doi: 10.11720/wtyht.2026.2287
王静波, 熊盛青, 罗锋, 等. 航空重力测量数据处理中基于频域的卡尔曼平滑滤波方法技术研究[J]. 物探与化探, 2026, 50(5): 871-881. https://doi.org/10.11720/wtyht.2026.2287
Wang J B, Xiong S Q, Luo F, et al. Technical research on frequency-domain-based Kalman smoothing filtering for airborne gravity data processing[J]. Geophysical and Geochemical Exploration, 2026, 50(5): 871-881. https://doi.org/10.11720/wtyht.2026.2287

航空重力测量数据处理中基于频域的卡尔曼平滑滤波方法技术研究

王静波[1], 熊盛青[2], 罗锋[2], 郭志宏[2], 周锡华[2], 王冠鑫[2]
(1. 北方工业大学 理学院, 北京 100144; 2. 中国自然资源航空物探遥感中心, 北京 100083)

摘 要: 卡尔曼滤波是一种基于模型的时域滤波方法, 其在频率域上的实现方法是航空重力测量数据处理中的关键技术。笔者采用低阶泰勒级数展开近似的卡尔曼滤波模型, 研究设计了一种基于频域的卡尔曼平滑滤波器。由泰勒级数公式出发, 研究分析了信号幅值、信号频率、数据采样率和模型维数对模型误差的影响; 根据一般卡尔曼平滑滤波算法, 推导并给出平滑滤波器稳态条件下的频率响应函数$H(e^{j\omega})$; 基于滤波器截止频率f_c和幅频特性参数$|H(f_c)|$, 提出一种用于确定系统噪声和量测噪声统计特性参数的方法, 用于估算系统噪声序列和量测噪声序列方差。采用本文滤波器和重力异常解算方案, 对某地实测数据进行重力异常解算及滤波处理, 并与用 GT-1A 系统软件的处理结果进行对比研究, 二者均方差值平均达 0.47 mGal。

关键词: 航空重力测量; 卡尔曼滤波; 数值微分; 模型误差; 噪声统计特性参数
中图分类号: P631; P31 **文献标识码**: A **文章编号**: 1000-8918(2026)05-0871-11

0 引言

航空重力测量是利用机载重力仪、定位传感器组合系统进行空中重力加速度测量的方法, 它是陆地重力和海洋重力测量的拓展和重要补充, 也是重力测量的发展方向之一。航空重力测量具有测量速度快、覆盖范围大等优点, 国外大部分航空重力测量系统的测量精度达到了 1 mGal 左右, 最高已达 0.5 mGal, 可用于大范围重力普查、无人区重力测量和远程武器发射区重力快速测量等方面[1-2]。

近十几年来, 中国自然资源航空物探遥感中心先后引进了俄制 GT-1A 和 GT-2A 航空重力仪及其配套数据处理软件。GT-2A 航空重力仪与 GT-1A 航空重力仪相比, 二者的测量精度一致, 前者提高了动态测量范围和灵敏度, 是目前最先进的航空重力仪之一[3-4]。目前, 由国内科研院所等机构合作研发的航空重力仪工程样机测量精度已好于 1 mGal, 新研制的航空重力测量系统已接近国际先进水平, 但在测量精度和系统数据处理软件开发涉及的关键核心技术上, 仍有待改进、完善和提高[5-6]。

在飞行状态下进行的航空重力测量, 重力仪必然受到飞机运动等因素产生的扰动加速度的影响, 需进行校正消除干扰[7]。扰动加速度的量级很大 (可达 10^6 mGal), 并以高频成分为主, 而重力异常信号幅值较小 (约 10^2 mGal), 完全被高频噪声干扰所淹没, 可通过低通滤波压制高频噪声, 从而获得相对低频部分有意义的重力异常信号[8]。目前, 航空重力异常解算大致有两种方案: 一种是采用数值微分法估算载体垂直加速度[9-10], 经载体垂直加速度等各项改正后, 再采用 FIR(finite impulse response, 有限脉冲响应) 低通滤波处理消除高频噪声干扰, 得到相应测线的自由空间重力异常值[11-14]; 另一种是把重力异常信号看作一个随机过程, 根据其测量原理, 建立重力异

收稿日期: 2024-07-13; **修回日期**: 2026-02-12
基金项目: 国家重点研发计划项目“航空重力测量技术装备研制”之课题“航空重力数据处理软件实用化研制”(2017YFC0601705)
第一作者: 王静波(1963-), 男, 博士, 副教授, 主要从事航空重力方法技术研究。Email: wjb@ncut.edu.cn
通讯作者: 熊盛青(1963-), 男, 中国工程院院士, 博士生导师, 从事航空地球物理、遥感技术及地学应用研究与勘查实践工作。Email: xsq@agrs.cn

常解算的数学模型，基于卡尔曼滤波平滑技术，将载体垂直加速度等各项改正与滤波同步进行，得到相应测线的自由空间重力异常估计。前者简单、实用，无需先验信息，重力异常解算精度可达 1 mGal，后者相对复杂，需要建立相应重力异常解算的数学模型，且要求噪声的统计特性是已知的。而实际情况并非如此，模型偏差及噪声的不确定性都会影响重力异常的估值精度。GT-1A 系统配套数据处理软件采用第 2 种方案进行航空重力异常解算，估值精度高达 0.6 mGal。国内众多学者对此进行了相关追踪研究[15-19]，大多是在技术层面上进行探索，尚未深入到相关基础理论的研究，这也限制了卡尔曼滤波技术在国产重力异常解算软件中的应用。针对上述 2 种重力异常解算方案的特点，笔者拟采用高精度的数值微分公式计算载体垂直加速度，用卡尔曼平滑滤波器替代传统的 FIR 低通滤波器，对经各项改正后的数据进行滤波处理。

卡尔曼滤波是一种时域滤波方法，其在频率域上的实现方法是航空重力测量数据处理中的关键技术。在前期研究中，笔者采用低阶泰勒级数展开近似的卡尔曼滤波模型，根据卡尔曼平滑滤波算法，推导并给出卡尔曼滤波器的频率响应函数$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，研究、设计了卡尔曼平滑滤波器，并对航空重力测量数据进行了滤波试验研究[20]，但在具体方法技术上，并未涉及模型的建立、模型误差分析、平滑滤波器的时域与频域的对应关系和噪声统计特性参数估算等方面。针对前期研究存在的问题，笔者由泰勒级数展开公式出发，研究分析了信号幅值、信号频率、数据采样率和模型的维数对模型误差的影响；根据卡尔曼平滑滤波算法，推导并给出平滑滤波器稳态条件下的频率响应函数$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$;基于滤波器截止频率$f_c$和幅频特性参数$|H(f_c)|$，提出一种用于确定系统噪声和量测噪声统计特性参数的方法，用于估算系统噪声序列和量测噪声序列的统计特性参数，采用此方法设计的卡尔曼平滑滤波器可在频域实现对测量信号的低通滤波处理。采用本文方法对某地 Flt005 架次飞行实测数据进行重力异常解算及滤波处理，获得该整段测线的自由空间重力异常值，并与 GT-1A 系统软件的处理结果作对比，为后续研制国产软件的实用化奠定基础。

1 卡尔曼平滑滤波

卡尔曼滤波是一种基于模型的时域滤波方法，对于具有高斯分布噪声的线性系统，可以得到系统状态的递推最小均方差估计。利用它进行滤波将导致平滑、频带受限，等效于在频率域低通滤波处理[20]。

1.1 卡尔曼平滑滤波器

设离散线性系统的状态方程和量测方程为[20-22]

$$\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}\boldsymbol{X}_k+\boldsymbol{\Gamma}_k\boldsymbol{W}_k, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{Z}_k=\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{X}_k+\boldsymbol{V}_k。 \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{X}_k$为t_k时刻的状态向量；$\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}$为$t_k$时刻至$t_{k+1}$时刻的一步转移矩阵；$\boldsymbol{\Gamma}_k$为系统噪声耦合矩阵；$\boldsymbol{Z}_k$为$t_k$时刻的量测向量；$\boldsymbol{H}_k$为量测矩阵；$\boldsymbol{V}_k$为量测噪声序列；$\boldsymbol{W}_k$为系统噪声序列。其中，$\boldsymbol{W}_k$和$\boldsymbol{V}_k$为零均值、互不相关的白噪声或高斯白噪声，系统噪声序列和量测噪声序列的协方差矩阵分别用$\boldsymbol{Q}_k$和$\boldsymbol{R}_k$表示。

由于航空重力测量数据处理是在事后进行，可采用双向卡尔曼滤波，利用$t_1 \sim t_M$时间段内的所有量测向量来进行状态向量估计。卡尔曼滤波是一种递推算法，按时间顺序的方向，滤波分为正向滤波和反向滤波，滤波器的结构如图 1 所示。

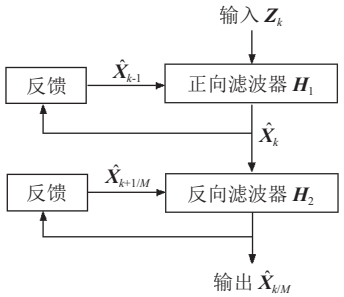


图 1 卡尔曼平滑滤波器结构示意[22]

Fig. 1 Kalman smoothing filter structure diagram[22]

正向滤波是由量测向量$\{\boldsymbol{Z}_k\}(k=1,2,\cdots,M)$递推得到状态向量估计$\left\{\hat{\boldsymbol{X}}_k\right\}$，反向滤波是由状态向量估计$\left\{\hat{\boldsymbol{X}}_k\right\}(k=M,M-1,\cdots,1)$，递推得到平滑后新的状态向量估计$\left\{\hat{\boldsymbol{X}}_{k/M}\right\}$。递推算法如下[20-22]。

1）正向滤波 (卡尔曼滤波)

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1}=\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}; \tag{3}$$

$$\hat{\boldsymbol{X}}_k=\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1}+\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{Z}_k-\boldsymbol{H}_k\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1}; \tag{4}$$

$$\boldsymbol{K}_k=\boldsymbol{P}_{k/k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{P}_{k/k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}_k^{-1}, \tag{5a}$$

或

$$\boldsymbol{K}_k=\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_k^{-1}; \tag{5b}$$

$$\boldsymbol{P}_{k/k-1}=\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{\mathrm{T}}; \tag{6}$$

$$\boldsymbol{P}_k=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{P}_{k/k-1}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}}, \tag{7a}$$

或

$$\boldsymbol{P}_k=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{P}_{k/k-1}, \tag{7b}$$

或

$$\boldsymbol{P}_k^{-1}=\boldsymbol{P}_{k/k-1}^{-1}+\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_k^{-1}\boldsymbol{H}_k。 \tag{7c}$$

式中：$\hat{\boldsymbol{X}}_k$为t_k时刻的状态向量估计；$\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1}$为$t_{k-1}$时刻至$t_k$时刻状态向量的一步预测估计；$\boldsymbol{P}_k$为$t_k$时刻状态

向量估计的误差协方差矩阵; $\boldsymbol{P}_{k/k-1}$为t_{k-1}时刻至t_k时刻状态向量一步预测估计的误差协方差矩阵; $\boldsymbol{K}_k$为t_k时刻的滤波增益矩阵; $\boldsymbol{I}$为单位矩阵。

给定初始状态向量$\hat{\boldsymbol{X}}_0$和初始状态向量估计的误差协方差矩阵$\boldsymbol{P}_0$, 按式 (3)~式 (7), 由量测向量$\{\boldsymbol{Z}_k\}$递推得到状态向量估计$\left\{\hat{\boldsymbol{X}}_k\right\}(k=1,2,\cdots,M)$。

2)反向滤波 (平滑滤波)

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{k/M}=\hat{\boldsymbol{X}}_k+\boldsymbol{A}_k(\hat{\boldsymbol{X}}_{k+1/M}-\hat{\boldsymbol{X}}_{k+1/k}),\tag{8}$$

$$\boldsymbol{P}_{k/M}=\boldsymbol{P}_k+\boldsymbol{A}_k(\boldsymbol{P}_{k+1/M}-\boldsymbol{P}_{k+1/k})\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}},\tag{9}$$

式中: $\hat{\boldsymbol{X}}_{k/M}$为$t_k$时刻平滑后的状态向量估计; $\boldsymbol{P}_{k/M}$为t_k时刻平滑后的状态向量估计的误差协方差矩阵; $\boldsymbol{A}_k$为t_k时刻的平滑滤波增益矩阵, $\boldsymbol{A}_k=\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{k+1/k}^{-1}$。

令$\hat{\boldsymbol{X}}_{M/M}=\hat{\boldsymbol{X}}_M$, 在正向滤波基础上, 按式 (8) 和式 (9), 由状态向量估计$\left\{\hat{\boldsymbol{X}}_k\right\}(k=M,M-1,\cdots,1)$, 递推得到平滑后的状态向量估计$\left\{\hat{\boldsymbol{X}}_{k/M}\right\}(k=M-1,M-2,\cdots,0)$。

1.2　平滑滤波器的频率响应函数

由式 (3) 和式 (4) 可知, 正向滤波器模型在时间域可表示为[20]

$$\hat{\boldsymbol{X}}_k=\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}+\boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{Z}_k-\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1})。\tag{10}$$

整理式 (10) 得到 (输入$\boldsymbol{Z}_k$, 输出$\hat{\boldsymbol{X}}_k$)[20]:

$$\hat{\boldsymbol{X}}_k+(\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}=\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{Z}_k。\tag{11}$$

由式 (3) 和式 (8) 整理得到 (输入$\hat{\boldsymbol{X}}_k$, 输出$\hat{\boldsymbol{X}}_{k/M}$):

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{k/M}-\boldsymbol{A}_k\hat{\boldsymbol{X}}_{k+1/M}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k})\hat{\boldsymbol{X}}_k。\tag{12}$$

直接对式 (11) 和式 (12) 取z变换, 可求得平滑滤波器的传递函数 (输入$\boldsymbol{Z}_k$, 输出$\hat{\boldsymbol{X}}_{k/M}$):

$$\boldsymbol{H}_{km}(z)=\frac{\hat{\boldsymbol{X}}_{k/M}(z)}{\hat{\boldsymbol{X}}_k(z)}\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{X}}_k(z)}{\boldsymbol{Z}_k(z)}=\frac{\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}}{\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_kz^{-1}}\cdot\frac{\boldsymbol{K}_k}{\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}z^{-1}}。\tag{13}$$

将$z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$代入, 得到平滑滤波器的频率响应函数[22]:

$$\boldsymbol{H}_{km}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\boldsymbol{H}(z)|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}=\frac{\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}}{\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}\cdot\frac{\boldsymbol{K}_k}{\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}},\tag{14}$$

式中: j为虚数单位; ω为圆频率。

1.3　平滑滤波器的幅频特性参数

一般情况下, 数字滤波器的技术指标是以其频率响应的幅度特性给出的 (幅频特性)。对于低通滤波器而言, 它的技术指标是以通带频率F_{pass}、阻带频率F_{stop}、通带波纹δ_{pass}和阻带波纹δ_{stop}来表征的。图 2 中: $|H(f)|$为滤波器的幅频特性函数 ($|H(f)|=\left|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|$); f为频率; $\omega=2\pi f$; F_{s}为采样频率。

在频率域上, 卡尔曼平滑滤波器等效于低通滤波器, 其技术指标主要涉及通带频率F_{pass}和阻带频率

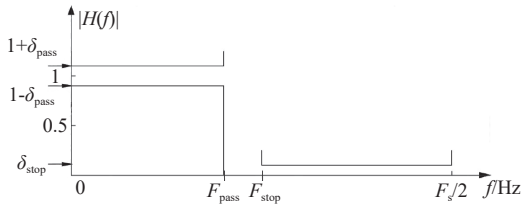


图 2　数字低通滤波器技术指标示意[23-24]

Fig. 2　Digital low-pass filter technical indicators schematic diagram[23-24]

F_{stop}两项, 可用滤波器的截止频率f_c和幅频特性参数$|H(f_c)|$的数值大小来替代, 它们能够反映其幅频特性曲线的大致分布情况。在过渡带区间, $|H(f_c)|$数值越大, 截止频率f_c越接近通带频率F_{pass}; $|H(f_c)|$数值越小, 截止频率f_c越接近阻带频率F_{stop}。

2　航空重力测量数据处理

航空重力测量通常采用相对重力测量, 自由空间重力异常计算公式为[16,25]:

$$\Delta g=g_b+(f_Z-f_Z^0)+\delta f_D-\dot{v}_U+\delta a_E+\delta a_H+\delta a_F-\gamma_0。\tag{15}$$

式中: g_b是停机坪处基准点的重力值; f_Z、f_Z^0分别为重力仪传感器的测量值和初值; δf_D为零漂改正值; $\dot{v}_U$为载体垂直加速度值; δa_E为厄特渥斯改正值; δa_H为水平加速度改正值; δa_F是自由空间 (高度) 改正值; γ_0是椭球面上的正常重力值。上述各项改正算法详见参考文献 [16,25]。

2.1　数值微分算法

假设离散测量信号为等间隔测量, 测量信号数据序列为 (y_i,t_i), 采样间隔为t_s, 可采用数值微分法近似计算函数$y=f(t)$的导数序列值。由泰勒级数公式出发, 可以导出三点中心微分公式[26-27]。计算公式如下[26]:

$$f'(t)=\frac{f(t+t_s)-f(t-t_s)}{2t_s}-\frac{t_s^2}{6}f'''(c),\tag{16}$$

$$f''(t)=\frac{f(t-t_s)-2f(t)+f(t+t_s)}{t_s^2}-\frac{t_s^2}{12}f^{(4)}(c),\tag{17}$$

式中: c位于$t-t_s$和$t+t_s$之间; f'、f''、f'''和$f^{(4)}$分别表示函数f的一阶导数、二阶导数、三阶导数和四阶导数。

由式 (16) 和式 (17) 可知: 按三点中心微分公式近似计算 (截断) 的导数值, 其微分算法精度为$o(t_s^2)$ (o 表示无穷小量)。从理论上讲, 随着$t_s\to 0$, 微分近似计算会收敛到相应的导数值。但公式将 2 个近似相同的数字相减, 会失去有效数字, 且除以小的数字

会放大误差, 这些都违反了浮点计算的基本法则[26]。因此, 在进行数值微分计算时, 采样间隔t_s不宜过小, 否则计算精度和舍入误差的影响会造成数值微分算法精度下降、误差增大。

2.2 重力异常卡尔曼滤波模型

重力异常信号通常被看作一个随机过程, 但由于缺乏足够的先验信息, 故无法建立准确的滤波模型。本文拟选用低阶泰勒级数展开近似的卡尔曼滤波模型 (通用) 进行滤波处理, 具体模型如下[20,22]:

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_k = \begin{bmatrix} \Delta g_k \\ \Delta \dot{g}_k \\ \Delta \ddot{g}_k \\ \vdots \\ \Delta \dddot{g}_k \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\Phi}_{k+1,k} = \begin{bmatrix} 1 & t_s & \dfrac{1}{1\cdot 2}t_s^2 & \cdots & \dfrac{1}{(n-1)!}t_s^{n-1} \\ 0 & 1 & t_s & \cdots & \dfrac{1}{(n-2)!}t_s^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \dfrac{1}{(n-3)!}t_s^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\Gamma}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{W}_k = [W_k], \\ \boldsymbol{Z}_k = [\Delta g'_k], \\ \boldsymbol{H}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{V}_k = [V_k]。 \end{cases} \tag{18}$$

式中: Δg_k为航空自由空间重力异常序列; $\Delta g'_k$为重力异常Δg_k的量测序列; t_s为采样间隔; n 为模型的维数。$\boldsymbol{X}_k$中包含Δg_k和Δg_k的 m 阶导数 (m=1,2,⋯,n−1) 等状态信息序列 (例如: $\Delta \dot{g}_k$表示Δg_k的一阶导数)。

2.3 模型误差分析

假设重力异常信号$\Delta g(t)$在区间内连续 n 阶可导, 则在$t_k \sim t_{k+1}$时间间隔内, $\Delta g(t)$的 (n−1) 阶泰勒公式为

$$\Delta g_{k+1} = \Delta g_k + \Delta g_k^{(1)} t_s + \frac{\Delta g_k^{(2)}}{2!}t_s^2 + \cdots + \frac{\Delta g_k^{(n-1)}}{(n-1)!}t_s^{n-1} + R_{n-1}(k), \tag{19}$$

$$R_{n-1}(k) = \frac{\Delta g^{(n)}(t)}{n!}t_s^n, \tag{20}$$

式中: t位于t_k和t_{k+1}之间; t_s为采用间隔; $\Delta g^{(m)}$表示Δg的 m 阶导数 (m=1,2,⋯,n); $R_{n-1}(k)$为截断误差项。

由式 (1)、式 (18) 和式 (19) 对比分析可知, 系统噪声序列W_k即为截断误差项$R_{n-1}(k)$:

$$W_k = R_{n-1}(k) = \frac{\Delta g^{(n)}(t)}{n!}t_s^n, (t_k < t < t_{k+1})。 \tag{21}$$

式 (21) 表明, 模型误差 (系统) 与信号幅值、信号频率、数据采样间隔t_s和模型的维数n等因素有关。对于低频信号 (0~0.15 Hz), 信号导数随阶次的增加衰减 (压制低频, 放大高频), 故模型的维数越高, 模型误差越小; 考虑到信号幅值因素, 低频信号导数随阶次的增加衰减速度可能有限, 数据采样率 (与采样间隔互为倒数) 的提高对减小模型误差将起主要作用。此外, 也应考虑计算精度和舍入误差的影响, 模型的维数不宜过高, 采样间隔t_s也不宜过小, 否则, 可能会导致滤波器性能下降, 甚至发散。

3 噪声统计特性参数分析方法研究

航空重力测量通常选择在良好环境条件下进行, 飞行相对平稳。由于笔者采用近似直线的整段测线作为固定区间进行平滑计算, 故噪声统计特性参数可按测量区间整体估算。

3.1 噪声统计特性参数

假设噪声测量信号为一平稳随机序列 $X(m)$, 其均值定义为[28]

$$\mu_x = \boldsymbol{E}[X(m)] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i, \ (i = 1,2,3,\cdots,m); \tag{22}$$

噪声测量信号 $X(m)$ 的方差定义为[28]

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu_x)^2, \ (i = 1,2,3,\cdots,m)。 \tag{23}$$

式中: x_i为噪声测量序列; i 为测量序数; m 为测量次数; $\boldsymbol{E}[\cdot]$表示数学期望, 即求均值运算。

3.2 量测噪声统计特性参数

由于飞机的运动和大气扰动产生的噪声以高频成分为主, 可通过低通滤波去除大部分噪声[12]。因此, 可先用 FIR 低通滤波器或样条平滑滤波器对重力异常测量信号 (计算数据) 进行滤波处理[29-31], 并将滤波结果近似作为标准比较; 再用重力异常测量信号减去滤波所得的结果作为近似量测噪声序列, 按式 (23) 计算量测噪声序列方差R(与量测噪声协方差阵$\boldsymbol{R}$对应)。

3.3 系统噪声统计特性参数

对于重力异常测量信号 (计算数据) 滤波处理, 输入信号为$\boldsymbol{Z}_k(\Delta g'_k)$, 输出信号为$\hat{\boldsymbol{Z}}_{k/M}(\Delta \hat{g}_{k/M})$, 即$\hat{\boldsymbol{Z}}_{k/M} = \boldsymbol{H}_k \hat{\boldsymbol{X}}_{k/M}$, 则相应平滑滤波器的频率响应函数修改为[22]:

$$\boldsymbol{H}_{km}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\frac{\boldsymbol{H}_k(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{\Phi}_{k+1,\boldsymbol{k}})}{\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}\cdot\frac{\boldsymbol{K}_k}{\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}。\tag{24}$$

假设重力异常测量信号 (计算数据) 为等间隔测量, 令$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_k$, $\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}$, $\boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{\Gamma}_k$, $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_k=R$, $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_k=Q$。当滤波达到稳态时, $\boldsymbol{P}_k=\boldsymbol{P}$为恒定矩阵, 由式 (5b)、式 (6) 和式 (7b) 可得[21-22]:

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}R^{-1}\boldsymbol{H})(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Gamma}Q\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}})。\tag{25}$$

由式 (5b)、式 (7c)、式 (8) 和式 (24) 可得稳态条件下的频率响应函数[22]:

$$\boldsymbol{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\frac{\boldsymbol{H}[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{-1}-\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}R^{-1}\boldsymbol{H})\boldsymbol{\Phi}]}{\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{-1}-\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}R^{-1}\boldsymbol{H})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}\cdot\frac{\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}R^{-1}}{\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}R^{-1}\boldsymbol{H}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\Phi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}。\tag{26}$$

先求解矩阵代数方程 (25), 再将方程的解$\boldsymbol{P}$代入式 (26), 得到平滑滤波器的频率响应函数$\boldsymbol{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$, 进而可得到滤波器的幅频特性函数$|H(f)|$[22]。在模型参数、量测噪声序列方差$R$和系统噪声序列方差$Q$已知情况下, 由滤波器幅频特性函数$|H(f)|$, 可得到滤波器幅频特性曲线, 进而可得到反映滤波器幅频特性的主要技术指标 (详见本文 1.3 章节)。

系统噪声序列方差Q的估算与上述过程正好相反。在模型参数和量测噪声序列方差R已知情况下, 根据滤波模型、滤波器的频率响应函数$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$、滤波器截止频率$f_c$和幅频特性参数$|H(f_c)|$, 按滤波器幅频特性函数$|H(f)|$关系估算系统噪声序列方差$Q$(与系统噪声协方差阵$\boldsymbol{Q}$对应)[22]。

4　滤波试验及结果分析

如前所述, 模型误差的大小以数据采样率的影响为主, 同时需要兼顾计算机的计算精度和舍入误差等因素的影响, 再考虑到系统噪声序列统计参数估算所需矩阵代数方程的求解, 本文滤波试验中, 滤波器模型的维数取 n=3。

4.1　GT-1A 数据处理基础

沿测线的航空自由空间重力异常计算公式, 可由 GT-1A 重力仪传感器垂直方向的动力学方程和相关测量的测量方程导出[16]:

$$\Delta g=g_b+(f'_3-f'^0_3)-\ddot{h}+\delta f_D+\delta a_E-\alpha_2 f'_1+\alpha_1 f'_2+\delta a_F-\gamma_0,\tag{27}$$

式中: f'_3和f'^0_3分别为重力仪传感器测量值及其初值; $\ddot{h}$为 GPS(全球定位系统, global positioning system) 高程测量信号的二次导数 (同$\dot{v}_U$); f'_1和f'_2为 INS(惯性导航系统, inertial navigation system) 平台水平加速度计测量值; α_1和α_2为 INS 平台水平失准误差; 其他各项同式 (15)。

4.2　滤波试验 1(滤波方法)

试验数据采用 GT-1A 航空重力系统获得的 Line3010 测线原始未滤波、100 s 和 60 s 滤波自由空间重力异常数据, 详见参考文献 [20,29-32]。

试验数据的采样间隔为 0.5 s, 相对应的数据点数为 4 000。原始未滤波自由空间重力异常数据曲线如图 3 所示, 横轴 Fid 为测线基准点号。滤波周期选取 100 s 和 60 s, 对应的截止频率f_c分别为 0.01 Hz 和 0.016 7 Hz, 选用滤波器的幅频特性曲线如图 4、图 5 所示。图 4、图 5 中, 图 a 和图 b 滤波器的幅频特性参数$|H(f_c)|$相同, 但对应模型的量测噪声序列方差R和系统噪声序列方差Q不同, 滤波器的相关具体参数见表 1。

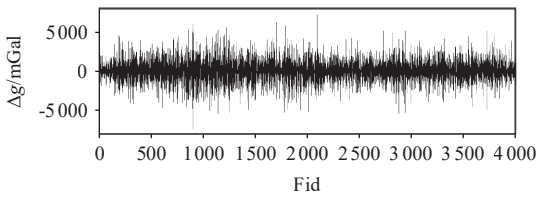


图 3　GT-1A 系统 Line3010 原始未滤波航空自由空间重力异常[20]

Fig. 3　GT-1A raw unfiltered airborne gravity free air anomaly along survey Line3010 [20]

采用上述滤波器 (图 4、图 5), 分别对 Line3010 测线原始未滤波自由空间重力异常数据进行滤波处理, 滤波结果见图 6、图 7, 相应的卡尔曼平滑滤波结果与 GT-1A 系统滤波结果的差值统计见表 2。图 6、图 7 中, 边部的滤波结果受边界效应影响, 其准确性较低, 在实际应用中应予以剔除[29,32]。

4.3　滤波试验 2(重力异常解算)

试验数据采用由 GT-1A 航空重力系统获得的某地 Flt005 架次飞行的测量数据和相应 100 s 滤波自由空间重力异常解算数据 (采样率 2 Hz)。Flt005 架次飞行测量是 6 条往返重复线, 按时间顺序对应的测线分别为 R1(R690501)、R2(R690502)、R3(R690503)、T1(T7011)、T2(T7021) 和 R4(R690504)。

GT-1A 系统获得的测量数据包括重力仪传感器读数f'_3、GPS 高程信号h、INS 平台水平加速度f'_1和f'_2、INS 平台水平失准误差α_1和α_2等[16]。由于获得的测量数据采样频率不同, 需采用线性插值或样条插值等方法进行频率转换 (按时间点统一测量数据), 再经扰动加速度各项改正后, 按式 (27) 计算沿测线航空自由空间重力异常值。频率转换方案如下: 方案 1, 以 GT-1A 系统获得的 G_0 文件数据 (重力仪数据f'_3, 采样率约 18 Hz) 时间点为基准, 按式

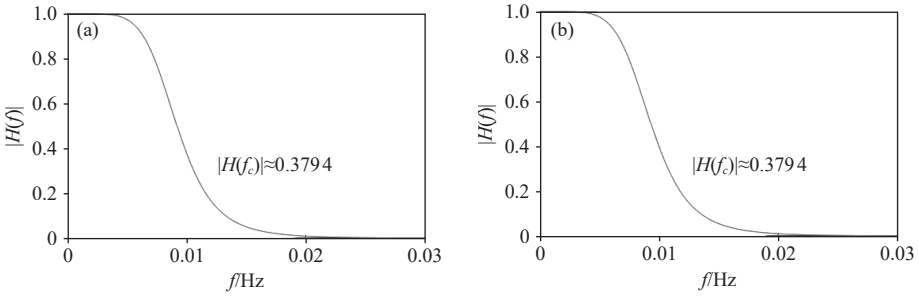


图 4　100 s 滤波器的幅频特性曲线(试验 1)

Fig. 4　Amplitude-frequency characteristic curve of 100 s filter(experiment 1)

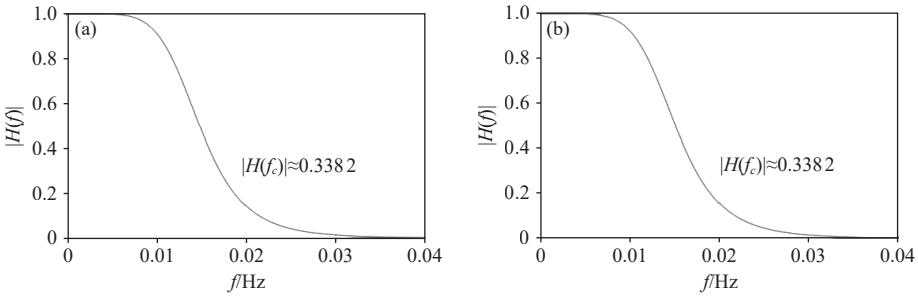


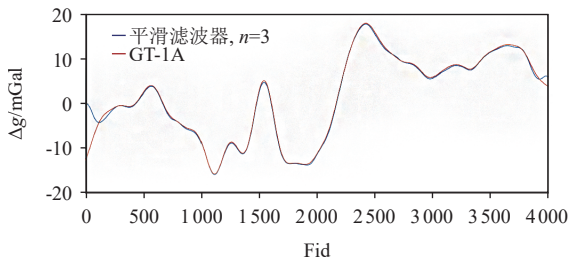
图 5　60 s 滤波器的幅频特性曲线(试验 1)

Fig. 5　Amplitude-frequency characteristic curve of 60 s filter(experiment 1)

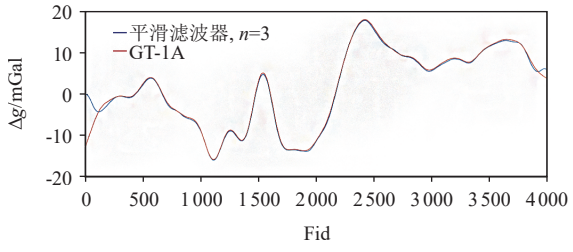
表 1　滤波器对应的滤波参数、模型参数和噪声统计特性参数(试验 1)

Table 1　Filters correspond to filter parameters, model parameters and noise statistical characteristic parameters(experiment 1)

滤波器	滤波周期T/s	幅频特性$\|H(f_c)\|$	模型维数n	采样间隔t_s/s	量测噪声R/mGal^2	系统噪声Q/mGal^2
图4a	100	0.379 4	3	0.500 0	$2.553\ 8\times10^{6}$	$2.401\ 2\times10^{-2}$
图4b	100	0.379 4	3	0.500 0	$2.346\ 3\times10^{6}$	$2.206\ 2\times10^{-2}$
图5a	60	0.338 2	3	0.500 0	$2.553\ 8\times10^{6}$	0.430 3
图5b	60	0.338 2	3	0.500 0	$2.346\ 2\times10^{6}$	0.395 2



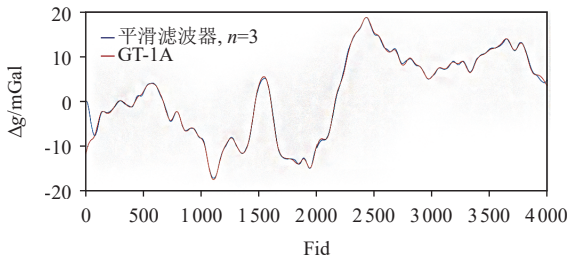
(a) 图 4a 平滑滤波器



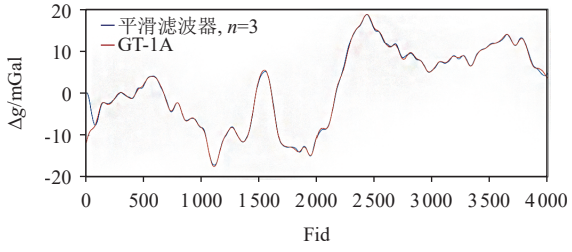
(b) 图 4b 平滑滤波器

图 6　Line3010 平滑滤波器与 GT-1A 系统 100 s 滤波航空自由空间重力异常对比

Fig. 6　Airborne gravity free air anomaly of smoothing filter and GT-1A 100 s filter along survey Line3010



(a) 图 5a 平滑滤波器



(b) 图 5b 平滑滤波器

图 7　Line3010 平滑滤波器与 GT-1A 系统 60 s 滤波航空自由空间重力异常对比

Fig. 7　Airborne gravity free air anomaly of smoothing filter and GT-1A 60 s filter along survey Line3010

表 2　卡尔曼平滑滤波试验结果与 GT-1A 系统滤波结果的差值统计

Table 2　Difference statistics between Kalman smoothing result and GT-1A filtering result

滤波器	滤波周期T/s	最小差值/mGal	最大差值/mGal	平均差值/mGal	均方差值/mGal	比较点数N
图4a	100	−0.139 0	0.417 9	0.175 9	0.206 7	3 000
图4b	100	−0.139 0	0.417 9	0.175 9	0.206 7	3 000
图5a	60	−0.600 2	0.497 5	−0.003 8	0.174 2	3 000
图5b	60	−0.600 1	0.497 6	−0.003 8	0.174 1	3 000

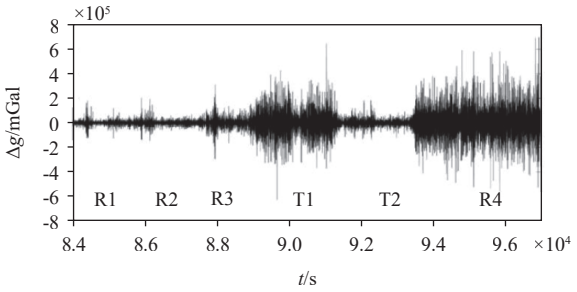
(27) 计算重力异常值; 方案 2, 以 GT-1A 系统获得的 GPS 文件数据 (高程信号h, 采样率 2 Hz) 时间点为基准, 按式 (27) 计算重力异常值。

方案 1 和方案 2 按式 (27) 计算获得的重力异常数据曲线如图 8 所示, 数据中包含大量高频噪声, 需对获得的重力异常计算数据进行滤波处理。滤波试验中, 模型维数取 n=3, 滤波周期为 100 s, 选用平滑滤波器的幅频特性曲线如图 9 所示。图 9a、b 的滤波器幅频特性参数$|H(f_c)|$相同, 但对应模型的数据采样率(采样间隔t_s)、量测噪声序列方差R和系统噪声序列方差Q不同, 滤波器的相关具体参数见表 3。

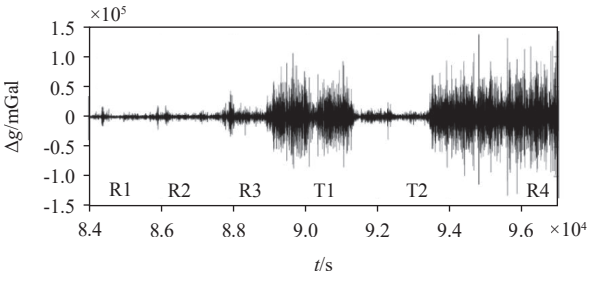
采用上述滤波器 (图 9a、b), 分别对方案 1 和方案 2 获得的航空自由空间重力异常数据进行滤波处理。方案 1 中数据采样率约 18 Hz, 滤波后再将其转换为 2 Hz 数据 (抽样)。方案 1、方案 2 的滤波结果如图 10 所示, 图中 GT-1A 系统滤波结果在转弯处进行了截断处理。方案 1 和方案 2 的卡尔曼平滑滤波结果与 GT-1A 系统滤波结果的差值统计见表 4。

4.4　结果分析

由图 3、图 8 可知, 未滤波自由空间重力异常数据包含大量高频噪声。因高频噪声幅值远大于重力异常信号幅值, 故图 3、图 8 能够反映其自身高频噪声幅值的大体分布情况; Flt005 架次飞行的各测线高频噪声幅值远大于 GTLine3010 测线高频噪声幅值,



(a) 方案 1，F_s≈18 Hz



(b) 方案 2，F_s≈2 Hz

图 8　Flt005 测线航空自由空间重力异常计算数据

Fig. 8　Calculation of airborne gravity anomalies along Flt005 survey line

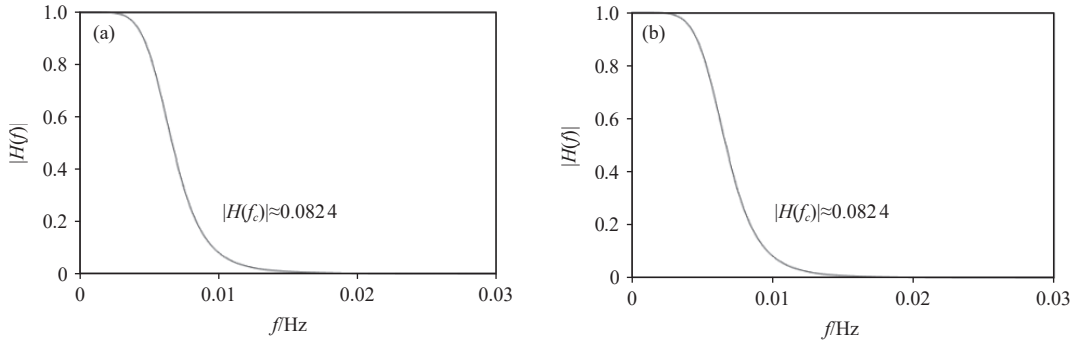


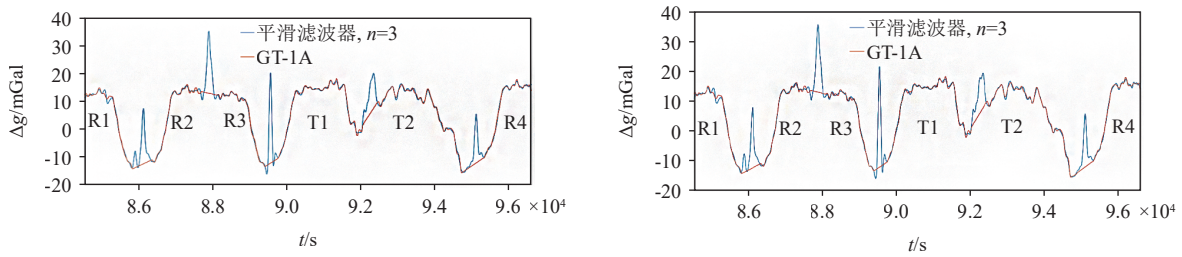
图 9　100 s 滤波器的幅频特性曲线(试验 2)

Fig. 9　Amplitude-frequency characteristic curve of 100 s filter (experiment 2)

表 3　滤波器对应的滤波参数、模型参数和噪声统计特性参数(试验 2)

Table 3　Filters correspond to filter parameters, model parameters and noise statistical characteristic parameters (experiment 2)

滤波器	滤波周期T/s	幅频特性$\|H(f_c)\|$	模型维数n	采样间隔t_s/s	量测噪声R/mGal^2	系统噪声Q/mGal^2
图9a	100	0.082 4	3	0.053 3	$1.847\,8\times10^{9}$	$2.904\,0\times10^{-2}$
图9b	100	0.082 4	3	0.500 0	$2.570\,2\times10^{8}$	0.355 0



(a) 方案 1(图 9a)　　(b) 方案 2(图 9b)

图 10　Flt005 测线平滑滤波器与 GT-1A 系统 100 s 滤波航空自由空间重力异常对比

Fig. 10　Airborne gravity free air anomaly of smoothing filter and GT-1A 100 s filter along Flt005 survey line

表 4　卡尔曼平滑滤波结果与 GT-1A 系统滤波结果的差值统计

Table 4　Difference statistics between Kalman smoothing result and GT-1A filtering result

	测线序号	最小差值/mGal	最大差值/mGal	平均差值/mGal	均方差值/mGal	比较点数N
方案1	R1	−2.153 7	1.563 9	−0.130 2	0.690 2	2 592
	R2	−1.129 7	1.704 3	0.031 6	0.502 8	2 656
	R3	−0.791 5	0.821 2	−0.012 5	0.333 6	2 608
	T1	−1.206 1	1.103 9	−0.036 9	0.422 0	4 575
	T2	−1.733 6	1.059 5	−0.051 6	0.450 6	4 487
	R4	−0.854 7	2.320 9	0.024 9	0.425 9	2 600
方案2	R1	−2.195 1	1.634 9	−0.137 8	0.719 5	2 592
	R2	−1.110 3	1.759 6	0.039 2	0.520 2	2 656
	R3	−0.638 7	0.928 5	−0.014 7	0.362 5	2 608
	T1	−1.225 4	1.166 7	−0.034 7	0.436 6	4 575
	T2	−1.794 0	1.038 9	−0.046 0	0.443 1	4 487
	R4	−0.975 1	1.908 8	0.014 3	0.416 0	2 600

且各测线高频噪声幅值的分布不一致。

由滤波试验 1 可知：①GT-1A 系统获得的 Line3010 测线高频噪声幅值的分布大体一致 (图 3)，故可沿测线整体估算噪声统计特性参数。②平滑滤波器的滤波效果主要取决于其幅频特性参数$|H(f_c)|$数值的大小，而噪声序列方差的估算偏差对滤波效果无影响；从理论上讲，基于频域的滤波器的滤波效果主要由滤波器的幅频特性决定，因此，按本文方法估算的噪声序列方差R和Q，估算结果即使有偏差，也不会对滤波效果产生影响，这也与滤波试验结果一致，如：图 4a、b 与图 5a、b，滤波器中滤波器截止频率f_c和幅频特性参数$|H(f_c)|$相同，估算的噪声特性参数不同，但滤波效果相同 (图 6、图 7，表 2)。③平滑滤波器的滤波结果与 GT-1A 系统滤波结果几乎完全相同，二者均方差值仅为 0.2 mGal 左右，滤波效果好于 FIR 低通滤波结果[29-30]，也好于前期研究滤波试验结果[20]。④由于不同频段测量信号的信噪比不同[8]，100 s 和 60 s 滤波对滤波器幅频特性参数$|H(f_c)|$数值大小的要求也不同 (图 4、图 5)。

通过滤波试验 2，由图 10 和表 4 可知，采用本文设计的 100 s 平滑滤波器 (图 9)，对按方案 1 和方案 2 获得的重力异常计算数据 (图 8) 进行滤波处理，获得沿整段各测线的重力异常值(滤波结果)，它们与 GT-1A 系统 100 s 滤波结果相比，二者均方差值平均分别为 0.47 mGal 和 0.48 mGal。由此可见，方案 1 和方案 2 的重力异常解算精度相当，且远好于研究初期估值结果[16]，并获得与 GT-1A 系统软件同样令人满意的解算精度。理论上，由于采样频率不同，方案 1 相对方案 2 的模型误差较小，由数值微分法获得的载体垂直加速度精度也更高。但在实际计算过程中，方案 1 由于 GPS 文件获得的数据采样率需由 2 Hz 经插值转换到约 18 Hz，插值等其他因素影响了载体垂直加速度的估值精度，进而造成方案 1 与方案 2 的异常解算精度相当。

对于 Flt005 架次飞行来讲，由于各测线高频噪声幅值的分布不一致且幅值较大，相差也较大，要兼顾全局，故滤波器幅频特性参数$|H(f_c)|$的取值要小，所选滤波器与噪声幅值大的区域相匹配。据此可知：R3、T1、T2 和 R4 测线高频噪声的幅值大于 R1 和 R2 测线高频噪声的幅值 (图 8)，故 R3、T1、T2 和 R4 测线的滤波效果要好于 R1 和 R2 测线的滤波效果，这与滤波试验结果相吻合 (表 4)。

综上所述，本文研究、设计的卡尔曼平滑滤波器可在频域实现对测量信号的低通滤波处理，且滤波精度高。基于滤波器截止频率f_c和幅频特性参数$|H(f_c)|$，本文提出的量测噪声序列方差R和系统噪声

序列方差Q的估算方法是可行的。将本文滤波器和重力异常解算方案应用于航空自由空间重力异常解算, 可以获得与 GT-1A 系统软件同样令人满意的解算精度。

滤波试验 2 与滤波试验 1 相比, 不仅涉及滤波本身问题, 还涉及重力异常解算中扰动加速度各项改正, 且 Flt005 架次不同测线重力异常测量数据的高频噪声幅值远大于 GTLine3010 测线重力异常测量数据高频噪声幅值 (图 3、图 8b), 故滤波试验 1 的重力异常滤波结果 (均方差值为 0.2 mGal) 要好于滤波试验 2 的重力异常解算结果 (均方差值平均约 0.47 mGal)。

此外, 从滤波试验 2 重力异常解算结果来看, 因 Flt005 架次不同测线的高频噪声幅值分布不同, 造成 6 条测线重力异常解算精度不同。若想进一步提高重力异常解算精度, 应采用自适应卡尔曼滤波技术解决这一问题, 即让所选滤波器的幅频特性参数随噪声幅值分布的变化而改变。

5　结论

1)本文研究、设计的卡尔曼平滑滤波器可在频域实现对测量信号的低通滤波处理, 且滤波精度高, 可广泛应用于信号处理等领域。试验表明: 对 GT-1A 系统获得的 Line3010 测线原始未滤波自由空间重力异常数据进行滤波处理, 与用 GT-1A 系统软件滤波结果相比, 二者均方差值仅 0.2 mGal 左右。

2)采用低阶泰勒级数展开近似的卡尔曼滤波模型, 数据采样率的提高对减小模型误差将起主要作用, 但同时也要兼顾计算精度和舍入误差等因素的影响。笔者由泰勒级数公式出发, 研究分析了模型误差的主要影响因素, 为提高滤波器的滤波精度提供了理论依据。

3)基于滤波器截止频率f_c和幅频特性参数$|H(f_c)|$, 本文提出的量测噪声序列方差R和系统噪声序列方差Q的估算方法是可行的。笔者根据卡尔曼平滑滤波算法, 推导并给出稳态条件下的平滑滤波器频率响应函数$H(e^{j\omega})$, 为其在频域的应用奠定了理论基础。平滑滤波器的滤波效果主要取决于其幅频特性参数$|H(f_c)|$的数值大小, 而噪声序列方差R和Q的估算偏差对滤波效果无影响。在使用上, 平滑滤波器与传统数字低通滤波器相同。

4)本文提出的重力异常解算方案简单、实用, 无需任何先验信息, 可以获得与 GT-1A 系统软件同样令人满意的重力异常解算精度。对某地 Flt005 架次飞行实测数据进行自由空间重力异常解算, 与用 GT-1A 系统软件处理结果相比, 二者均方差值平均为 0.47 mGal。Flt005 架次各测线的高频噪声幅值大且分布不一致, 而无折返平稳飞行测线的重力异常解算精度会更高 (如 GTLine3010 测线), 这也从另一方面说明了本文设计的平滑滤波器具有良好的适用性。

卡尔曼平滑滤波器设计的关键在于其幅频特性参数$|H(f_c)|$的确定。下一步将重点研究重力异常测量高频噪声分布与所选滤波器幅频特性参数的关联性, 采用自适应卡尔曼滤波技术进行航空自由空间重力异常解算。

参考文献(References):

[1] 熊盛青. 我国航空重磁勘探技术现状与发展趋势 [J]. 地球物理学进展, 2009, 24(1): 113−117.
Xiong S Q. The present situation and development of airborne gravity and magnetic survey techniques in China[J]. Progress in Geophysics, 2009, 24(1): 113−117.

[2] 熊盛青. 航空重力勘探理论方法及应用 [M]. 北京: 地质出版社, 2010.
Xiong S Q. Theoretical method and application of airborne gravity exploration[M]. Beijing: Geological Publishing House, 2010.

[3] 宛家宽, 罗志才, 刘站科. GT-2A 航空重力仪精度评定 [J]. 大地测量与地球动力学, 2017, 37(10): 1096−1100.
Wan J K, Luo Z C, Liu Z K. Evaluating the precision of GT-2A airborne gravimeter measurements[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2017, 37(10): 1096−1100.

[4] 刘站科, 李建成, 肖学年, 等. GT-2A 航空重力仪静态测量实验及性能分析 [J]. 武汉大学学报: 信息科学版, 2019, 44(4): 482−488.
Liu Z K, Li J C, Xiao X N, et al. Static measurement experiment and performance analysis of GT-2A airborne gravimeter[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2019, 44(4): 482−488.

[5] 罗锋, 王冠鑫, 周锡华, 等. 三轴稳定平台式航空重力测量数据处理方法研究与实现 [J]. 物探与化探, 2019, 43(4): 872−880.
Luo F, Wang G X, Zhou X H, et al. Research and implementation of data processing method for the three-axis stabilized platform airborne gravity measuring system[J]. Geophysical and Geochemical Exploration, 2019, 43(4): 872−880.

[6] 胡平华, 周锡华, 姜作喜, 等. 三轴惯性平台式航空重力仪机载重力测量试验研究 [J]. 导航定位与授时, 2021(3): 81−89.
Hu P H, Zhou X H, Jiang Z X, et al. Airborne gravity survey experiments of the three-axis inertial platform gravimeter[J]. Navigation Positioning and Timing, 2021(3): 81−89.

[7] 曾华霖. 重力场与重力勘探 [M]. 北京: 地质出版社, 2005.
Zeng H L. Gravity field and gravity exploration[M]. Beijing: Geological Publishing House, 2005.

[8] 王静波, 熊盛青, 罗锋, 等. 航空重力测量数据的小波滤波处理 [J]. 物探与化探, 2020, 44(2): 300−312.

Wang J B, Xiong S Q, Luo F, et al. Wavelet filter processing in airborne gravimetry[J]. Geophysical and Geochemical Exploration, 2020, 44(2): 300−312.

[9] 孙中苗, 石磐, 夏哲仁, 等. 利用 GPS 和数字滤波技术确定航空重力测量中的垂直加速度 [J]. 测绘学报, 2004, 33(2): 110−115.
Sun Z M, Shi P, Xia Z R, et al. Determination of vertical acceleration in airborne gravity measurement by GPS and digital filtering technology[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2004, 33(2): 110−115.

[10] Kennedy S L. Acceleration estimation from GPS carrier phase for airborne gravimetry[D]. Calgary: Department of Geomatics Engineering at the University of Calgary, 2002.

[11] 孙中苗, 夏哲仁. FIR 低通差分器的设计及其在航空重力测量中的应用 [J]. 地球物理学报, 2000, 43(6): 850−855.
Sun Z M, Xia Z R. Design of FIR lowpass differentiator and its applications in airborne gravimetry[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2000, 43(6): 850−855.

[12] 孙中苗. 航空重力测量理论、方法及应用研究 [D]. 郑州: 解放军信息工程大学, 2004.
Sun Z M. Theory, methods and applications of airborne gravimetry[D]. Zhengzhou: PLA Information Engineering University, 2004.

[13] Bruton A M. Improving the accuracy and resolution of SINS/DGPS airborne gravimetry[D]. Calgary: Department of Geomatics Engineering at University of Calgary, 2000.

[14] 孙中苗, 夏哲仁, 石磐, 等. 航空重力测量数据的滤波与处理 [J]. 地球物理学进展, 2004, 19(1): 119−124.
Sun Z M, Xia Z R, Shi P, et al. Filtering and processing for the airborne gravimetry data[J]. Progress in Geophysics, 2004, 19(1): 119−124.

[15] 王静波. 航空重力测量数据处理方法技术研究 [D]. 北京: 中国地质大学(北京), 2010.
Wang J B. Methodologies and technology of data processing for airborne gragimetry[D]. Beijing: China University of Geosciences(Beijing), 2010.

[16] 王静波, 熊盛青, 郭志宏, 等. 航空重力异常估计方法研究 [J]. 物探与化探, 2011, 35(4): 493−498.
Wang J B, Xiong S Q, Guo Z H, et al. Research on methods of estimating airborne gravity anomaly[J]. Geophysical and Geochemical Exploration, 2011, 35(4): 493−498.

[17] 蔡体菁, 周薇, 鞠玲玲. 平台式重力仪测量数据的卡尔曼滤波处理 [J]. 中国惯性技术学报, 2015, 23(6): 718−720, 726.
Cai T J, Zhou W, Ju L L. Processing for measurement data of platform gravimeter by Kalman filter[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2015, 23(6): 718−720, 726.

[18] 郑崴, 张贵宾. 自适应卡尔曼滤波在航空重力异常解算的应用研究 [J]. 地球物理学报, 2016, 59(4): 1275−1283.
Zheng W, Zhang G B. Application research on adaptive Kalman filtering for airborne gravity anomaly determination[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2016, 59(4): 1275−1283.

[19] 蔡体菁, 颜颖, 王新宇. 捷联航空重力测量中的卡尔曼滤波 [J]. 压电与声光, 2019, 41(3): 436−439.
Cai T J, Yan Y, Wang X Y. Kalman filtering of strapdown airborne gravity measurement[J]. Piezoelectrics & Acoustooptics, 2019, 41(3): 436−439.

[20] 王静波, 熊盛青, 郭志宏, 等. 航空重力数据 Kalman 滤波平滑技术应用研究 [J]. 地球物理学进展, 2012, 27(4): 1717−1722.
Wang J B, Xiong S Q, Guo Z H, et al. Kalman smoothing for airborne gravity data[J]. Progress in Geophysics, 2012, 27(4): 1717−1722.

[21] 秦永元. 卡尔曼滤波与组合导航原理 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1998.
Qin Y Y. Kalman filter and integrated navigation principle[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 1998.

[22] 王静波, 熊盛青, 罗锋, 等. 基于时域与频域的卡尔曼平滑滤波方法及平滑滤波器: CN202110411002. X[P]. 2023-03-21.
Wang J B, Xiong S Q, Luo F, et al. Kalman smoothing filtering method and smoothing filter based on time domain and frequency domain: CN202110411002. X[P]. 2023-03-21.

[23] 程佩青. 数字信号处理教程——经典版 [M]. 4 版. 北京: 清华大学出版社, 2015.
Cheng P Q. Digital signal processing course-classic edition[M]. 4th ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2015.

[24] The Math Works Inc. MATLAB R2016b. ©1984-2016[R].

[25] 张虹, 周能, 邓肖丹, 等. 国外航空重力测量与数据处理技术最新进展 [J]. 物探与化探, 2019, 43(5): 1015−1022.
Zhang H, Zhou N, Deng X D, et al. The latest progress in air gravity measurement and data processing technology abroad[J]. Geophysical and Geochemical Exploration, 2019, 43(5): 1015−1022.

[26] Timothy Sauer. 数值分析 [M]. 裴玉茹, 马赓宇, 译. 北京: 机械工业出版社, 2014.
Timothy Sauer. Numerical analysis[M]. Pei Y R, Ma G Y, Tr. Beijing: China Machine Press, 2014.

[27] 薛定宇. 高等应用数学问题的 MATLAB 求解 [M]. 4 版. 北京: 清华大学出版社, 2018.
Xue D Y. Advanced applied mathematical problem solutions with MATLAB[M]. 4th ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2018.

[28] 陈玉东. 地球物理信息处理基础 [M]. 北京: 地质出版社, 2006.
Chen Y D. Fundamentals of geophysical information processing[M]. Beijing: Geological Publishing House, 2006.

[29] 郭志宏, 罗锋, 安战锋. 航空重力数据窗函数法 FIR 低通数字滤波试验 [J]. 物探与化探, 2007, 31(6): 568−571, 576.
Guo Z H, Luo F, An Z F. Experimental researches on fir lowpass digital filters based on window functions of airborne gravity data[J]. Geophysical and Geochemical Exploration, 2007, 31(6): 568−571, 576.

[30] 罗锋, 郭志宏, 骆遥, 等. 航空重力数据的等波纹 FIR 低通滤波试验 [J]. 物探与化探, 2012, 36(5): 856−860.
Luo F, Guo Z H, Luo Y, et al. Experimental researches on FIR lowpass filter based on equiripple[J]. Geophysical and Geochemical Exploration, 2012, 36(5): 856−860.

[31] 王静波, 熊盛青, 郭志宏, 等. 航空重力数据样条平滑滤波试验研究 [J]. 地球物理学进展, 2013, 28(2): 585−589.
Wang J B, Xiong S Q, Guo Z H, et al. Spline smoothing for airborne gravity data[J]. Progress in Geophysics, 2013, 28(2): 585−589.

[32] 郭志宏, 罗锋, 王明, 等. 航空重力数据无限脉冲响应低通数字滤波器设计与试验研究 [J]. 地球物理学报, 2011, 54(8): 2148−2153.
Guo Z H, Luo F, Wang M, et al. The design and experiment of IIR lowpass digital filters for airborne gravity data[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2011, 54(8): 2148−2153.

Technical research on frequency-domain-based Kalman smoothing filtering for airborne gravity data processing

WANG Jing-Bo [1], XIONG Sheng-Qing [2], LUO Feng [2], GUO Zhi-Hong [2], ZHOU Xi-Hua [2], WANG Guan-Xin [2]
(1. *College of sciences*, *North China University of Technology*, *Beijing* 100144, *China*; 2. *China Aero Geophysical Survey and Remote Sensing Center for Natural Resources*, *Beijing* 100083, *China*)

Abstract: The Kalman filtering represents a time-domain filtering method based on dynamic models. Its frequency-domain implementation emerges as a key technique for airborne gravity data processing. In light of this, this study explored and designed a frequency-domain-based Kalman smoothing filter based on the Kalman filter model established previously by the authors through approximation using a low-order Taylor series expansion. First, using the Taylor series formula, the impacts of signal amplitude, signal frequency, data sampling rate, and model dimension on model errors were analyzed. The frequency response function $H(e^{j\omega})$ of the Kalman smoothing filter under steady-state conditions was then derived using the general Kalman smoothing filtering algorithm. Subsequently, based on the cutoff frequency f_c and amplitude-frequency response parameter $|H(f_c)|$ of the smoothing filter, a method was proposed to determine the statistical parameters of systematic and measurement noise. This method aims to estimate the variances of the systematic and measurement noise series. Measured data from a certain area were processed using the filter proposed in this study and the scheme for solving gravity anomalies. The results were compared with those derived using the GT-1A system software, yielding an average mean square error (MSE) of 0.47 mGal.

Key words: airborne gravimetry; Kalman filtering; numerical differentiation; model error; atistical parameter of noise

（本文编辑: 王萌, 沈效群）