理想流体流动方程推导专题教学方法探讨*[1]

阮 飞[1], 马 婕[2], 徐鹏飞[1], 王 波[3]

(1. 内蒙古科技大学材料与冶金学院, 内蒙古 包头 014010;
2. 安徽建筑大学材料与化学工程学院, 安徽 合肥 230022;
3. 上海大学省部共建高品质特殊钢冶金与制备国家重点实验室, 上海 200072)

摘 要: 连续性方程和欧拉方程是动量传输的核心内容, 其推导过程一直是教学中的重点和难点, 以往教学中学生普遍反映难于理解。为了使学生更好的理解和掌握连续性方程及欧拉方程的推导过程, 文章对此专题性教学方法进行探讨, 采用易于学生理解和掌握的方法分别推导了流体流动的连续性方程及欧拉方程, 并分享了连续性方程和欧拉方程推导专题教学中的一些认识与体会, 为动量传输理论的教学提供一定的参考。

关键词: 理想流体; 质量守恒; 动量守恒; 偏微分方程
中图分类号: O35 **文献标识码**: B **文章编号**: 1009-5438(2017)06-0093-06
DOI:10.13647/j.cnki.btgkj.2017.06.031

Discussion on Topic Teaching Method for Derivation of Ideal Fluid Flow Equation

RUAN Fei[1], *MA Jie*[2], *XU Peng-fei*[1], *WANG Bo*[3]

(1. *School of Material and Metallurgy, Inner Mongolia University of Science and Technology, Baotou* 014010, *Nei Monggol, China*;
2. *School of Material and Chemical Engineering, Anhui Jianzhu University, Hefei* 230022, *Anhui, China*;
3. *State Key Laboratory of Advanced Special Steel, Shanghai University, Shanghai* 200072, *China*)

Abstract: The continuity equation and the Euler equation are the core contents of the momentum transfer. The derivation process has always been the focus and difficulty in teaching and students generally reflect it is difficult to understand in the past. In order to make students better understand and master the derivation process of the continuity equation and Euler equation, in the paper, it is discussed the topic teaching method and deduced the continuity equation and Euler equation of fluid flow, and some understanding and experience in topic teaching method for derivation of the continuity equation and Euler equation are shared, providing the reference for teaching of momentum transfer theory.

Key words: ideal fluid; conservation of mass; conservation of momentum; partial differential equation

冶金传输原理是本科院校冶金工程专业所开设的一门极其重要的专业基础课程[1-2]。冶金传输原理的内容体系大致可以分为动量传输、质量传输及热量传输三大板块, 由于上述三者具有非常紧密的

* **收稿日期**: 2017-01-28
作者简介: 阮 飞(1985-), 男, 内蒙古商都县人, 硕士, 讲师, 现从事冶金工程专业教学及科研工作。

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

联系,且热量传递和质量传递过程中又常常伴随着动量传递[3-8],因此扎实的掌握好动量传递对学好冶金传输原理起到举足轻重的作用。在动量传输板块中,理想流体流动偏微分控制方程(包括连续性方程及欧拉方程)是动量传输部分十分重要的内容,特别是其推导过程一直是教学中的重点和难点,以往的教学中,学生普遍反映此部分内容难以理解和掌握,因此作者以专题教学的形式尝试探索一种更容易被学生所接受的理想流体流动偏微分控制方程的推导方法,以改善冶金传输原理实际教学效果。

1 教学方法的探讨

1.1 相关学科基础知识点的回顾

1.1.1 高等数学关键知识点回顾

由于在工程领域所讨论的流体的特征尺寸均大于其分子平均自由程,在工程上,流体可以看作在时间和空间上是连续分布的,因此流体的诸多特性均可以看作是时间和空间的连续函数,流体力学问题可以借助连续函数这一有力工具进行研究[9]。

如果用于描述流体的某一物理量 P 是时间(τ)和空间坐标变量(x, y, z)的函数,即 $P = P(x, y, z, \tau)$,则多元函数 P 对其中一个变量 x 的导数称为 P 对 x 的偏导数,用符号 $\frac{\partial P}{\partial x}$ 表示。同理 $\frac{\partial P}{\partial y}$、$\frac{\partial P}{\partial z}$、$\frac{\partial P}{\partial \tau}$ 分别表示 P 对 y、z 及 τ 的偏导数。

进一步讨论,如果物理量 P 是时间(τ)和空间坐标变量(x, y, z)的函数,即 $P = P(x, y, z, \tau)$,而空间坐标变量又仅是时间的函数,即 $x = x(\tau)$,$y = y(\tau)$,$z = z(\tau)$,则 P 对 τ 的全导数可表示为下述式子:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial P}{\partial \tau}$$

如果 $u = u(z, y, z, \tau)$,$v = v(z, y, z, \tau)$,且 u、v 及 uv 对 τ 的偏导数均存在,那么 uv 对 τ 的偏导数为:$\frac{\partial(uv)}{\partial \tau} = u\frac{\partial v}{\partial \tau} + v\frac{\partial u}{\partial \tau}$

1.1.2 物理学关键知识点回顾

体积流量(Q_v):单位时间内流体流过与其流动方向垂直的某一截面的总体积,国际单位 m^3/s。

体积通量(q_v):单位时间内流体通过与其流动方向垂直的单位截面的总体积,国际单位 m/s。

质量流量(Q_m):单位时间内流体流过与其流动方向垂直的某一截面的总质量,国际单位 kg/s。

体积通量(q_m):单位时间内流体通过与其流动方向垂直的单位截面的总体积,国际单位 $kg/(s \cdot m^2)$。

上述物理量的存在如下关系:

$Q_v = q_v \cdot A$, $Q_m = q_m \cdot A$, $Q_m = \rho \cdot Q_v$, $q_m = \rho \cdot q_v$

其中 A 为截面面积,ρ 为流体密度。

如果某一流体流速为 u_x,则某一时刻通过与其流动方向垂直的矩形截面(长为 $\mathrm{d}y$,宽为 $\mathrm{d}z$,$A = \mathrm{d}y\mathrm{d}z$)的体积流量为 $Q_v = u_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,质量流量则为 $Q_m = \rho u_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,体积通量 $q_v = Q_v/A = u_x$,$q_m = Q_m/A = \rho u_x$。

动量:物体质量(m)和其速度(u)的乘积(mu)。

冲量:力(F)和力的作用时间(τ)的乘积($F\tau$)

动量定理:物体动量的增量等于它所受合外力的冲量即 $F\tau = \Delta(mu)$。

1.2 连续性方程的推导过程

在某一流场中选取一个足够小的六面体控制微元,其边长分别为 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$,如图1所示。

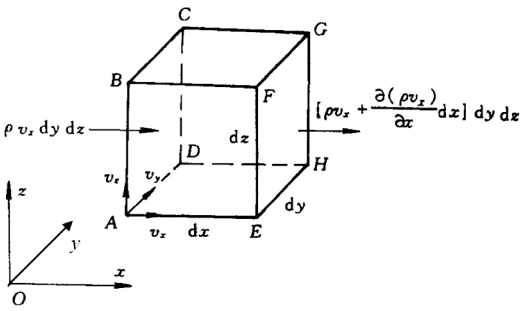


图1 六面体控制微元质量守恒示意图

以上述控制微元为研究对象,根据质量守恒定律可得如下关系式:

$$\begin{bmatrix}\text{单位时间内净流}\\ \text{入微元体的质量}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{单位时间内微}\\ \text{元的质量增量}\end{bmatrix} \quad (1)$$

某一时刻由与 x 轴正向垂直的 ABCD 面流入控制微元内的流体质量流量为 $\rho u_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,由于微元内流体的密度和流速是随着空间变化的,因此沿 x 轴方向上单位长度上的流体质量流量的变化率可表示为 $\frac{\partial(\rho u_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z)}{\partial x}$,因 $\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$、$\mathrm{d}\tau$ 和 x 无关,因此上式又可以整理为 $\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,而经历了 $\mathrm{d}x$ 长度后其质量变化量为 $\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,因此从与 x 轴方向垂直的 EFGH

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

面流出的质量流量为 $\rho u_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，因此，$\mathrm{d}\tau$ 时间内，从 x 轴方向上净流入的流体质量流量为 $\rho u_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z - \left[\rho u_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]$，也就是 $-\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，而 $\mathrm{d}\tau$ 时间内净流入的质量为 $-\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau$，同理可得 $\mathrm{d}\tau$ 时间内由 y 轴和 z 轴方向上净流入的质量分别为 $-\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau$ 和 $-\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau$。

因此 $\mathrm{d}\tau$ 时间内，从六面体控制微元各个方向上净流入的总质量如式(2) 所示。

$$-\left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau\right] \tag{2}$$

初始时刻控制微元中的流体质量为 $\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，由于控制微元内流体的密度是随时间不断发生变化的，因此单位时间内控制微元内流体的质量变化率为 $\frac{\partial(\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z)}{\partial\tau}$，经历 $\mathrm{d}\tau$ 时间后其质量变化量为 $\frac{\partial(\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z)}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau$，因此 $\mathrm{d}\tau$ 内，控制微元内流体质量的增量应为 $\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{\partial(\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z)}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau - \rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{\partial(\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z)}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau$，整理后即为：

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau \tag{3}$$

将 (2) 式和(3) 式带入(1) 式可得：

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau = 0$$

上式两端同时除以 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau$，可进一步简化为：

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

(4) 式即为连续性方程的一般形式，该方程在某些情况下还可以进一步化解。将该式展开后可得：

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau} + u_x\frac{\partial\rho}{\partial x} + u_y\frac{\partial\rho}{\partial y} + u_z\frac{\partial\rho}{\partial z} + \rho\frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho\frac{\partial u_y}{\partial y} + \rho\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{5}$$

由于流体密度 ρ 可以看作是时间和空间的函数，即：

$$\rho = \rho(x, y, z, \tau) \tag{6}$$

将上式对时间 τ 求全导数可得：

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} \tag{7}$$

由于位移除以时间等于速度，因此有：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = u_x, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = u_y, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = u_z \tag{8}$$

将(8) 式带入(7) 式可得：

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial\rho}{\partial\tau} + u_x\frac{\partial\rho}{\partial x} + u_y\frac{\partial\rho}{\partial y} + u_z\frac{\partial\rho}{\partial z} \tag{9}$$

将(9) 式代入(5) 式，则连续性方程又可以改写为：

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\tau} + \rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = 0 \tag{10}$$

对于不可压缩流体的稳态流动，流体密度不随着时间和空间变化($\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\tau} = 0$)，上式又可以改写为 $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$，即为不可压缩流体稳态流动连续性方程。

1.3　欧拉方程的推导过程

在某一流场中取一个足够小的六面体控制微元，其边长分别为 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$，如图 2 所示。

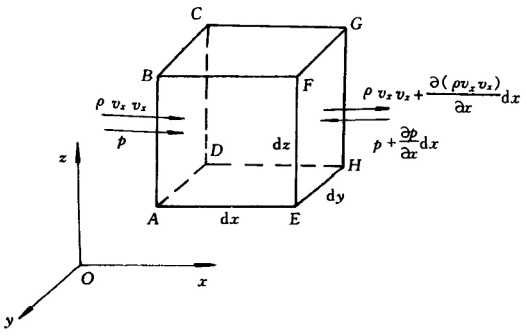


图 2　六面体控制微元动量守恒示意图

以上述控制微元为研究对象，根据动量定律可得如下关系式：

$$\begin{bmatrix}\text{单位时间作用}\\ \text{在控制微元上}\\ \text{的合外力冲量}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{单位时间净}\\ \text{流入控制微}\\ \text{元的动量}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{单位时间}\\ \text{控制微元}\\ \text{动量增量}\end{bmatrix} \tag{11}$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

作用在控制微元上的力有两种，体积力和表面力。假设沿 x 方向作用在与 x 轴垂直的 ABCD 面单位面积上的压力为 p，由于控制微元所受压力 p 是随着空间改变的，因此其沿着 x 轴单位距离上的压力变化率可表示为 $\frac{\partial p}{\partial x}$，因此 EFGH 面上单位面积上所受的压力可表示为 $p+\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x$，方向与 ABCD 面所受压力相反，因此控制微元 x 轴方向上所受的总的压力为 $[p-(p+\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x]$，即 $-\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，所以 $\mathrm{d}\tau$ 时间内作用于控制微元 x 轴方向上的压力所产生的冲量为：

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau \tag{12}$$

假设流体控制微元在 x 轴方向上所受单位质量力为 X，则微元在 x 轴方向上所受的总体积力为 $X\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，因此 $\mathrm{d}\tau$ 时间内所产生的冲量为：

$$X\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau \tag{13}$$

某一时刻由与 x 轴垂直的 ABCD 面流入控制体微元的动量通量为 $\rho u_x u_x$，由于动量通量是随着空间变化的，沿着 x 轴单位长度的动量通量变化率为 $\frac{\partial(\rho u_x u_x)}{\partial x}$，经历了 $\mathrm{d}x$ 长度后其动量通量变化量为 $\frac{\partial(\rho u_x u_x)}{\partial x}\mathrm{d}x$，因此由 EFGH 面流出控制微元的动量通量为 $\rho u_x u_x+\frac{\partial(\rho u_x u_x)}{\partial x}\mathrm{d}x$，所以由 x 轴方向净流入控制微元的动量通量是 $\rho u_x u_x-[\rho u_x u_x+\frac{\partial(\rho u_x u_x)}{\partial x}\mathrm{d}x]$，即为 $-\frac{\partial(\rho u_x u_x)}{\partial x}\mathrm{d}x$，因此 $\mathrm{d}\tau$ 时间内由 x 轴净流入控制微元的动量为 $-\frac{\partial(\rho u_x u_x)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau$。

由于控制微元内的流体属于三维流动，因此由 y 轴和 z 轴方向流入控制体微元内的流体同样具有 x 方向的速度 u_x。某一时刻由与 y 轴垂直的面 DHGC 流入控制微元的流体在 x 轴方向具有的动量通量为 $\rho u_y u_x$，由于动量通量是随着空间变化的，沿着 y 轴单位长度的动量通量变化率为 $\frac{\partial(\rho u_y u_x)}{\partial y}$，经历了 $\mathrm{d}y$ 长度后其动量通量变化量为 $\frac{\partial(\rho u_y u_x)}{\partial y}\mathrm{d}y$，因此由 ABFE 面流出控制微元的流体在 x 轴方向具有的动量通量为 $\rho u_y u_x+\frac{\partial(\rho u_y u_x)}{\partial y}\mathrm{d}y$，所以由 y 轴方向净流入控制微元的流体所具有的 x 轴方向的动量通量是 $\rho u_y u_x-[\rho u_y u_x+\frac{\partial(\rho u_y u_z)}{\partial y}\mathrm{d}y]$，即为，因此 $\mathrm{d}\tau$ 时间内由 x 轴净流入控制微元的动量为 $-\frac{\partial(\rho u_y u_x)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau$。同理可得 $\mathrm{d}\tau$ 时间内由 z 轴净流入控制微元的动量为 $-\frac{\partial(\rho u_z u_x)}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau$，综上所述，可知 $\mathrm{d}\tau$ 时间内由 x 轴、y 轴和 z 轴三个方向上净流入控制微元的总动量为：

$$-\frac{\partial(\rho u_x u_x)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau-\frac{\partial(\rho u_y u_x)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau-\frac{\partial(\rho u_z u_x)}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau \tag{14}$$

初始时刻控制微元中的流体所具有的 x 方向的动量为 $\rho u_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，由于控制微元动量是随时间发生变化的，因此单位时间内控制微元内流体的动量变化率为 $\frac{\partial(\rho u_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z)}{\partial\tau}$，经历 $\mathrm{d}\tau$ 时间后其动量变化量为 $\frac{\partial(\rho u_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z)}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau$，因此 $\mathrm{d}\tau$ 时间内，控制微元内流体的动量增量应为 $\rho u_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{\partial(\rho u_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z)}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau-\rho u_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\partial(\rho u_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z)}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau$，整理后为：

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial\tau}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau \tag{15}$$

将式(12)、式(13)、式(14)和式(15)代入式(11)，并在等式两边同时除以 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau$ 得：

$$\rho X-\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial\tau}+\frac{\partial(\rho u_x u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y u_x)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho u_z u_x)}{\partial z} \tag{16}$$

将式(16)右边各项展开得：

$$\rho X-\frac{\partial p}{\partial x}=u_x\frac{\partial p}{\partial\tau}+\rho\frac{\partial u_x}{\partial\tau}+u_x\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+\rho u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_x\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}+\rho u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_x\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}+\rho u_x\frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{17}$$

式(17)右边各项整理后可得：

$$\rho X-\frac{\partial p}{\partial x}=u_x[\frac{\partial p}{\partial\tau}+\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}]+\rho[\frac{\partial u_x}{\partial\tau}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}] \tag{18}$$

然后将式(4)连续性方程代入(18)式可得：

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\rho X - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \left[\frac{\partial ux}{\partial \tau} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}\right] \tag{19}$$

式(19) 两边同时除以 ρ 整理后得:

$$X - \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial \tau} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \tag{20}$$

式(20) 便为一般形式的欧拉方程,由于等式右边各项之和实际上就是 u_x 对时间 τ 的全导数(推导过程与式(9) 的推导类似,这里直接给出结果),即:

$$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial u_x}{\partial \tau} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \tag{21}$$

将式(21) 代入式(20) 便可进一步将 x 方向的欧拉方程的简写成:

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}\tau} \tag{22}$$

上面推导了 x 方向的欧拉方程,同理可推导得到 y 方向的欧拉方程为:

$$Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}\tau} \tag{23}$$

得到的 z 方向的欧拉方程为:

$$Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}\tau} \tag{24}$$

2　教学方法思考与总结

笔者在这部分内容的教学过程中得到了以下几点认识和体会:

(1) 由于传输理论的学习涉及到大量高等数学和物理学知识,高等数学和大学物理课程一般安排在第一学年开展,而传输原理的教学则安排在第三学年,因此学生对所学过的高等数学和大学物理知识点多有遗忘,教学过程中有针对性的引导学生对教学中所涉及到的高等数学和物理学知识进行回顾和复习显得非常重要。

(2) 诸多教材上将动量方程的衡算方程写为“单位时间作用在控制微元上的合外力冲量 = 单位时间流出控制微元的动量 - 单位时间流入控制微元的动量 + 单位时间控制微元的动量增量”,这种形式的动量衡算方程并不好理解,如果将上式改写为“单位时间作用在控制微元上的合外力冲量 + 单位时间净流入控制微元的动量 = 单位时间控制微元动量增量”,即合外力对控制微元动量的贡献 + 流入控制微元流体对控制微元动量的贡献 = 控制微元动量的增量。显然后者和前者是等效的,而相比之下后者比前者更容易被学生所理解和掌握。

(3) 衡算方程列好后,在将衡算方程中所涉及到的各项表述为微分形式的过程中也可以有多种不同的思想,比如连续性方程的推导过程中,许多教材中在已知从 x 方向流入的流体的质量通量为 ρu_x 时,采用将 ρu_x 利用泰勒级数展开的思想来求得流经 $\mathrm{d}x$ 距离后由 x 方向流出的流体的质量通量,显然数学理论性太强,不便于学生理解和掌握,笔者在教学中一般采用质量通量 ρu_x 随着空间发生变化的思想来求出流出控制微元的质量通量,与前者殊途同归,但相比之下要比前者更容易理解。

(4) 在推导连续性方程及欧拉方程时,涉及到单位时间的概念,以往教材许多教材里用“1”表示单位时间,由于任何表达式乘以“1”和没有乘以“1”单从化简后的形式上是不好辨认的,如 $\rho u_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z \times 1 = \rho u_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z$,表示的物理意义是单位时间从 x 轴流入控制微元的流体质量,其国际单位为 kg。而 $\rho u_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z$(没有乘以“1”时) 则表示 x 方向流入控制微元的流体的质量流量,国际单位 kg/s,可见上述两个式子经整理后形式是一样的,而物理意义及单位却完全不同,因此笔者认为将单位时间用“$\mathrm{d}\tau$”表示,可使二者更不容易混淆。

(5) 在推导流体密度(ρ) 对时间(τ) 的全导数(式(6)—(9)) 时,许多教材上并没有交待清楚 ρ 是哪些自变量的函数,就直接给出最终结果,使学生很难理解,因此任课教师首先要交待清楚,控制微元的密度是随时间和空间变化的,$\rho = \rho(x, y, z, \tau)$,并且空间变量又仅是时间的函数,$x = x(\tau)$,$y = y(\tau)$,$z = z(\tau)$。这样式(9) 的推导就非常好理解了。

(6) 在推导欧拉方程时,以往教学中学生普遍反映难以理解为何由 y 轴方向和 z 轴方向流入的流体对 x 轴方向的动量也有贡献,因此任课教师需要强调控制微元内流体的流动属于三维流动,因此不论从那个方向进入控制微元的流体均具有三个维度的速度,因此从 y 轴方向和 z 轴方向流入的流体自然对 x 轴方向的动量也有贡献,这样问题就迎刃而解了。

3　结束语

冶金传输原理作为冶金专业的一门专业基础课程,在冶金专业中一直处于举足轻重的地位,其核心

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

内容体系包括动量传输、质量传输及热量传输，在动量传输部分，连续性方程和欧拉方程属于核心内容，其推导过程一直是传输原理教学中的重点和难点。笔者尝试采用易于学生理解和掌握的思想分别推导了上述方程，并分享了上述方程推导过程中的一些认识与体会，为动量传输理论的教学提供一定的参考。

参 考 文 献

[1] 常云龙，李润霞，袁晓光，等. 我国材料成型及控制工程专业人才培养模式研究[J]. 中国电力教育，2008，(8)：94－95.

[2] 曾大新，周述积，张元好，等. 材料成型及控制工程专业应用型本科人才培养方案的研究与实践[J]. 湖北汽车工业学院学报，2009，23(3)：76－80.

[3] 王超，袁守谦，杨双平，等. 冶金传输原理教学方法改革[J]. 中国冶金教育，2009，(4)：42－43.

[4] 郁青春，施哲，徐宝强，等. 冶金传输原理课程的“教”与“学”[J]. 中国冶金教育，2012，(2)：23－25.

[5] 刘然，王杏娟，艾立群，等. 《冶金传输原理》课程教学手段的改进[J]. 教育教学论坛，2015，(27)：135－136.

[6] 吴磊，马孝义. 纳威－斯托克斯(N－S)方程推导的专题教学改革探索[J]. 课程教育研究，2014，(33)：60－61.

[7] 张胤. “冶金传输原理”教学的改革与实践[J]. 中国冶金教育，1999，(4)：25－26.

[8] 李德良. 动量传递、能量传递、质量传递的相似性[J]. 玉溪师专学报，1993，(5)：87－96.

[9] 沈巧珍，杜建明. 冶金传输原理[M]. 北京：冶金工业出版社，2006.

(上接第78页)

6 结束语

通过对包钢宽厚板轧机主传动交－交变频器直流电流调节器计算方法分析，对控制系统有了深入了解，并逐步总结出各个参数对整个系统性能的影响，使该套设备具有了稳定、高效、低事故率的特点，保证了设备的运行稳定，为工艺稳定生产和新产品开发创造了条件。

参 考 文 献

[1] 逯志宏，刘广友，马文静. 大功率交－交变频全数字矢量控制系统在济钢中厚板精轧机上的应用[J]. 冶金自动化，2003，(2)：20.

[2] 马小亮. 大功率交－交变频调速及矢量控制技术[M]. 北京：机械工业出版社，1996.

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net