]. **China Journal of Highway Transport**, 2018, 31(2): 191-199.
- [16] RICHARDS L A. Capillary conduction of liquids through porous mediums[J]. **Physics**, 1931, 1(5): 318-333.
- [17] WARRICK A W, LOMEN D O, ISLAS A. An analytical solution to Richards' equation for a draining soil profile[J]. **Water Resources Research**, 1990, 26(2): 253-258.
- [18] CHEN J M, TAN Y C, CHEN C H, et al. Analytical solutions for linearized Richards equation with arbitrary time-dependent surface fluxes[J]. **Water Resources Research**, 2001, 37(4): 1091-1093.
- [19] HUANG R Q, WU L Z. Analytical solutions to 1-D horizontal and vertical water infiltration in saturated/unsaturated soils considering time-varying rainfall[J]. **Computers and Geotechnics**, 2012, 39: 66-72.
- [20] WU L Z, SUN P, HUANG R Q. Analytical analysis of partially saturated infiltration coupled with deformation in a semi-infinite region[J]. **International Journal of Geomechanics**, 2017, 17(6): 06016040.
- [21] SRIVASTAVA R, YEH T C J. Analytical solutions for one-dimensional, transient infiltration toward the water table in homogeneous and layered soils[J]. **Water Resources Research**, 1991, 27(5): 753-762.
- [22] DE LUCA D L, CEPEDA J M. Procedure to obtain analytical solutions of one-dimensional Richards' equation for infiltration in two-layered soils[J]. **Journal of Hydrologic Engineering**, 2016, 21(7): 04016018.
- [23] 陈佩佩, 张兴博, 金铭, 等. 基于齐次化构建原理的非饱和土瞬态渗流问题解析解[J]. 岩土工程学报, 2023, 45(12): 2490-2499.
CHEN Pei-pei, ZHANG Xing-bo, JIN Ming, et al. Analytical solution of transient seepage problem in unsaturated soil based on principle of homogeneous construction[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2023, 45(12): 2490-2499.
- [24] FENG S, LEUNG A K, NG C W W, et al. Theoretical analysis of coupled effects of microbe and root architecture on methane oxidation in vegetated landfill covers[J]. **Science of the Total Environment**, 2017, 599: 1954-1964.
- [25] 吴宏伟, 周超, 张帅, 等. 状态相关非饱和土力学理论及应用[J]. 中国科学: 技术科学, 2023, 53(10): 1728-1746.
WU Hong-wei, ZHOU Chao, ZHANG Shuai, et al. State-dependent theory for unsaturated soil and its applications[J]. **Scientia Sinica Technologica**, 2023, 53(10): 1728-1746.
- [26] 陈晋龙, 李锦辉, 程鹏, 等. 植被作用下土质覆盖层渗透特性的现场试验[J]. 岩土力学, 2018, 39(1): 222-228.
CHEN Jin-long, LI Jin-hui, CHENG Peng, et al. Field test on seepage performance of soil cover with different types of vegetation[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2018, 39(1): 222-228.
- [27] 郭浩文, 吴宏伟, 张琪, 等. 植被生长对填埋场三层覆盖系统防渗性能的影响[J]. 工程地质学报, 2022, 30(5): 1731-1743.
GUO Hao-wen, WU Hong-wei, ZHANG Qi, et al. Effects of plant growth on water infiltration into three-layer landfill cover system[J]. **Journal of Engineering Geology**, 2022, 30(5): 1731-1743.
- [28] 詹良通, 冯嵩, 李光耀, 等. 生态型土质覆盖层工作原理及其在垃圾填埋场封场治理中的应用[J]. 环境卫生工程, 2022, 30(4): 1-20.
ZHAN Liang-tong, FENG Song, LI Guang-yao, et al. Working principle of ecological soil covers and its application in landfill sealing treatment[J]. **Environmental Sanitation Engineering**, 2022, 30(4): 1-20.
- [29] NI J J, ZHOU J S, WANG Y C, et al. Gas permeability and emission in unsaturated vegetated landfill cover with biochar addition[J]. **Biochar**, 2023, 5(1): 47.
- [30] SONG L, LI J H, ZHOU T, et al. Experimental study on unsaturated hydraulic properties of vegetated soil[J]. **Ecological Engineering**, 2017, 103: 207-216.
- [31] WANG H, CHEN R, LEUNG A K, et al. Temperature effects on the hydraulic properties of unsaturated rooted soils[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2023, 60(6): 936-945.
- [32] NG C W W, LIU H W, FENG S. Analytical solutions for

- calculating pore-water pressure in an infinite unsaturated slope with different root architectures[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2015, 52(12): 1981-1992.
- [33] 吴宏伟. 大气-植被-土体相互作用: 理论与机理[J]. 岩土工程学报, 2017, 39(1): 1-47.
WU Hong-wei. Atmosphere-plant-soil interactions: theories and mechanisms[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2017, 39(1): 1-47.
- [34] FENG S, LIU H W, NG C W W. Analytical analysis of the mechanical and hydrological effects of vegetation on shallow slope stability[J]. **Computers and Geotechnics**, 2020, 118: 103335.
- [35] LIU H W, FENG S, GARG A, et al. Analytical solutions of pore-water pressure distributions in a vegetated multi-layered slope considering the effects of roots on water permeability[J]. **Computers and Geotechnics**, 2018, 102: 252-261.
- [36] NG C W W, NI J J, LEUNG A K, et al. A new and simple water retention model for root-permeated soils[J]. **Geotechnique Letters**, 2016, 6(1): 106-111.
- [37] NI J J, LEUNG A K, NG C W W. Modelling effects of root growth and decay on soil water retention and permeability[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2019, 56(7): 1049-1055.
- [38] NI J J, LEUNG A K, NG C W W. Unsaturated hydraulic properties of vegetated soil under single and mixed planting conditions[J]. **Geotechnique**, 2019, 69(6): 554-559.
- [39] YUAN F, LU Z. Analytical solutions for vertical flow in unsaturated, rooted soils with variable surface fluxes[J]. **Vadose Zone Journal**, 2005, 4(4): 1210-1218.
- [40] MIN M, PU H F, FENG S, et al. Analytical solution for coupled water-gas transport in unsaturated landfill cover system with different root architectures[J]. **Computers and Geotechnics**, 2023, 154: 105134.
- [41] FENG S, LIU H W, NG C W W. Analytical solutions for one-dimensional water flow in vegetated layered soil[J]. **International Journal of Geomechanics**, 2019, 19(2): 04018191.
- [42] WU L Z, CHENG P, ZHOU J T, et al. Analytical solution of rainfall infiltration for vegetated slope in unsaturated soils considering hydro-mechanical effects[J]. **Catena**, 2022, 217: 106472.
- [43] GHESTEM M, SIDLE R C, STOKES A. The influence of plant root systems on subsurface flow: implications for slope stability[J]. **Bioscience**, 2011, 61(11): 869-879.
- [44] YIN J H. Influence of relative compaction on the hydraulic conductivity of completely decomposed granite in Hong Kong[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2009, 46(10): 1229-1235.
- [45] NI J J, LEUNG A K, NG C W W. Modelling hydro-mechanical reinforcements of plants to slope stability[J]. **Computers and Geotechnics**, 2018, 95: 99-109.
- [46] 蔡国庆, 王亚南, 周安楠, 等. 考虑微观孔隙结构的非饱和土水-力耦合本构模型[J]. 岩土工程学报, 2018, 40(4): 618-624.
CAI Guo-qing, WANG Ya-nan, ZHOU An-nan, et al. A microstructure-dependent hydro-mechanical coupled constitutive model for unsaturated soils[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2018, 40(4): 618-624.
- [47] WU L Z, ZHANG L M, HUANG R Q. Analytical solution to 1D coupled water infiltration and deformation in two-layer unsaturated soils[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2012, 36(6): 798-816.
- [48] ZHAN T L T, JIA G W, CHEN Y M, et al. An analytical solution for rainfall infiltration into an unsaturated infinite slope and its application to slope stability analysis[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2013, 37(12): 1737-1760.
- [49] YUAN C, QIN C B, YANG Y L, et al. An analytical insight into stability analysis of unsaturated multi-layered slopes subjected to rainfall infiltration[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2024, 48(17): 4291-4303.
- [50] SHI Y H, XIE H J, WU Y H, et al. Analytical study of water infiltration and contaminant transport in barrier systems[J]. **Water Research**, 2024, 267: 122455.
- [51] 江文豪, 王浩, 廖光志, 等. 时变降雨场景下双层非饱和土中水分一维瞬态渗流解析解[J]. 岩土力学, 2025, 46(9): 2721-2737.
JIANG Wen-hao, WANG Hao, LIAO Guang-zhi, et al. Analytical solutions for one-dimensional transient seepage of water in the two-layered unsaturated soils under time-varying rainfall conditions[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2025, 46(9): 2721-2737.
- [52] 江文豪, 李江山, 黄啸, 等. 考虑对流-扩散-吸附-降解时成层介质中有机污染物一维运移的解析模型[J]. 岩土工程学报, 2023, 45(2): 262-272.
JIANG Wen-hao, LI Jiang-shan, HUANG Xiao, et al. Analytical model for one-dimensional transport of organic contaminants in multi-layered media considering advection-diffusion-adsorption-degradation[J]. **Chinese**

- Journal of Geotechnical Engineering**, 2023, 45(2): 262-272.
- [53] JIANG W H, GE S Q, FENG C, et al. Analytical solutions for transport of organic solutes in multi-layered porous media[J]. **Environmental Geotechnics**, 2023, 12(1): 16-33.
- [54] JIANG W H, GE S Q, HUANG X, et al. General analytical solutions for one-dimensional large strain consolidation of soft soils under electro-osmosis-surcharge preloading[J]. **Soils and Foundations**, 2022, 62(5): 1012-11.
- [55] 邱清文, 詹良通, 黄依艺. 考虑任意初始条件的均质土质覆盖层降雨入渗解析解[J]. **岩土工程学报**, 2017, 39(2): 359-365.
- QIU Qing-wen, ZHAN Liang-tong, HUANG Yi-yi. Analytical solutions for rainfall infiltration into monolithic covers considering arbitrary initial conditions[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2017, 39(2): 359-365.
- [56] 朱帅润, 何博, 吴礼舟, 等. 非饱和渗流模拟中非均匀空间网络的改进方法[J]. **水文地质工程地质**, 2023, 50(1): 32-40.
- ZHU Shuai-run, HE Bo, WU Li-zhou, et al. An improved method for inhomogeneous space grid in the simulation of unsaturated flow[J]. **Hydrogeology & Engineering Geology**, 2023, 50(1): 32-40.
- [57] WU L Z, ZHU S R, PENG J B. Application of the Chebyshev spectral method to the simulation of groundwater flow and rainfall-induced landslides[J]. **Applied Mathematical Modelling**, 2020, 80: 408-425.
- [58] SHAO W, NI J J, LEUNG A K, et al. Analysis of plant root-induced preferential flow and pore-water pressure variation by a dual-permeability model[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2017, 54(11): 1537-1552.

附录 A

对于情况 1, n_{11} 、 n_{12} 、 n_{21} 和 n_{22} 的表达式为

$$n_{11} = \frac{\left[\left(\frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} - 1 \right) \alpha/2 \cdot \sinh(\lambda_{1,m} L_1) \cosh(\lambda_{2,m} L_1) + \frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} \lambda_{1,m} \times \cosh(\lambda_{1,m} L_1) \cosh(\lambda_{2,m} L_1) - \lambda_{2,m} \sinh(\lambda_{1,m} L_1) \sinh(\lambda_{2,m} L_1) \right]}{\lambda_{2,m}} \quad (\text{A1})$$

$$n_{12} = \frac{\left[\left(\frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} - 1 \right) \alpha/2 \cdot \cosh(\lambda_{1,m} L_1) \cosh(\lambda_{2,m} L_1) + \frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} \lambda_{1,m} \times \sinh(\lambda_{1,m} L_1) \cosh(\lambda_{2,m} L_1) - \lambda_{2,m} \cosh(\lambda_{1,m} L_1) \sinh(\lambda_{2,m} L_1) \right]}{\lambda_{2,m}} \quad (\text{A2})$$

$$n_{21} = \frac{\left[\left(\frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} - 1 \right) \sinh(\lambda_{1,m} L_1) \alpha/2 \cdot \sinh(\lambda_{2,m} L_1) + \lambda_{1,m} \frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} \times \sinh(\lambda_{2,m} L_1) \cosh(\lambda_{1,m} L_1) - \sinh(\lambda_{1,m} L_1) \lambda_{2,m} \cosh(\lambda_{2,m} L_1) \right]}{-\lambda_{2,m}} \quad (\text{A3})$$

$$n_{22} = \frac{\left[\left(\frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} - 1 \right) \cosh(\lambda_{1,m} L_1) \alpha/2 \cdot \sinh(\lambda_{2,m} L_1) + \lambda_{1,m} \frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} \times \sinh(\lambda_{2,m} L_1) \sinh(\lambda_{1,m} L_1) - \cosh(\lambda_{1,m} L_1) \lambda_{2,m} \cosh(\lambda_{2,m} L_1) \right]}{-\lambda_{2,m}} \quad (\text{A4})$$

对于情况 2, n_{11} 、 n_{12} 、 n_{21} 和 n_{22} 的表达式为

$$n_{11} = \frac{\left[\left(\frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} - 1 \right) \sinh(\lambda_{1,m} L_1) \alpha/2 \cdot \cos(\lambda_{2,m} L_1) + \frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} \lambda_{1,m} \times \cos(\lambda_{2,m} L_1) \cosh(\lambda_{1,m} L_1) + \lambda_{2,m} \sinh(\lambda_{1,m} L_1) \sin(\lambda_{2,m} L_1) \right]}{\lambda_{2,m}} \quad (\text{A5})$$

$$n_{12} = \frac{\left[\left(\frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} - 1 \right) \cos(\lambda_{2,m} L_1) \alpha/2 \cdot \cosh(\lambda_{1,m} L_1) + \frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} \lambda_{1,m} \times \cos(\lambda_{2,m} L_1) \sinh(\lambda_{1,m} L_1) + \lambda_{2,m} \cosh(\lambda_{1,m} L_1) \sin(\lambda_{2,m} L_1) \right]}{\lambda_{2,m}} \quad (\text{A6})$$

$$n_{21} = \frac{\left[\left(\frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} - 1 \right) \alpha/2 \cdot \sinh(\lambda_{1,m} L_1) \sin(\lambda_{2,m} L_1) + \frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} \lambda_{1,m} \times \cosh(\lambda_{1,m} L_1) \sin(\lambda_{2,m} L_1) - \sinh(\lambda_{1,m} L_1) \lambda_{2,m} \cos(\lambda_{2,m} L_1) \right]}{-\lambda_{2,m}} \quad (\text{A7})$$

$$n_{22} = \frac{\left[\left(\frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} - 1 \right) \alpha/2 \cdot \cosh(\lambda_{1,m} L_1) \sin(\lambda_{2,m} L_1) + \frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} \lambda_{1,m} \times \sinh(\lambda_{1,m} L_1) \sin(\lambda_{2,m} L_1) - \cosh(\lambda_{1,m} L_1) \lambda_{2,m} \cos(\lambda_{2,m} L_1) \right]}{-\lambda_{2,m}} \quad (\text{A8})$$

对于情况 3, n_{11} 、 n_{12} 、 n_{21} 和 n_{22} 的表达式为

$$n_{11} = \frac{\left[\left(\frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} - 1 \right) \sin(\lambda_{1,m} L_1) \alpha/2 \cosh(\lambda_{2,m} L_1) + \frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} \lambda_{1,m} \times \cosh(\lambda_{2,m} L_1) \cos(\lambda_{1,m} L_1) - \sin(\lambda_{1,m} L_1) \lambda_{2,m} \sinh(\lambda_{2,m} L_1) \right]}{\lambda_{2,m}} \quad (\text{A9})$$

$$n_{12} = \frac{\left[\left(\frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} - 1 \right) \alpha/2 \cdot \cos(\lambda_{1,m} L_1) \cosh(\lambda_{2,m} L_1) - \frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} \lambda_{1,m} \times \cosh(\lambda_{2,m} L_1) \sin(\lambda_{1,m} L_1) - \cos(\lambda_{1,m} L_1) \lambda_{2,m} \cdot \sinh(\lambda_{2,m} L_1) \right]}{\lambda_{2,m}} \quad (\text{A10})$$

$$n_{21} = \frac{\left[\left(\frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} - 1 \right) \alpha/2 \cdot \sin(\lambda_{1,m} L_1) \sinh(\lambda_{2,m} L_1) + \frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} \lambda_{1,m} \times \cos(\lambda_{1,m} L_1) \sinh(\lambda_{2,m} L_1) - \sin(\lambda_{1,m} L_1) \lambda_{2,m} \cosh(\lambda_{2,m} L_1) \right]}{-\lambda_{2,m}} \quad (\text{A11})$$

$$n_{22} = \frac{\left[\left(\frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} - 1 \right) \alpha/2 \cdot \cos(\lambda_{1,m} L_1) \sinh(\lambda_{2,m} L_1) - \frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} \lambda_{1,m} \times \sin(\lambda_{1,m} L_1) \sinh(\lambda_{2,m} L_1) - \lambda_{2,m} \cos(\lambda_{1,m} L_1) \cosh(\lambda_{2,m} L_1) \right]}{-\lambda_{2,m}} \quad (\text{A12})$$

对于情况 4, n_{11} 、 n_{12} 、 n_{21} 和 n_{22} 的表达式为

$$n_{11} = \frac{\left[\left(\frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} - 1 \right) \alpha/2 \cdot \sin(\lambda_{1,m} L_1) \cos(\lambda_{2,m} L_1) + \frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} \lambda_{1,m} \times \cos(\lambda_{1,m} L_1) \cos(\lambda_{2,m} L_1) + \sin(\lambda_{1,m} L_1) \lambda_{2,m} \sin(\lambda_{2,m} L_1) \right]}{\lambda_{2,m}} \quad (\text{A13})$$

$$n_{12} = \frac{\left[\left(\frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} - 1 \right) \alpha/2 \cdot \cos(\lambda_{1,m} L_1) \cos(\lambda_{2,m} L_1) - \frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} \lambda_{1,m} \times \sin(\lambda_{1,m} L_1) \cos(\lambda_{2,m} L_1) + \cos(\lambda_{1,m} L_1) \lambda_{2,m} \sin(\lambda_{2,m} L_1) \right]}{\lambda_{2,m}} \quad (\text{A14})$$

$$n_{21} = \frac{\left[\left(\frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} - 1 \right) \alpha/2 \cdot \sin(\lambda_{1,m} L_1) \sin(\lambda_{2,m} L_1) + \frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} \lambda_{1,m} \times \cos(\lambda_{1,m} L_1) \sin(\lambda_{2,m} L_1) - \lambda_{2,m} \sin(\lambda_{1,m} L_1) \cos(\lambda_{2,m} L_1) \right]}{-\lambda_{2,m}} \quad (\text{A15})$$

$$n_{22} = \frac{\left[\left(\frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} - 1 \right) \alpha/2 \cdot \cos(\lambda_{1,m} L_1) \sin(\lambda_{2,m} L_1) - \frac{k_{1,s}}{k_{2,s}} \lambda_{1,m} \times \sin(\lambda_{1,m} L_1) \sin(\lambda_{2,m} L_1) - \cos(\lambda_{1,m} L_1) \lambda_{2,m} \cos(\lambda_{2,m} L_1) \right]}{-\lambda_{2,m}} \quad (\text{A16})$$