

基于空间平滑的二维复合均匀阵列解相干 DOA 算法

王秦川, 于 勇, 胡继军
(北京遥测技术研究所 北京 100076)

摘要: 随着雷达干扰机应用需求的日益增加, 传统阵列设计与测向算法存在以下关键局限: 均匀阵列信息冗余度过高、阵列物理孔径受限导致估计精度受限、对相干信号源处理性能显著劣化。为此, 本文提出了一种基于空间平滑预处理与 MUSIC (Multiple Signal Classification, 多重信号分类) 算法的二维复合均匀阵列相干信号 DOA (Direction of Arrival, 到达方向) 估计方法, 旨在突破传统阵列设计的限制, 以及解决相干信号带来的 DOA 性能下降问题。具体而言, 空间平滑技术利用均匀阵列的平移不变特性, 有效改善相干信号引起的协方差矩阵秩亏损问题; 二维复合均匀阵列通过稀疏化阵列排布, 在相同阵元数量条件下扩展有效孔径, 从而提升 DOA 估计的分辨率。在实验中, 结合二维空间平滑方法和 MUSIC 算法, 在二维复合均匀阵列上对相干信号进行 DOA 测向, 结果表明: 空间平滑方法有效抑制了相干信号的干扰, 且二维复合均匀阵列较传统均匀阵列在相同阵元规模下展现出更优的 DOA 估计性能, 验证了方法的有效性。

关键词: 空间平滑; 二维复合均匀阵列; MUSIC; DOA

中图分类号: TN953

文献标志码: A

文章编号: 2095-1000(2025)05-0142-09

DOI: 10.12347/j.ycyk.20250218003

CSTR: 32406.14.ycyk.20250218003

引用格式: 王秦川, 于勇, 胡继军. 基于空间平滑的二维复合均匀阵列解相干 DOA 算法[J]. 遥测遥控, 2025, 46(5): 142-150.

Coherence-Resolving 2D DOA Estimation Algorithm for Two-Dimensional Composite Uniform Array Based on Spatial Smoothing

WANG Qinchuan, YU Yong, HU Jijun
(Beijing Research Institute of Telemetry, Beijing 100076, China)

Abstract: With the increasing application demands for radar jammers, traditional array designs and direction-finding algorithms exhibit critical limitations: excessive information redundancy in uniform arrays, restricted estimation accuracy due to limited physical aperture, and significant performance degradation when processing coherent signals. To address these issues, this paper proposes a coherent signal Direction of Arrival (DOA) estimation method based on spatial smoothing preprocessing and the MUSIC algorithm, integrated with a two-dimensional composite uniform arrays. The method aims to overcome traditional array design constraints and mitigate DOA performance deterioration caused by coherent signals. Specifically, the spatial smoothing technique leverages the translational invariance property of uniform arrays to effectively solve the rank deficiency in covariance matrices induced by coherent signals. The two-dimensional composite uniform array adopts a sparse array configuration to expand the effective aperture under the same number of array elements, thereby enhancing DOA resolution. Experimental validation combines two-dimensional spatial smoothing with the MUSIC algorithm for DOA estimation of coherent signals on the composite array. Results demonstrate that the spatial smoothing method successfully suppresses coherent signal interference, while the composite array achieves superior DOA estimation performance compared to traditional uniform arrays with identical element counts, validating the effectiveness of the proposed methodology.

Keywords: Spatial smoothing; 2D composite uniform array; MUSIC; DOA

Citation: WANG Qinchuan, YU Yong, HU Jijun. Coherence-Resolving 2D DOA Estimation Algorithm for Two-Dimensional Composite Uniform Array Based on Spatial Smoothing[J]. Journal of Telemetry, Tracking and Command, 2025, 46(5): 142-150.

0 引言

近年来,随着雷达信号体制与系统架构的日趋复杂化,传统均匀天线阵列由于其阵元间距相同,接收信号时存在大量的冗余信息,由此暴露出多种制约问题。对于高频段信号,受限于均匀阵列的固有结构特征,过小的阵元间距不仅导致物理布设难度显著增加,还会引发阵元间干扰问题。在此背景下,各类稀疏阵列架构设计方法应运而生,其中以Pal P与Vaidyanathan P P提出的嵌套阵^[1]和互质阵^[2]的概念获得广泛应用。上述阵列通过其特殊阵元排布模式,结合差分虚拟阵列扩展机制,可构建超越物理阵元规模的虚拟阵列结构,从而实现阵列物理孔径的有效拓展,获取更高的DOA分辨能力^[3]。典型案例如文献[4]提出的利用虚拟阵元的DOA估计方法,其通过对协方差矩阵进行维度扩展并利用Toeplitz(托普利茨)特性实现矩阵重构;文献[5]中提出的基于嵌套阵的虚拟阵列DOA;文献[6]中提出的在传统互质阵之上的广义互质阵DOA估计算法。然而,此类基于矩阵虚拟化的解决方案在工程实现中需协同空间平滑类算法或Toeplitz矩阵重构技术,以恢复差分虚拟阵列协方差矩阵的秩特性,但此类秩补偿过程通常难以同步解决相干信号引起的矩阵秩亏损问题。此外,由于稀疏阵列通常拥有非均匀拓扑特性,现有多数DOA估计算法改进方案均基于均匀阵列框架设计,致使该类阵列在功能扩展时面临显著的算法适配性挑战,进而制约整体系统的可扩展性^[7]。

本研究聚焦于收发同构阵列雷达干扰机的工程应用场景,该类干扰系统为保障电磁辐射效率,其接收天线阵列通常采用均匀面阵架构。现有主流稀疏阵列设计方案对子阵数量配置及间距分布存在特定约束条件,难以适配固定栅格排布的均匀面阵拓扑。鉴于此,在严格维持收发同构阵列整体拓扑完整性的约束条件下,本文提出基于均匀母阵的阵元选择方法,构建二维复合均匀面阵架构,旨在实现双重优化目标:在降低阵元规模从而缩减计算复杂度的前提下,获得超越同等规模均匀面阵的波达方向估计性能,并保持均匀阵列所具有的可扩展性。除此之外,该阵列也要能够高效解决稀疏阵列在DOA时会出现的模糊问题。现有稀疏阵列研究多聚焦于虚拟孔径扩展以提升

参数估计自由度,而本研究创新性地通过复合均匀阵列架构,在维持计算资源效率与阵列结构兼容性的双重约束下实现DOA性能提升。

在解相干波达方向估计方法研究领域,当前主要技术路线可划分为非降维处理与降维处理两类范式。非降维处理体系涵盖最大似然估计法^[8],Toeplitz方法^[9],虚拟阵列变换类方法等,此类方法虽然可以不损失天线孔径,但需满足特定阵列配置条件方可有效实施;降维处理方法包括空间平滑算法^[10]和矩阵重构类算法,其优势在于实现复杂度较低且解相干性能稳定,但需以估计自由度折损为代价,致使波达方向估计精度产生理论性衰减。值得注意的是,现有非降维方法研究多受限于一维接收阵列架构约束,如文献[11]中提出的基于矩阵重构的解相干方法,该方法只能获取目标的一维角度信息;部分采用了二维阵列的研究如文献[12]和文献[13]中提出的均匀圆阵通过模式转换和Toeplitz去相干算法仅能在二维空间内对目标进行测向,在需要对三维空间内目标进行测向时通常需要借助多维度阵列;如文献[14]中的借助Toeplitz和三维阵列的二维DOA测向,该类方法需要在三维空间内布置阵元,其三维空间布阵需求导致工程适用性受限且与本研究应用条件不符。基于上述技术特征分析,本文最终选用降维类算法的空间平滑算法,在可接受自由度折损范围内,结合所设计的二维复合均匀阵列使得解相干过程更加简单和高效。

为应对传统子空间类算法(以MUSIC与ESPRIT(Estimating Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques,旋转不变技术估计信号参数算法)为代表、并使用均匀阵列作为接收阵列)在相干信源场景下的性能劣化问题以及在二维DOA领域内提升DOA估计性能,本研究提出融合二维空间平滑预处理与复合均匀阵列架构的DOA估计算法。其中,二维空间平滑作为降维处理技术,可有效修正相干信号引起的协方差矩阵秩亏损现象。通过实施二维空间平滑预处理,接收信号协方差矩阵的满秩特性得以重建,为后续高精度DOA估计奠定基础。本文所设计的二维复合均匀阵列架构,针对现有均匀阵列的阵元间距约束及母阵均匀拓扑的结构限制,创新性提出稀疏阵列构建策略,突破传统阵列设计中阵元间距需满足半波长条件的无模糊理论限制,以此实

现阵列有效孔径的显著扩展, 并可以减少因阵元密集排布引发的阵元间干扰。除此之外, 本文还针对二维复合均匀阵列进行 DOA 过程中可能出现的模糊问题提出了复杂度较低的解模糊方法。

1 基于空间平滑的二维复合均匀阵列解相干 DOA 算法

本文提出了一种基于空间平滑方法和 MUSIC 算法并结合稀疏布阵方法, 在二维复合均匀阵列上对相干信号进行 DOA 估计的方法。该方案致力于突破干扰测向一体化场景中, 传统均匀阵列与传统子空间类算法的固有性能瓶颈。

首先构建二维二阶复合均匀阵列作为接收阵列的核心架构, 其构建策略在保持母阵拓扑完整性的前提下, 能够突破传统均匀阵列物理孔径限制。

接下来采用二维空间平滑算法修正由相干信号导致的协方差矩阵秩亏损: 将接收阵列划分为若干子阵列, 分别计算各子阵列协方差矩阵并进行平滑处理, 利用空间平滑子阵列之间的独立性抑制信号相关性。

最终对解相干后的数据执行 MUSIC 算法实现 DOA 估计。针对使用二维复合均匀阵列可能引起的相位模糊现象, 基于复合子阵间相关性实施峰值筛选, 在消除模糊性的同时降低计算复杂度。

总体流程如图 1 所示。

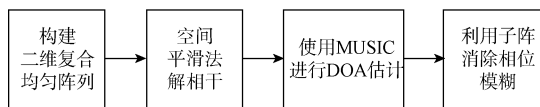


图 1 基于空间平滑的二维复合均匀阵列解相干 DOA 算法总体流程

Fig. 1 The overall process of the 2D composite uniform array coherence-resolving DOA algorithm based on spatial smoothing

1.1 二维复合均匀阵列

二维复合均匀阵列由两个仅在 (0, 0) 点重叠的均匀面阵组成, 两个均匀面阵的长宽分别为两个整数 M 和 N (此处假设为方阵), 则两个均匀面阵的阵元数分别为 M^2 和 N^2 , 每个子阵的阵元间距分别为 d_M 和 d_N , 两子阵的阵元间距均可以大于二分之一接收信号波长, 其基本结构如图 2 所示。

本研究设计的二维复合均匀阵列通过叠加两个均匀面阵作为基础子阵来构建, 整体形成一个

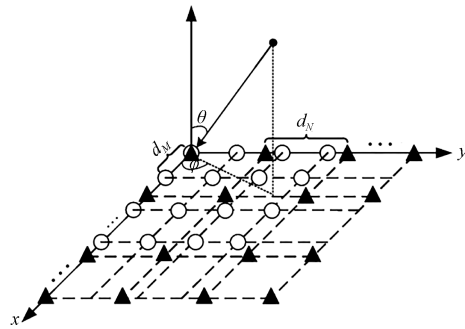


图 2 二维复合均匀阵列结构示意图

Fig. 2 Schematic diagram of a 2D composite uniform array structure

具有非均匀稀疏特性的阵列结构, 在波达方向估计过程中采用子阵独立处理策略, 由于各子阵仍保持均匀面阵架构, 该设计既保留了均匀阵列的强可扩展性优势, 又确保了空间平滑方法实施的条件, 同时可以为算法后续改进保留兼容性。值得注意的是, 该阵列架构对子阵阵元间距无特定约束, 在母阵阵列上选取的过程中拥有强适应性与设计自由度, 且能够突破传统均匀阵列的半波长间距约束。因此, 通过适当增大阵元间距, 可充分获取稀疏布局带来的物理孔径增益。更关键的是, 其双子阵联合解算机制可有效消除大间距布局引发的相位模糊效应, 并能够提高估计精度。

1.2 二维空间平滑方法

二维空间平滑法^[15,16]首先把 $M \times N$ 的均匀矩阵分割为 $(M - M_s + 1) \times (N - N_s + 1)$ 个互相重叠的子矩阵, 每个子阵的大小为 $M_s \times N_s$, 如图 3 所示。

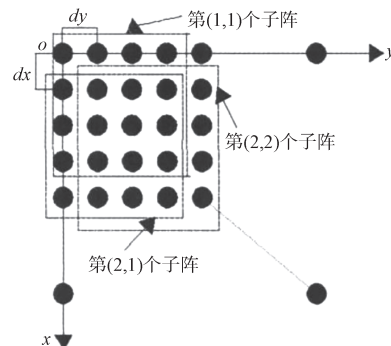


图 3 二维空间平滑方法的子阵选取示例

Fig. 3 Example of subarray selection in the two-dimensional spatial smoothing method

图中第 (m, n) 个子阵列接收到的信号为:

$$X_{f-(m,n)}(t) = A_{s-f} D_x^{m-1} D_y^{n-1} S(t) \quad (1)$$

其中, A_{s-f} 为子阵列 (1, 1) 的方向矩阵, $D_x =$

$\text{diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K)$, $D_y = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_K)$ 。

第 (m, n) 个子矩阵的协方差矩阵为:

$$\mathbf{R}_{(m,n)} = E \left[\mathbf{X}_{f-(m,n)}(t) \mathbf{X}_{f-(m,n)}(t)^H \right] = \mathbf{A}_{s-f} D_x^{(m-1)} D_y^{(n-1)} \mathbf{R}_{SS} D_x^{(m-1)} D_y^{(n-1)} \mathbf{A}_{s-f}^H \quad (2)$$

定义阵列的二维空间平滑协方差矩阵为:

$$\bar{\mathbf{R}} = \frac{\sum_{m=1}^{M-M_s+1} \sum_{n=1}^{N-N_s+1} \mathbf{R}_{m,n}}{(M-M_s+1)(N-N_s+1)} = \mathbf{A}_{s-f} \bar{\mathbf{R}}_{SS} \mathbf{A}_{s-f}^H \quad (3)$$

其中: $\bar{\mathbf{R}}_{SS} = \frac{\sum_{m=1}^{M-M_s+1} \sum_{n=1}^{N-N_s+1} D_x^{(m-1)} D_y^{(n-1)} \mathbf{R}_{SS} D_x^{(m-1)H} D_y^{(n-1)H}}{(M-M_s+1)(N-N_s+1)}$ 是

信号的平滑协方差矩阵,

当子阵的数量足够多时,可以得到以下近似形式:

$$\bar{\mathbf{R}}_{SS} \approx \text{diag}(R_{SS}(1,1), \dots, R_{SS}(K,K)) \quad (4)$$

式中, $R_{SS}(i,i) = E[s_i(t)s_i(t)^H] = \sigma_i^2$ 为信源 $s_i(t)$ 的功率。

由以上分析可知, K 个相干信号入射到 $M \times N$ 维阵列上, 经过空间平滑法后得到阵列的空间平滑协方差矩阵 $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{A}_{s-f} \bar{\mathbf{R}}_{SS} \mathbf{A}_{s-f}^H$, 其中的信号平滑协方差矩阵近似为对角矩阵, 这与非相关入射信号的信号协方差矩阵相同。因此, K 个相干信号入射到 $M \times N$ 维阵列上, 经过空间平滑法后相当于 K 个不相关信号入射到 $M_s \times N_s$ 维阵列上, 这为找出特定方向向量下的信号功率提供条件。

本研究对二维复合均匀阵列实施的二维空间平滑处理具体表现为: 对双均匀子阵分别执行二维空间平滑预处理, 生成各子阵解相干协方差矩阵。该矩阵表征有效消除相关信源干扰的预处理数据, 为后续执行 MUSIC 算法的高精度波达方向估计奠定了基础。

1.3 稀疏阵列下使用 MUSIC 算法的角度模糊消除及谱峰搜索优化

1.3.1 MUSIC 算法及利用子阵的角度模糊消除

在分别对二维复合均匀阵列的两个子阵做空间平滑去相关操作之后, 再分别对两个子阵使用 MUSIC 算法^[17,18] 求出 MUSIC 功率谱并绘制功率谱图。MUSIC 算法的基本过程如下:

考虑有 K 个非相干信号入射到 M 个阵元的天线阵列, 则阵列接收信号的协方差矩阵可以划分为信号子空间和噪声子空间两个彼此正交的子空间, 即:

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{E}_s \mathbf{A}_s \mathbf{E}_s^H + \mathbf{E}_n \mathbf{A}_n \mathbf{E}_n^H \quad (5)$$

其中, \mathbf{E}_s 表示信号子空间, 它是由阵列接收信号协方差矩阵中较大的 K 个特征值对应的特征向量张成的子空间, $\mathbf{A}_s = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K)$, 而 \mathbf{E}_n 则表示噪声子空间, 它是由阵列接收信号协方差矩阵的 $M-K$ 个较小的特征值对应的特征向量张成的子空间, $\mathbf{A}_n = \text{diag}(\lambda_{K+1}, \lambda_{K+2}, \dots, \lambda_M)$ 。

将协方差矩阵 \mathbf{R}_{xx} 与噪声子空间 \mathbf{E}_n 相乘可得:

$$\mathbf{R}_{xx} \mathbf{E}_n = \mathbf{E}_s \mathbf{A}_s \mathbf{E}_s^H \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_n \mathbf{A}_n \mathbf{E}_n^H \mathbf{E}_n = \sigma^2 \mathbf{E}_n \quad (6)$$

而

$$\mathbf{R}_{xx} \mathbf{E}_n = \mathbf{A} \mathbf{R}_{SS} \mathbf{A}^H \mathbf{E}_n + \sigma^2 \mathbf{E}_n \quad (7)$$

对比可得

$$\mathbf{A} \mathbf{R}_{SS} \mathbf{A}^H \mathbf{E}_n = 0 \quad (8)$$

当 \mathbf{R}_{SS} 满秩时, 其逆存在, 于是上式可变为: $\mathbf{A}^H \mathbf{E}_n = 0$

说明导向矩阵 \mathbf{A} 中的各个列向量与噪声子空间正交, 即:

$$\mathbf{E}_n^H \mathbf{a}(\theta_i) = 0, i = 1, 2, \dots, K \quad (9)$$

MUSIC 算法正是基于上式提出的, 考虑到实际接收数据矩阵是有限长度的, 因此 $\mathbf{a}(\theta_k)$ 与实际得到的 $\hat{\mathbf{E}}_n$ 并不能完全正交, 则 DOA 估计需要以最小优化搜索实现, 即:

$$\hat{\theta}_{\text{MUSIC}} = \arg_{\theta} \min [a^H(\theta) \hat{\mathbf{E}}_n \hat{\mathbf{E}}_n^H a(\theta)] \quad (10)$$

因此最终 MUSIC 空间谱函数定义为:

$$P_{\text{MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{a^H(\theta) \hat{\mathbf{E}}_n \hat{\mathbf{E}}_n^H a(\theta)} \quad (11)$$

由上式可知: 可通过扫描 θ 并通过空间谱的谱峰来得到 DOA 估计值。

在本研究中二维复合均匀阵列中的两个子阵的阵元间距可能均大于等于半波长, 这时在原本只应存在一个真实谱峰的功率谱出现多个模糊峰, 即相位模糊现象。

相位模糊现象的原因如下: 假设有一个单一信号入射到阵列上, 则接收信号在 x 方向和 y 方向上相邻传感器之间的相位差与阵元间距之间的关系可以表示为:

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \phi \cos \theta = \Delta \varphi_x + 2k_x \pi \\ \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \phi \sin \theta = \Delta \varphi_y + 2k_y \pi \end{cases} \quad (12)$$

其中 k_x 和 k_y 是整数, 定义来波方向角 $\theta \in [0, \pi]$, 来波俯仰角 $\phi \in [0, \pi/2]$, 因此有 $\sin \phi \cos \theta \in [-1, 1]$ 和 $\sin \phi \sin \theta \in [-1, 1]$ 。整数 k_x 和 k_y 的取值范围为

$\left[-\frac{d}{\lambda} - \frac{\Delta\phi_x}{2\pi} \frac{d}{\lambda} - \frac{\Delta\phi_x}{2\pi}\right]$ 和 $\left[-\frac{\Delta\phi_y}{2\pi} \frac{d}{\lambda} - \frac{\Delta\phi_y}{2\pi}\right]$ 。由于信号的相位每传播一个波长 λ 的距离就旋转 2π , 且由于阵元间距大于 $\lambda/2$, 因而 k_x 和 k_y 存在多值问题, 导致 MUSIC 功率谱中出现多个伪峰^[9]。

当前主流有关使用稀疏阵列的研究大部分利用稀疏阵列的差分阵列形成虚拟均匀阵列或者部分虚拟均匀阵列来规避由于稀疏阵列阵元间距大于 $\lambda/2$ 所带来的相位模糊现象, 且其应用范围多限于一维线性阵列, 而本文利用的是二维复合均匀阵列的特殊性, 推导相位模糊原理式, 通过找到两个子阵的共同谱峰来消除二维阵列 DOA 估计中的相位模糊问题。

根据式 (12), 第 k 个信号源的实际二维 DOA $(\theta_{c,k}, \phi_{c,k})$, 与其在第 i 个子阵列上的模糊二维 DOA $(\theta_{i,a,k}, \phi_{i,a,k})$ 之间的关系可以表示为:

$$\begin{cases} \sin \phi_{c,k} \cos \theta_{c,k} - \sin \phi_{i,a,k} \cos \theta_{i,a,k} = \frac{2P_{i,k}}{M_i} \\ \sin \phi_{c,k} \sin \theta_{c,k} - \sin \phi_{i,a,k} \sin \theta_{i,a,k} = \frac{2Q_{i,k}}{M_i} \end{cases} \quad (13)$$

其中, $P_{i,k}$ 和 $Q_{i,k}$ 都是整数。 M_i 为另一子阵的边长阵元数 (此处子阵为方阵), 例如二阶复合均匀阵列。当 $i=1$ 时, $\tilde{i}=2$ 。通过对该式进行进一步推导可得到定理。

定理: 假设 (θ_k, ϕ_k) 是第 k 个信号源的实际二维 DOA, 对于每个子阵列, 这个 DOA 会出现多个模糊的二维 DOA, 即在二维 MUSIC 谱中出现多个峰值。通过对比第 k 个信号源的两个 MUSIC 谱, 存在且唯一存在一个在两个谱中都出现的峰值, 即是第 k 个信号源的估计二维 DOA。

存在性: 由于 (θ_k, ϕ_k) 是从复合均匀平面阵列入射的第 k 个信号源的二维 DOA, 其将在复合均匀平面阵列的二维 MUSIC 谱中表现为一个峰值。由于 MUSIC 算法不依赖于阵列配置, 因此 (θ_k, ϕ_k) 必须在两个分解后的子阵列的二维 MUSIC 谱中的同一位置也产生一个峰值。因此, 在两个分解后的子阵列的二维 MUSIC 谱中的同一位置至少存在一个共同的峰值。

唯一性: 假设存在两个不同的二维 DOA $(\theta_{k,1}, \phi_{k,1})$ 和 $(\theta_{k,2}, \phi_{k,2})$, 都在两个分解后的子阵列的二维 MUSIC 谱中表现为峰值, 即 $(\hat{\phi}_{k,1}, \hat{\theta}_{k,1})$ 和 $(\hat{\phi}_{k,2}, \hat{\theta}_{k,2})$ 都是相对于实际二维 DOA (θ_k, ϕ_k) 的模糊

二维 DOA。根据式 (13), 第一个子阵列上 $(\hat{\phi}_{k,1}, \hat{\theta}_{k,1})$ 和 $(\hat{\phi}_{k,2}, \hat{\theta}_{k,2})$ 之间的关系是:

$$\begin{cases} \sin \hat{\phi}_{k,1} \cos \hat{\theta}_{k,1} - \sin \hat{\phi}_{k,2} \cos \hat{\theta}_{k,2} = 2P_1/M_2 \\ \sin \hat{\phi}_{k,1} \sin \hat{\theta}_{k,1} - \sin \hat{\phi}_{k,2} \sin \hat{\theta}_{k,2} = 2Q_1/M_2 \end{cases} \quad (14)$$

其中, P_1 和 Q_1 是整数, 分别在范围 $(-M_2, M_2)$ 和 $(-M_2/2, M_2/2)$ 内。

类似地, 对于第二个子阵列, 这种关系可以表示为:

$$\begin{cases} \sin \hat{\phi}_{k,1} \cos \hat{\theta}_{k,1} - \sin \hat{\phi}_{k,2} \cos \hat{\theta}_{k,2} = 2P_2/M_1 \\ \sin \hat{\phi}_{k,1} \sin \hat{\theta}_{k,1} - \sin \hat{\phi}_{k,2} \sin \hat{\theta}_{k,2} = 2Q_2/M_1 \end{cases} \quad (15)$$

其中, P_2 和 Q_2 是整数, 分别在范围 $(-M_1, M_1)$ 和 $(-M_1/2, M_1/2)$ 内, 因此可以得到:

$$\begin{cases} P_1/M_2 = P_2/M_1 \\ Q_1/M_2 = Q_2/M_1 \end{cases} \quad (16)$$

由该式可以发现: 当 M_1 与 M_2 之间不存在除了 1 以外的公因子时, 除了 $P_1 = P_2 = 0$ 和 $Q_1 = Q_2 = 0$ 之外, 没有任何其他 $\{P_1, P_2\}$ 和 $\{Q_1, Q_2\}$ 组合能够满足等式 (13), 也就是说:

$$\begin{cases} \sin \hat{\phi}_{k,1} \cos \hat{\theta}_{k,1} = \sin \hat{\phi}_{k,2} \cos \hat{\theta}_{k,2} \\ \sin \hat{\phi}_{k,1} \sin \hat{\theta}_{k,1} = \sin \hat{\phi}_{k,2} \sin \hat{\theta}_{k,2} \end{cases} \quad (17)$$

由此得出 $\hat{\phi}_k = \hat{\phi}_{k,1} = \hat{\phi}_{k,2}$ 且 $\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k,1} = \hat{\theta}_{k,2}$, 即唯一存在一个二维 DOA $(\hat{\phi}_k, \hat{\theta}_k)$, 它在两个分解后的子阵列的 MUSIC 谱中的相同位置出现峰值, $(\hat{\phi}_k, \hat{\theta}_k)$ 是第 k 个信号源的估计二维 DOA。

根据上述定理, 当二维复合均匀阵列的子阵边长 (阵元数) 之间不存在除了 1 以外的公因子时, 可以通过在两个子阵列的二维 MUSIC 谱中找到共同的峰值来唯一地估计二维 DOA。该条件作为必要条件, 既是抑制模糊现象的关键, 也是稀疏阵列设计中最大化物理孔径增益时需满足的唯一约束——即当需要提升阵元间距以扩展阵列孔径时, 仅需保证子阵规模满足该条件即可实现无模糊估计。

1.3.2 峰值搜索过程的简化

在传统 MUSIC 算法中, 计算出 MUSIC 功率谱之后需要提取功率谱中的峰值来获取 DOA 数据, 该过程需要进行全面的谱峰搜索, 较为消耗计算资源。本文所使用方法中也需要分别提取两个子阵的 MUSIC 功率谱中的谱峰, 但这一过程可以进一步简化。

通过式(13)进一步推导可知, MUSIC功率谱中的任意真实峰 (θ_1, ϕ_1) 与其模糊峰 (θ_c, ϕ_c) 之间存在固定关系, 即:

$$\begin{cases} \sin \phi_1 \cos \theta_1 - \sin \phi_c \cos \theta_c = 2P_{1,l}/M_l \\ \sin \phi_1 \sin \theta_1 - \sin \phi_c \sin \theta_c = 2Q_{1,l}/M_l \end{cases} \quad (18)$$

其中 P, Q 为满足定义域的整数, M_l 定义同式(13), 通过该式可以得知: 在角度域内 MUSIC功率谱的谱峰间不存在线性关系, 但在切换域之后则可以产生线性关系, 为简化谱峰搜索带来契机。

对角度域进行如下的域变换:

$$\begin{cases} u \triangleq \sin \phi \cos \theta \\ v \triangleq \sin \phi \sin \theta \end{cases} \quad (19)$$

则式(18)变为:

$$\begin{cases} u_{c,k} - u_{i,a,k} = 2P_{i,k}/M_l \\ v_{c,k} - v_{i,a,k} = 2Q_{i,k}/M_l \end{cases} \quad (20)$$

可以观察到在变换过后的 u/v 域中, 真实谱峰和其模糊峰之间存在固定的线性关系, 因此可以将 MUSIC功率谱整体变换至 u/v 域之后, 将其分为 $2/M_l$ 大小的小区块, 只在任意的小区块中进行谱峰搜索, 将搜索结果运用式(20)中的线性关系推算便可得出全部域中的谱峰位置, 这就是局部谱峰搜索的原理, 该简化方法可以显著降低谱峰搜索过程的计算资源消耗。

本文所用方法主要针对 DOA 估计过程中的谱峰筛选过程进行复杂度优化, 在 $M \times M$ 的均匀阵列上进行谱峰搜索的计算复杂度应为 $O(JM^2(M^2-K))$, 其中 J 为全部搜索域中的频点数量, K 代表信源数量, 二维复合均匀阵列的子阵分别为 $M_1 \times M_1$ 和 $M_2 \times M_2$ 的均匀阵列, 故全域搜索的计算复杂度为 $O(JM_1^2(M_1^2-K) + JM_2^2(M_2^2-K))$, 本文使用的谱峰搜索优化方法将全域搜索转化为任意一个小区块内的谱峰搜索, 故部分域搜索的计算复杂度为: $O(\frac{J}{M_2^2} M_1^2(M_1^2-K) + \frac{J}{M_1^2} M_2^2(M_2^2-K))$, 在使用相同阵元数的情况下, 局部搜索方法相较于全域搜索法以及传统使用均匀阵列的 DOA 算法均具有算法复杂度优势^[20]。

2 实验设置

2.1 实验流程

在实验中, 将使用仿真软件生成两个相关信号, 并在二维复合均匀阵列上使用二维空间平滑

算法对信号进行解相干, 之后使用 MUSIC 算法对解相干后的信号进行 DOA 估计, 并使用局部谱峰搜索方法简化谱峰搜索流程。最后, 将实验结果与使用相近阵元数目均匀阵列和传统 MUSIC 算法进行 DOA 估计的结果进行对比。

2.2 DOA 解相干能力测试

传统使用均匀面阵和 MUSIC 算法的 DOA 方法在处理相干信号时会由于秩亏损问题, MUSIC 算法性能下降, 而本文使用了二维空间平滑方法可以消除由于相干信源带来的 DOA 性能下降问题。

表1 信号参数设置

仿真参数	均匀面阵	复合均匀面阵
阵元数目	7×7=49	M=5, N=4 共M ² +N ² =41
阵元间距	λ/2	d _M =2λ, d _N =2.5λ
信源数目	2	2
信源频率	2 GHz(相干信号)	2 GHz(相干信号)
真实信源位置(方向角, 俯仰角)	(90, 45), (140, 70)	(90, 45), (140, 70)
信噪比	10 dB	-10 dB

本测试使用如表1的参数设置, 分别使用传统方法和本文方法进行 DOA 估计, 并绘制出 MUSIC 功率谱。该性能提升程度可以通过观测 MUSIC 功率谱的谱峰分辨率大小来直观地判断。

2.3 DOA 性能测试

DOA 性能测试使用的性能指标为蒙特卡罗实验的均方根误差(RMSE): 在蒙特卡罗实验中, RMSE 可以用来量化估算值与真实值之间的误差水平, RMSE 越小越好, 因为它表示估算值与真实值之间的平均误差越小, 此时 RMSE 定义为:

$$e_{\text{RMSE}} = \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K (\hat{\theta}_{k,l} - \theta_k)^2}{LK}} \quad (21)$$

其中, $\hat{\theta}_{k,l}$ 是第 l 次数仿真时对第 k 个理论角度 θ_k 的估计, L 是蒙特卡罗仿真次数。

本测试使用表2中的参数设置, 将使用的算法与传统算法在不同信噪比和不同快拍数环境下进行同条件的 DOA 估计蒙特卡罗实验并对其 RMSE 计算结果进行绘图, 比较二者在不同条件下的 RMSE 大小, RMSE 越小则 DOA 性能越高。

表 2 DOA 性能测试信号参数设置
Table 2 DOA performance test signal parameter settings

仿真参数	均匀面阵	复合均匀面阵
阵元数目	7×7=49	M=5, N=4 共 M ² +N ² =41
阵元间距	$\frac{\lambda}{2}$	$d_M=2\lambda, d_N=2.5\lambda$
信源数目	1	1
信源频率	2 GHz	2 GHz
真实信源位置(方向角,俯仰角)	(90,45)	(90,45)
信噪比	-10 dB~10 dB (步进 2 dB)	-10 dB~10 dB (步进 2 dB)
快拍数	10~100(步进为 10)	10~100(步进为 10)
蒙特卡罗仿真次数	100	100

3 实验结果与分析

3.1 DOA 解相干能力测试

首先在均匀面阵 (UPA) 和复合均匀面阵下对相干双目标进行 MUSIC 算法 DOA 测向, 并绘制 MUSIC 功率谱图像, 结果如下:

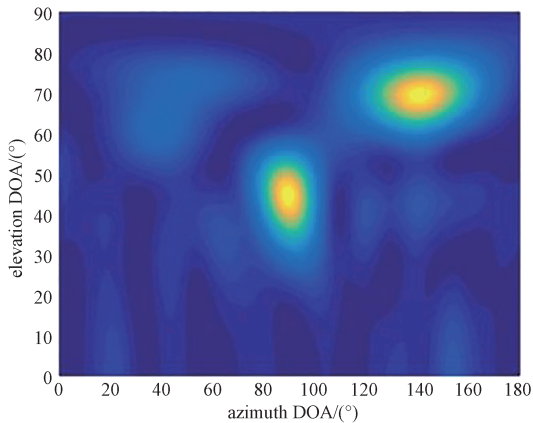


图 4 相干双目标使用 UPA 进行测向的 MUSIC 功率谱 (SNR=10 dB)

Fig. 4 MUSIC power spectrum for coherent dual targets using UPA with SNR = 10 dB for direction of arrival estimation

由以上仿真结果可知, 传统均匀面阵在使用 MUSIC 算法对相干目标进行 DOA 估计时, 由于信号相干所带来的协方差矩阵秩缺, MUSIC 算法性能下降, 在 SNR=10 dB 的高信噪比条件下, 仍然不能观测到尖锐的 MUSIC 功率谱谱峰, MUSIC 功率谱分辨率较低, 性能下降严重。

在上文所述复合均匀面阵上分别使用和不使用空间平滑方法, 对两个相干信源进行 MUSIC 测

向, 并绘制 MUSIC 功率谱图像, 结果如下:

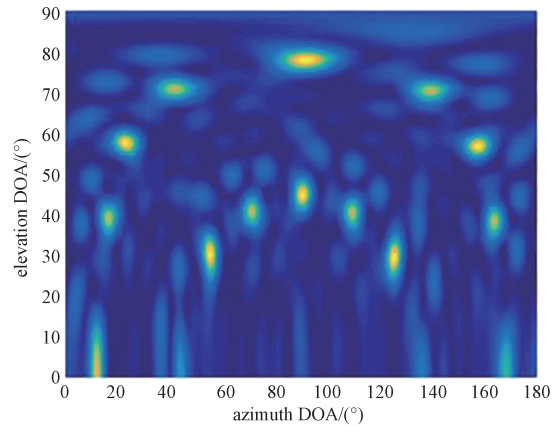


图 5 相干双目标使用复合均匀面阵测向(未使用空间平滑去相干)的 MUSIC 功率谱 (SNR=-10 dB)

Fig.5 MUSIC power spectrum for coherent dual targets using 2D composite uniform array for direction of arrival estimation (without spatial smoothing for decorrelation) with SNR = -10 dB

对比图 4 和图 5 可知, 由于使用复合均匀阵列带来的物理孔径增加的影响, 复合均匀阵列的 MUSIC 功率谱在 SNR=-10 dB 的低信噪比环境下, 其 DOA 估计的分辨率仍然高于均匀面阵, 且其阵元数 (41 个) 小于均匀面阵的阵元数 (49 个), 也证明了复合均匀面阵可以在不增加阵元数和计算资源使用的情况下提高阵列物理孔径, 从而提高 DOA 估计分辨率。

图 6 中的红圈即为经过峰值筛选后得到的目标检测结果标记在功率谱图中。对比图 5 和图 6 可知, 使用了二维空间平滑方法对相干信号进行去相干操作后, 在 SNR=-10 dB 的低信噪比条件下仍

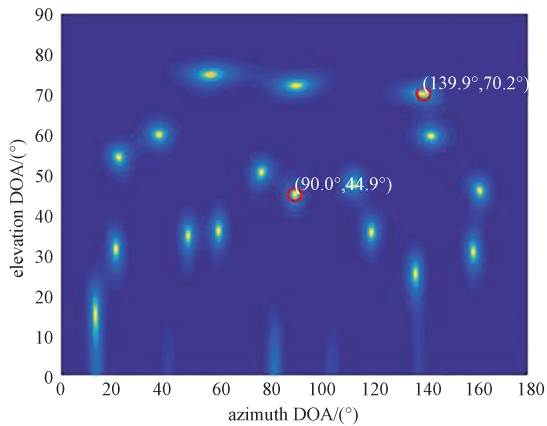


图 6 相干双目标使用复合均匀面阵和二维空间平滑进行测向的 MUSIC 功率谱 (SNR=-10 dB)

Fig.6 MUSIC power spectrum for coherent dual targets using 2D composite uniform array and two-dimensional spatial smoothing for direction of arrival estimation with SNR = -10 dB

然能观测到尖锐的谱峰，MUSIC 算法的估计性能得到恢复，DOA 分辨率得到较大提升。

3.2 DOA 性能测试

仿真使用二维 MUSIC 算法在两种不同阵列构型下进行蒙特卡罗实验，并设置不同信噪比和不同快拍数条件，参数如表 2 所示，仿真结果如图 7 和图 8 所示。

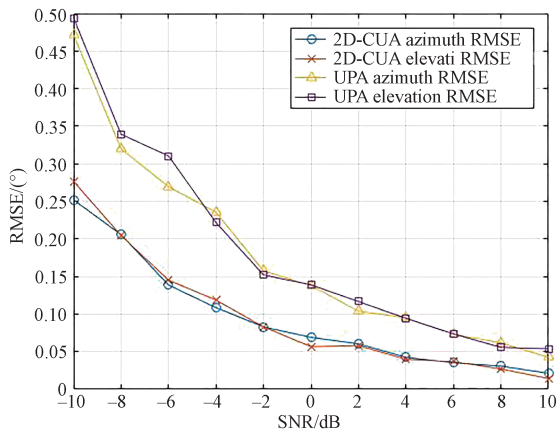


图 7 在不同 SNR 条件下的传统方法与本文所使用方法的 DOA 测向 RMSE 对比

Fig. 7 Comparison of DOA estimation RMSE between traditional methods and the proposed method under different SNR conditions

由以上两图对比可知，在不同 SNR 和不同快拍数条件下本文所使用方法的 DOA 估计性能均强于传统使用均匀面阵的 MUSIC 算法，且具有更强

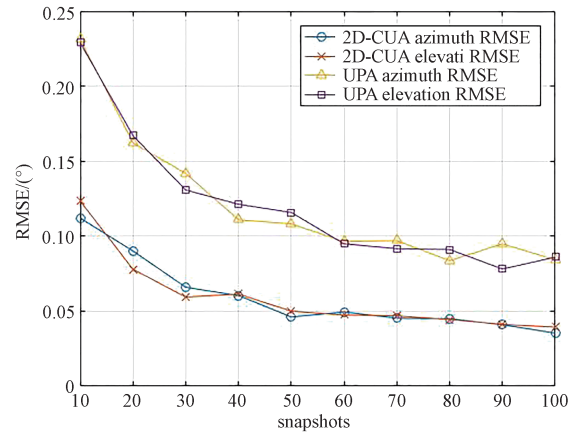


图 8 在不同快拍数条件下的传统方法与本文所使用方法的 DOA 测向 RMSE 对比

Fig. 8 Comparison of DOA estimation rmse between traditional methods and the proposed method under different snapshot conditions

的抗干扰能力，在低快拍数条件下，即信源提供信息量较低的情况下也拥有更好的性能。

3.3 实验结果分析

综合 DOA 解相干能力测试和 DOA 性能测试的结果来看，本文所使用的算法可以有效改善相干信号条件下的 MUSIC 算法性能，且在使用相近阵元数目的情况下由于复合均匀阵列的物理孔径较大，使得其 DOA 分辨率更高，体现了稀疏布阵的优势。在 DOA 性能方面，本文使用的方法也全面高于传统方法，并且使用了局部谱峰搜索方法也能显著降低计算复杂度。

4 结论

通过将二维空间平滑方法与二维复合均匀阵列 DOA 结合，成功地提升了相干信号条件下的 MUSIC 算法性能，结果显示：二维空间平滑方法能够有效消除相干信号对 MUSIC 算法产生的性能下降影响，并且使用稀疏布阵方法的二维复合均匀阵列在 DOA 性方面也可以发挥较高性能。因此，二维空间平滑方法与二维复合均匀阵列的结合是处理相干信号的一种有效方法，尤其在低信噪比低快拍数的应用场景中，具有广泛的应用前景。

参考文献

[1] PAL P, VAIDYANATHAN P P. Nested arrays: A novel approach to array processing with enhanced degrees of freedom[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010,

- 58(8): 4167-4181.
- [2] VAIDYANATHAN P P, PAL P. Sparse sensing with coprime samplers and arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(2): 573-586.
- [3] SHAN T J, WAX M, KAILATH T. On spatial smoothing for direction-of-arrival estimation of coherent signals[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1985, 33(4): 806-811.
- [4] 孙兵, 阮怀林, 吴晨曦, 等. 基于 Toeplitz 协方差矩阵重构的互质阵列 DOA 估计方法[J]. *电子与信息学报*, 2019, 41(8): 1924-1930.
- SUN B, RUAN H L, WU C X, et al. Direction of arrival estimation with coprime array based on Toeplitz covariance matrix reconstruction[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2019, 41(8): 1924-1930.
- [5] 林新平. 嵌套阵中阵列结构设计及 DOA 估计算法研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2019.
- [6] 程方昊. 基于广义互质阵列的空间谱测向和波束形成[D]. 成都: 电子科技大学, 2020.
- [7] HAN K, NEHORAI A. Improved source number detection and direction estimation with nested arrays and ULAs using jackknifing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(23): 6118-6128.
- [8] 余志斌, 刘春静. 多径相干信号到达角和衰落系数的最大似然估计[J]. *计算机应用研究*, 2012, 29(9): 3398-3400, 3404.
- YU Z B, LIU C J. Maximum likelihood estimation of DOA and fading coefficients for multipath coherent signals[J]. *Application Research of Computers*, 2012, 29(9): 3398-3400, 3404.
- [9] 谢鑫, 李国林, 刘华文. 采用单次快拍数据实现相干信号 DOA 估计[J]. *电子与信息学报*, 2010, 32(3): 604-608.
- XIE X, LI G L, LIU H W. Coherent signals DOA estimation using single snapshot data[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2010, 32(3): 604-608.
- [10] TIAN G, ZHAO C, LI J, et al. The DOA estimation method based on improved SSMUSIC algorithm[C]// 2022 3rd China International SAR Symposium (CISS). Shanghai, China, 2022: 1-4.
- [11] 张薇, 韩勇, 金铭, 等. 基于托普利兹矩阵集重构的相干信源波达方向估计[J]. *吉林大学学报(工学版)*, 2020, 50(2): 703-710.
- ZHANG W, HAN Y, JIN M, et al. DOA estimation of coherent sources based on Toeplitz matrix set reconstruction[J]. *Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)*, 2020, 50(2): 703-710.
- [12] 张薇, 韩勇, 闫锋刚, 等. 基于均匀圆阵 Toeplitz 矩阵集重构解相干算法[J]. *吉林大学学报(工学版)*, 2020, 50(4): 1522-1531.
- ZHANG W, HAN Y, YAN F G, et al. Decorrelation algorithm based on UCA Toeplitz matrix set reconstruction[J]. *Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)*, 2020, 50(4): 1522-1531.
- [13] 王晓君, 高祥博, 刘昊昱. 基于均匀圆阵的压制式相干干扰 DOA 估计算法[J]. *大连工业大学学报*, 2024, 43(4): 307-312.
- WANG X J, GAO X B, LIU H Y. DOA estimation algorithm for suppressive coherent interference based on uniform circular array[J]. *Journal of Dalian Polytechnic University*, 2024, 43(4): 307-312.
- [14] 司伟建, 吴迪, 韩惠莲. 基于相关 Toeplitz 预处理的二维测向方法[J]. *中南大学学报(自然科学版)*, 2015, 46(8): 2892-2897.
- SI W J, WU D, HAN H L. Two-dimensional direction finding method based on correlated Toeplitz preprocessing[J]. *Journal of Central South University (Science and Technology)*, 2015, 46(8): 2892-2897.
- [15] 杨雪亚, 陈伯孝, 赵光辉, 等. 基于二维空间平滑的波束域 MUSIC 算法[J]. *系统工程与电子技术*, 2010, 32(5): 895-899.
- YANG X Y, CHEN B X, ZHAO G H, et al. Beamspace MUSIC algorithm based on two-dimensional spatial smoothing[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2010, 32(5): 895-899.
- [16] MATHEWS C P, HAARDT M. Performance analysis of closed-form, ESPRIT based 2-D angle estimator for rectangular arrays[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 1996, 3(4): 124-126.
- [17] SCHMIDT R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1986, 34(3): 276-280.
- [18] 吴志勇, 饶伟, 贾凤勤. 针对相干信号 DOA 估计的改进 MUSIC 算法[J]. *电讯技术*, 2023, 63(9): 1355-1360.
- WU Z Y, RAO W, JIA F Q. Improved MUSIC algorithm for coherent signals DOA estimation[J]. *Telecommunications Technology*, 2023, 63(9): 1355-1360.
- [19] MATHEWS C P, HAARDT M. Performance analysis of closed-form, ESPRIT based 2-D angle estimator for rectangular arrays[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 1996, 3(4): 124-126.
- [20] WU Q, SUN F, LAN P, et al. Two-dimensional direction-of-arrival estimation for co-prime planar arrays: A partial spectral search approach[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2016, 16(14): 5660-5670.

[作者简介]

王秦川 1999年生, 硕士研究生。
于 勇 1971年生, 博士, 研究员。
胡继军 1981年生, 硕士, 研究员。

(本文编辑: 傅 杰)