考虑双界面滑移的三层组合梁非线性有限元分析

邓继华[1]　盛希凯[1]　彭建新[1]　王　磊[1]　邵旭东[2]

1. 长沙理工大学，湖南长沙 410114
2. 湖南大学，湖南长沙 410082

摘要：以三层组合梁为研究对象，开展考虑双界面滑移的几何非线性有限元分析方法的研究。首先，基于三层组合梁的弹性力学基本方程，即平衡、几何以及物理方程，建立其位移控制微分方程，利用直接刚度法推导出局部坐标系(共旋坐标系)下具有“精确”特点的几何线性单元刚度矩阵，其中离散的柔性抗剪连接件用连续界面黏结滑移模型模拟；其次，利用几何非线性分析的共旋坐标法导出结构坐标系与局部坐标系(共旋坐标系)之间的转换矩阵，建立结构坐标系下三层组合梁单元的几何非线性切线刚度矩阵，对应的等效节点力矩阵可同时求得；最后，针对实际工程中施加于三层组合梁的集中力作用点以及边界约束点与有限元模型节点不一致而导致的偏心效应，该文采用刚臂以及力等效的原则予以考虑。综合上述成果建立三层组合梁考虑双界面滑移的几何非线性有限元分析方法，研制出相应程序，对三个典型三层组合梁算例进行分析，与已有文献计算及试验结果的对比验证该文方法及程序的正确性与可靠性。

关键词：三层组合梁；几何非线性；双界面滑移；共旋坐标法；精确单元刚度矩阵

中图分类号：TU378.2　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**1000-131X(2026)01-0061-15

DOI：10.15951/j.tmgcxb.24060515

Nonlinear finite element analysis of a three-layer composite beam considering double interface slip

Deng Jihua[1]　*Sheng Xikai*[1]　*Peng Jianxin*[1]　*Wang Lei*[1]　*Shao Xudong*[2]

1. *Changsha University of Science & Technology*, *Changsha* 410114, *China*
2. *Hunan University*, *Changsha* 410082, *China*

Abstract: Taking three-layer composite beams as the research object, the finite element analysis method considering the geometric nonlinearity of double interface slip is studied. Firstly, the displacement governing differential equation of the three-layer composite beam is established based on the basic equations of elasticity, namely equilibrium, geometry and physics equations. The geometric linear element stiffness matrix with “precise” characteristics in local coordinate system (co-rotation coordinate system) is derived by direct stiffness method. Secondly, the transformation matrix between the structural coordinate system and the local coordinate system is derived by the co-rotation coordinate method of geometric nonlinear analysis, and the geometric nonlinear tangential stiffness matrix of the three-layer composite beam element under the structural coordinate system is established, and the corresponding equivalent node force matrix can be obtained simultaneously. Finally, the rigid arm and force equivalence principle are used to consider

基金项目：国家自然科学基金(52278142)、湖南省自然科学基金(2023JJ30019)和桥梁结构健康与安全国家重点实验室开放基金(BHSKL21-06-GF)

作者简介：邓继华，博士，教授　　**收稿日期：**2024-06-27

中国知网 https://www.cnki.net

the eccentricity effect caused by the inconsistency between the point of concentrated force applied to the three-layer composite beam & the boundary constraint point and the node of the finite element model. Based on the above results, a finite element analysis method for three-layer composite beams considering geometric nonlinearity of double-interface slip is established, and the corresponding program is developed. Three typical examples of three-layer composite beams are analyzed, and the correctness and reliability of the proposed method and the developed program are verified by comparing with the calculation and test results of existing literatures.

Keywords: three-layer composite beam; geometric nonlinearity; double interface slip; co-rotational coordinate method; precise element stiffness matrix

E-mail: jihuadeng@ csust. edu. cn

0 引　　言

组合梁一般由界面处的抗剪连接件将不同材料制成的构件连接而成，相对于单层梁而言，组合梁能充分发挥不同材料的优势因而具有更优异的力学性能[1-3]。除了常规的以钢-混凝土组合梁为代表的双层组合梁以外，三层以及多层的组合梁在工程实践中应用也比较广泛，如钢-混凝土-钢夹层梁[4-6]、GFRP-钢-混凝土组合梁[7]、UHPC-NC-UHPC 组合梁[8]以及钢-NC-UHPC 组合梁[9]等。由于完全刚性的抗剪连接件在实际组合梁中难以实现，层间界面滑移因此不可避免[10-11]，已有研究表明，界面滑移对组合梁受弯承载力影响较小，对组合梁的刚度则有一定程度的降低[12-13]，并且相对于同等跨径的单层梁而言组合梁的截面尺寸减小，在横向及轴向荷载作用下会呈现出一定的几何非线性；因此，在进行组合梁受力性能研究中必须考虑界面滑移与几何非线性效应，而这也是建立组合梁有限元分析方法的热点和难点[14-16]，相对于双层组合梁而言，三层组合梁中由于层数增多而导致滑移界面增加使得这一问题趋向于更复杂[17]。

在考虑界面滑移的组合梁有限元分析方法中，在单个梁层里如果仍采用常规的梁单元形函数，即单元内部轴向位移和横向位移分别采用位置坐标的一次和三次插值函数，在界面抗剪刚度趋向无穷大时会出现所谓的滑移或曲率闭锁，Ranzi 等[18]对此有详细论述。为避免出现上述滑移或曲率闭锁，在双层组合梁的研究中主要有以下三种方法：一是基于应变[19]、力[20]或混合[21]插值的方式构建有限元模型；二是基于分析无界面滑移效应层合梁的高阶剪切变形理论[22]建立的高阶组合梁分析方法[23]，该方法在保证组合梁每个梁层不出现剪切闭锁的同时，能准确计算出截面实际呈抛物线变化分布的剪应力，无需像铁摩辛柯梁要依据截面形状引入剪切修正因子，同时也满足梁顶、底面无剪应力条件，因此还被后续研究者用于组合梁的屈曲[24]、动力[25]以及几何非线性[26]分析；三是直接从 Newmark 方程[27]或弹性力学平衡方程出发，利用直接刚度法推导出所谓的“精确”组合梁单元刚度矩阵，从源头上避免了单元内部由于各种变量场假定不一致而可能带来的滑移、曲率闭锁问题[28-31]。对三层组合梁而言，考虑界面滑移的研究与双层组合梁的基本相同，Mosa 等[32]采用每个节点有 5 个自由度的一维梁单元模拟 Stobie 杆，比常规梁单元多出的两个自由度用于模拟层间滑移，建立了考虑部分剪切相互作用的锥形三层夹层杆计算模型，该模型后续经过拓展还被用于此类结构的几何非线性分析[33]与动力分析[34]。Lin 等[35]通过先引入内部自由度后再将其静力凝聚掉的方式来避免由于基于位移有限元而易出现的滑移闭锁问题，在此基础上进行考虑界面滑移的三层组合梁静动力分析。Fortuna 等[36]针对具有层间滑移及指接的多层组合梁建立了完全基于应变插值的有限元列式，该有限元列式基于 Reissner 等[37]建立的梁理论并利用修正的虚功原理推导而得，计算分析表明该有限元列式能完全消除滑移闭锁和剪切闭锁。Keo 等[38]基于弹性力学基本原理建立了以滑移和剪切变形为主要变量的一组耦合微分方程组，对其解析求解，进而利用直接刚度法求得“精确”三层或多层组合梁单元刚度矩阵。应该讲，在组合梁中仅考虑界面滑移影响的有限元分析方法已经比较成熟。

在组合梁的几何非线性分析研究方面，目前研究三层组合梁的文献很少，且大都采用解析或半解析的方法[39-41]，在采用有限元方法方面，Kim 等[42]

中国知网 https://www.cnki.net

从连续介质力学梁单元理论出发，先建立考虑层间滑移的多层组合梁非线性运动学，再建立多层组合梁的几何与位移插值函数，最终建立起多层组合梁几何非线性有限元分析的 TL 列式。与之相比，从有限元角度研究双层组合梁几何非线性的文献相对较多，采用的也是 TL、CR 法等常用的几何非线性列式方法。Sousa 等[43]通过在应变-位移关系中考虑非线性二次项来考虑几何非线性，建立了基于伯努利梁理论的双层组合梁几何非线性分析的 TL 列式，该列式还在 Sousa 等[43]开展的后张预应力钢混组合梁非线性有限元分析中得到应用。Ranzi 等[45]基于几何精确理论，在物体运动为小应变和中等转动的前提下，同样通过考虑非线性应变二次项来考虑几何非线性，建立了考虑滑移与掀起效应的组合梁几何非线性有限元分析的 TL 列式。与 TL、UL 法研究几何非线性分析时其列式与几何线性刚度矩阵推导的假定及过程紧密相关不同，基于 CR 法的几何非线性分析列式与几何线性刚度矩阵推导完全无关，换言之，只要单元拥有的节点数以及每个节点所含的自由度相同，则将几何线性刚度矩阵转换为几何非线性刚度矩阵的过程及所需的转换矩阵是完全一致的，这将大大减小相关研究的难度和工作量[46-47]。据此，Krawczyk 等[15]利用精确解析单元刚度、Battini 等[16]则利用经过静力缩聚的阶谱单元刚度，分别作为共旋坐标系下的单元局部刚度矩阵，利用共旋法推导出能进行双层组合梁大变形与大转动分析的几何非线性单元刚度矩阵，其中前者为能克服滑移闭锁的伯努利梁单元，后者为能克服滑移闭锁和剪切闭锁的铁摩辛柯梁单元。具有良好性能的高阶梁理论几何线性单元[23]也基于共旋法被拓展用于几何非线性并材料非弹性分析[26]，Lemes 等[48]对几何非线性与材料非线性分别采用共旋法和塑性铰法，建立了钢-混组合梁非线性分析的数值方法，Oeng 等[49]同时考虑滑移与掀起效应，基于共旋法建立了两层组合梁-柱的大位移分析方法，陈亮[50]基于共旋法建立了双层组合梁考虑几何非线性与收缩徐变等长期效应的同步算法。应当指出的是，如上述尽管基于 CR 法开展双层组合梁非线性研究的文献比较多，但将其用于三层组合梁非线性研究的文献笔者尚未见到。

鉴于此，在学习上述相关文献的基础上，本文首先以 Keo 等[38]推导的考虑各梁层剪切变形的多层组合梁几何线性单元再结合伯努利梁理论，推导出局部坐标系(共旋坐标系)下三层组合梁不考虑梁层剪切变形的几何线性单元刚度矩阵，再改进双层组合梁共旋法[15-16]中间变量求解方法存在的不足并将其拓展用于三层组合梁，最终建立基于 CR 法并考虑双界面滑移的三层组合梁非线性有限元分析方法，基于 Fortran 语言研制了相应程序，并用三个典型算例验证了本文算法及程序的正确性与适用性。

1 局部坐标系下三层组合梁单元刚度矩阵

1.1 弹性力学方程

1.1.1 基本假设

(1) 基于欧拉-伯努利梁理论，即各梁层变形前后均满足平截面假定，不考虑剪切变形。

(2) 各梁层横向位移 v 和转角 θ 相同，轴向位移 u 由于相邻梁层间的滑移而不相同。

(3) 离散的剪力连接键用连续界面黏结滑移模型模拟。

(4) 基于共旋坐标法考虑几何非线性的基本原则[51]，几何非线性通过各变量在共旋坐标系与结构坐标系之间的转换矩阵予以实现，共旋坐标系内则仍采用小变形假定。

1.1.2 平衡方程

如图 1 所示为三层组合梁的一个微段，对每一梁层的受力进行微分，可得以下平衡方程(图中力和力矩的方向参照文献[30]，以保证前后推导一致)：

$$\begin{cases} \partial_x \overline{N}_{\mathrm{a}} + D_{\mathrm{sc}_1} = 0 \\ \partial_x \overline{N}_{\mathrm{b}} - D_{\mathrm{sc}_1} + D_{\mathrm{sc}_2} = 0 \\ \partial_x \overline{N}_{\mathrm{c}} + D_{\mathrm{sc}_2} = 0 \\ \partial_x \overline{M} + \overline{T} + \sum_{k=1}^{2} D_{\mathrm{sc}_k} h_k = 0 \\ \partial_x \overline{T} + p_{\mathrm{y}} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

式中：$\partial_x \bullet = \mathrm{d}\bullet/\mathrm{d}x$ (此式在全文的公式推导中都适用)，$\overline{T} = \overline{T}_{\mathrm{a}} + \overline{T}_{\mathrm{b}} + \overline{T}_{\mathrm{c}}$，$\overline{M} = \overline{M}_{\mathrm{a}} + \overline{M}_{\mathrm{b}} + \overline{M}_{\mathrm{c}}$，$\overline{N}_i$、$\overline{M}_i$、$\overline{T}_i$($i=a$，$b$，$c$)分别为第 i 梁层形心处的轴向力、弯矩与剪力(在力变量上加上横线‘-’是表示为局部坐标系下的值，以下类同)，$h_1 = b_{\mathrm{a}} + t_{\mathrm{b}}$与 $h_2 = b_{\mathrm{b}} + t_{\mathrm{c}}$分别为梁层 a 与 b 以及 b 与 c 的形心轴距离(t_i和 b_i分别是第 i 梁层形心轴到该梁层上表面和下表面的距离，详见图 2)，D_{sc_i}($i=1$，2)为界面上单位长度的水平剪力，p_{y}为施加的外荷载。

1.1.3 几何方程

图 2 为局部坐标系下三层组合梁变形协调关系示意图。基于前述基本假设(1)和(2)，各梁层的轴向应变 ε_i和曲率 κ 可以用轴向位移 $\overline{u}_i$、转角 $\overline{\theta}$以及横向位移 $\overline{v}$表示为：

中国知网 https://www.cnki.net

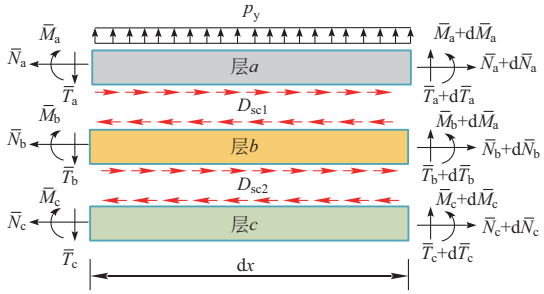


图 1　三层组合梁微段受力图

Fig. 1　Force diagram for microsegment of three-layer composite beam

$$\begin{cases}\varepsilon_i=\partial_x\bar{u}_i, & i=a,\ b,\ c\\ \kappa=\partial_x\bar{\theta}=\partial_x^2\bar{v}\end{cases}\tag{2}$$

层间滑移 $\bar{g}_k(k=1,\ 2)$ 可认为是上下相邻梁层在连接界面上的轴向位移差，有：

$$\begin{cases}\bar{g}_1=\bar{u}_b-\bar{u}_a-h_1\bar{\theta}\\ \bar{g}_2=\bar{u}_c-\bar{u}_b-h_2\bar{\theta}\end{cases}\tag{3}$$

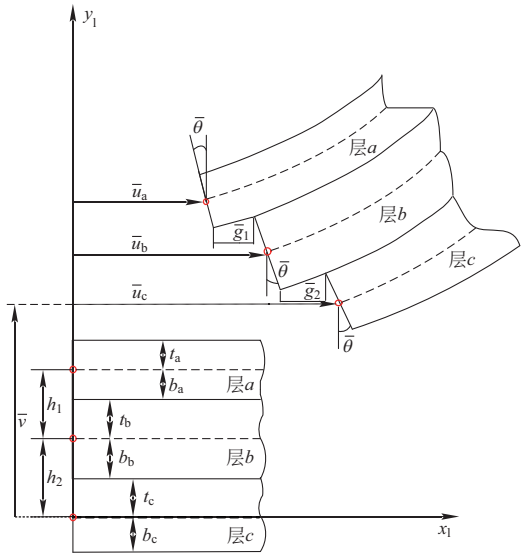


图 2　三层组合梁变形协调关系示意图

Fig. 2　Diagram of deformation coordination of three-layer composite beam

1.1.4　本构方程

基于线弹性假设对每个截面进行积分运算，可以得到广义的应力-应变关系：

$$\begin{cases}N_i=\int_{A_i}\sigma\mathrm{d}A_i=(EA)_i\varepsilon_i, & i=a,\ b,\ c\\ M_i=-\int_{A_i}y\sigma\mathrm{d}A_i=E_iI_i\kappa, & i=a,\ b,\ c\end{cases}\tag{4}$$

式中：$(EA)_i=E_iA_i$ 为第 i 梁层的轴向刚度，E_i、A_i、$I_i(i=a,\ b,\ c)$ 分别是第 i 梁层的弹性模量、面积和惯性矩（为与前面 $\bar{M}=\bar{M}_a+\bar{M}_b+\bar{M}_c$ 对应，也为后续表示方便，在后续表达中将 $E_aI_a+E_bI_b+E_cI_c$ 用 EI_0 表示）。

各梁层通过离散的剪力连接键连接形成一个整体的三层组合梁，计算中将离散的柔性抗剪连接键用连续界面黏结滑移模型模拟，参照已有文献[10,16]，假定剪力 D_{sc} 与界面滑移 $\bar{g}$ 之间存在线性关系：

$$D_{sc_k}=k_{sc_k}\bar{g}_k,\qquad k=1,\ 2\tag{5}$$

式中：k_{sc_k} 为相邻梁层结合面的抗剪刚度。

1.2　控制微分方程

联立几何方程式(2)及本构方程式(4)，并将结果代入平衡方程式(1)，可得到欧拉伯努利梁理论下各梁层的控制方程，有：

$$\begin{cases}\partial^2\bar{u}_i=\dfrac{(k_{sc_{i-1}}\bar{g}_{i-1}-k_{sc_i}\bar{g}_i)}{(EA)_i}, & i=a,\ b,\ c\\ \partial_x^3\bar{v}=-\dfrac{1}{EI_0}\sum\limits_{k=1}^{2}D_{sc_k}h_k-\dfrac{\bar{T}}{EI_0}\\ \partial_x^2\bar{\theta}=\partial_x^3\bar{v}=-\dfrac{1}{EI_0}\sum\limits_{k=1}^{2}D_{sc_k}h_k-\dfrac{\bar{T}}{EI_0}\end{cases}\tag{6}$$

应当强调的是，式(6)中当 i 分别取值为 a、b、c 时，$k_{sc_{i-1}}$ 与 k_{sc_i} 相对应取 k_{sc_0} 与 k_{sc_1}、k_{sc_1} 与 k_{sc_2}、k_{sc_2} 与 k_{sc_3}；同理，$\bar{g}_{i-1}$ 与 $\bar{g}_i$ 也对应取 $\bar{g}_0$ 与 $\bar{g}_1$、$\bar{g}_1$ 与 $\bar{g}_2$、$\bar{g}_2$ 与 $\bar{g}_3$，不过因为 k_{sc_0}、k_{sc_3}、$\bar{g}_0$ 与 $\bar{g}_3$ 实际并不存在，在程序计算时可赋 0 值。

对滑移方程(3)进行求导可以得出以下二阶微分方程：

$$\partial^2\bar{g}_i=\alpha_ik_{sc_i}\bar{g}_i-\beta_ik_{sc_{i-1}}\bar{g}_{i-1}-\beta_{i+1}k_{sc_{i+1}}\bar{g}_{i+1}+\sum_{i=1}^{2}h_iD_{sc_i}a_i+h_i\frac{\bar{T}}{EI_0}\quad i=1,\ 2,\ 3\tag{7}$$

式中：$\alpha_1=\dfrac{1}{(EA)_a}+\dfrac{1}{(EA)_b}$；$\alpha_2=\dfrac{1}{(EA)_b}+\dfrac{1}{(EA)_c}$；$\beta_1=-\dfrac{1}{(EA)_a}$；$\beta_2=-\dfrac{1}{(EA)_b}$；$\beta_3=-\dfrac{1}{(EA)_c}$；$a_1=\dfrac{h_1}{EI_0}$；$a_2=\dfrac{h_2}{EI_0}$。与式(6)第一行类似，计算时可将 α_3、k_{sc_4}、β_4、$\bar{g}_4$、h_3 赋 0 值。

1.3　局部坐标系下精确单元刚度矩阵

为了简化计算，将式(7)中的系数用矩阵的形式表示，有：

$$\partial^2\bar{\boldsymbol{g}}=\boldsymbol{A}_1\bar{\boldsymbol{g}}+\boldsymbol{A}_2\bar{\boldsymbol{g}}+\boldsymbol{H}\frac{\bar{T}}{EI_0}\tag{8}$$

式中：$\boldsymbol{H}=[h_1\quad h_2]^{\mathrm{T}}$；$\bar{\boldsymbol{g}}=[\bar{g}_1\quad \bar{g}_2]^{\mathrm{T}}$；

中国知网 https://www.cnki.net

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} k_{sc_1}\alpha_1 & k_{sc_2}\beta_2 \\ k_{sc_1}\beta_2 & k_{sc_2}\alpha_2 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix} \dfrac{h_1^2k_{sc_1}}{EI_0} & \dfrac{h_1h_2k_{sc_2}}{EI_0} \\ \dfrac{h_2h_1k_{sc_1}}{EI_0} & \dfrac{h_2^2k_{sc_2}}{EI_0} \end{bmatrix}。$$

令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2$，有：

$$\partial^2\overline{\boldsymbol{g}}=\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{g}}+\boldsymbol{H}\frac{\overline{T}}{EI_0} \tag{9}$$

分别用 $\boldsymbol{A}_v$ 和 $\boldsymbol{A}_\lambda$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量和特征值矩阵，则式(9)可以表示为：

$$\partial^2\tilde{\boldsymbol{g}}-\boldsymbol{A}_\lambda\tilde{\boldsymbol{g}}=\overline{\boldsymbol{H}}\frac{\overline{T}}{EI_0} \tag{10}$$

式中：$\tilde{\boldsymbol{g}}=\boldsymbol{A}_v^{-1}\overline{\boldsymbol{g}}$；$\boldsymbol{A}_\lambda=\boldsymbol{A}_v^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_v$；$\overline{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{A}_v^{-1}\boldsymbol{H}$。

进一步将式(10)进行拆分，有：

$$\partial^2\tilde{g}_i-\lambda_i\tilde{g}_i=\overline{H}_i\frac{\overline{T}}{EI_0},\quad i=1,\ 2 \tag{11}$$

式中：λ_i 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；$\tilde{g}_i$ 和 $\overline{H}_i$ 分别为向量 $\tilde{\boldsymbol{g}}$ 和 $\overline{\boldsymbol{H}}$ 的子项。

为适应整体的平衡条件，参照文献[10]和[16]，假定剪切力 T 沿 x 轴方向呈线性分布，有：

$$\overline{T}(x)=-p_y x+Q_{10} \tag{12}$$

式中：Q_{10} 为常数项，表示梁左侧的剪切力。

求式(11)的通解 $\tilde{g}_1$ 与 $\tilde{g}_2$，再参照式(8)的方式整合，有：

$$\tilde{\boldsymbol{g}}=\boldsymbol{X}_{\tilde{g}}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{Z}_{\tilde{g}} \tag{13}$$

式中：$\tilde{\boldsymbol{g}}=[\tilde{g}_1\quad \tilde{g}_2]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{C}=[lC_1\quad C_2\quad \cdots\quad C_{10}]^{\mathrm{T}}$。

$$\boldsymbol{X}_{\tilde{g}}=\begin{bmatrix} e^{\sqrt{\lambda_1(x-L)}} & 0 \\ e^{-\sqrt{\lambda_1 x}} & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{\lambda_2(x-L)}} \\ 0 & e^{-\sqrt{\lambda_2 x}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dfrac{-\overline{H}_1}{\lambda_1 EI_0} & \dfrac{-\overline{H}_2}{\lambda_2 EI_0} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{Z}_{\tilde{g}}=\frac{p_y x}{EI_0}\begin{bmatrix} \dfrac{\overline{H}_1}{\lambda_1} & \dfrac{\overline{H}_2}{\lambda_2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

C_1、…、C_{10} 需要由边界条件确定，计算过程见下文式(17)。

联立式(9)、式(10)和式(13)可得：

$$\overline{\boldsymbol{g}}=\boldsymbol{X}_{\mathrm{g}}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{Z}_{\mathrm{g}} \tag{14}$$

式中：$\boldsymbol{X}_{\mathrm{g}}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{v}}\boldsymbol{X}_{\tilde{g}}$；$\boldsymbol{Z}_{\mathrm{g}}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{v}}\boldsymbol{Z}_{\tilde{g}}$。

将式(14)代入式(6)，积分并化简，可得到各个位移分量的精确表达式，有：

$$\begin{cases} \overline{u}_i=\boldsymbol{X}_{\mathrm{u},i}\boldsymbol{C}+Z_{\mathrm{u},i}, & i=a,\ b,\ c \\ \overline{v}=\boldsymbol{X}_{\mathrm{v}}\boldsymbol{C}+Z_{\mathrm{v}} \\ \overline{\theta}=\boldsymbol{X}_{\theta}\boldsymbol{C}+Z_{\theta} \end{cases} \tag{15}$$

式中：

$$\boldsymbol{X}_{\mathrm{u,a}}=-\frac{k_{sc_1}}{(EA)_{\mathrm{a}}}\int\left(\int\boldsymbol{X}_{\mathrm{g1}}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x+\boldsymbol{\Gamma}_8x+\boldsymbol{\Gamma}_9;$$

$$\boldsymbol{X}_{\mathrm{u,b}}=\boldsymbol{X}_{\mathrm{g}_1}+\boldsymbol{X}_{\mathrm{u,a}}+h_1\boldsymbol{X}_{\theta};$$

$$\boldsymbol{X}_{\mathrm{u,c}}=\boldsymbol{X}_{\mathrm{g}_2}+\boldsymbol{X}_{\mathrm{u,b}}+h_2\boldsymbol{X}_{\theta};$$

$$\boldsymbol{X}_{\mathrm{v}}=\int\left(\int\left(\int\left(-\frac{-\boldsymbol{\Gamma}_{10}}{EI_0}-\sum_{k=1}^{2}\frac{h_{\mathrm{k}}\boldsymbol{X}_{\mathrm{g}}}{EI_0}ksc_k\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x+\boldsymbol{\Gamma}_5\frac{x^2}{2}+\boldsymbol{\Gamma}_6x+\boldsymbol{\Gamma}_7;$$

$$\boldsymbol{X}_{\theta}=\partial\boldsymbol{X}_{v}。$$

上述各式中包含的 $\boldsymbol{\Gamma}_i(i=1,\ \cdots,\ 10)$ 为第 i 个元素值等于 1 的 10 阶列向量，如 $\boldsymbol{\Gamma}_5=[0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$。

式(15)中 $Z_{\mathrm{u},i}$、Z_{v} 和 Z_{θ} 是由外荷载作用所产生的，其表达式有：

$$\begin{cases} Z_{\mathrm{u,a}}=-\dfrac{k_{sc_1}}{(EA)_1}\displaystyle\int\left(\int Z_{\mathrm{g}_1}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x \\ Z_{\mathrm{u,b}}=Z_{\mathrm{g}_1}+Z_{\mathrm{u,a}}+h_1Z_{\theta} \\ Z_{\mathrm{u,c}}=Z_{\mathrm{g}_2}+Z_{\mathrm{u,b}}+h_2Z_{\theta} \\ Z_{\mathrm{v}}= \\ \displaystyle\int\left(\int\left(\int\left(\frac{p_y x}{EI_0}-\sum_{j=1}^{2}\frac{h_j}{EI_0}k_{sc_j}Z_{\mathrm{g}_j}\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x \\ Z_{\theta}=\partial Z_{\mathrm{v}} \end{cases} \tag{16}$$

如图 3 所示，设局部坐标系下三层组合梁单元的节点位移矩阵为 $\boldsymbol{p}_l=[\overline{u}_{ai}\quad \overline{u}_{bi}\quad \overline{u}_{ci}\quad \overline{v}_i\quad \overline{\theta}_i\quad \overline{u}_{aj}\quad \overline{u}_{bj}\quad \overline{u}_{cj}\quad \overline{v}_j\quad \overline{\theta}_j]^{\mathrm{T}}$，由于组合梁单元长度为 L，单元两端点的坐标分别为 $x=0$ 和 $x=L$，将此两处的位移值作为已知边界条件代入式(15)，即可得到常数矩阵 $\boldsymbol{C}$，有：

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{X}^{-1}(\boldsymbol{p}_l-\boldsymbol{Z}) \tag{17}$$

式中：$\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{X}_{\mathrm{u,a}}^{\mathrm{T}}(x=0),\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{X}_{\theta}^{\mathrm{T}}(x=L)]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{Z}=[\boldsymbol{Z}_{\mathrm{u,a}}^{\mathrm{T}}(x=0),\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{Z}_{\theta}^{\mathrm{T}}(x=L)]^{\mathrm{T}}$。

设局部坐标系下三层组合梁单元节点力矩阵为 $\boldsymbol{F}_l=[\overline{N}_{ai}\quad \overline{N}_{bi}\quad \overline{N}_{ci}\quad \overline{T}_i\quad \overline{M}_i\quad \overline{N}_{aj}\quad \overline{N}_{bj}\quad \overline{N}_{cj}\quad \overline{T}_j\quad M_j]^{\mathrm{T}}$，为求得截面内力矩阵，可将式(15)代入式(2)得到应变的表达式，再将其代入式(4)，有：

$$\overline{N}_i(x)=\boldsymbol{Y}_{\mathrm{N}i}(x)\boldsymbol{C}+\boldsymbol{R}_{\mathrm{N}i}(x),\ i=a,\ b,\ c$$

中国知网 https://www.cnki.net

$$\overline{M}(x)=\boldsymbol{Y}_{\mathrm{M}}(x)\boldsymbol{C}+\boldsymbol{R}_{\mathrm{M}}(x)$$

$$\overline{T}(x)=\boldsymbol{Y}_{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{C}+\boldsymbol{R}_{\mathrm{T}}(x) \tag{18}$$

式中：

$\boldsymbol{Y}_{\mathrm{N}i}=E_iA_i\partial_x\boldsymbol{X}_{\mathrm{u},i}$；$\boldsymbol{Y}_{\mathrm{M}}=EI_0\partial_x\boldsymbol{X}_{\theta}$；$\boldsymbol{Y}_{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\Gamma}_{10}$；$\boldsymbol{R}_{\mathrm{N}i}=E_iA_i\partial_xZ_{\mathrm{N},i}$，$i=a$，$b$，$c$；$\boldsymbol{R}_{\mathrm{M}}=EI_0\partial_xZ_{\theta}$；$\boldsymbol{R}_{\mathrm{T}}=-p_yx$。

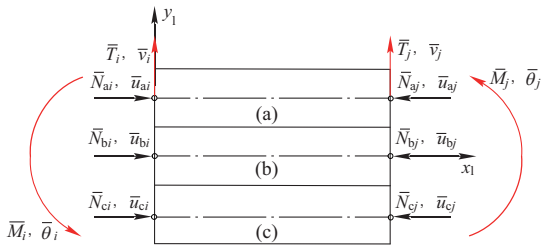


图 3　局部坐标系下三层组合梁单元节点力和节点位移

Fig. 3　Nodal force and displacement of three-layer composite beams in local coordinate system

将单元两端点坐标 $x=0$ 和 $x=L$ 处的相关值作为已知边界条件代入式(18)，整理后有：

$$\boldsymbol{F}_l=\boldsymbol{YC}+\boldsymbol{R} \tag{19}$$

式中：$\boldsymbol{Y}=[\boldsymbol{Y}_{\mathrm{Na}}^{\mathrm{T}}(x=0),\cdots\cdots,\boldsymbol{Y}_{\theta}^{\mathrm{T}}(x=L)]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{R}=[R_{\mathrm{Na}}^{\mathrm{T}}(x=0),\cdots\cdots,R_{\theta}^{\mathrm{T}}(x=L)]^{\mathrm{T}}$。

将式(17)代入式(19)，有：

$$\boldsymbol{F}_l+\boldsymbol{F}_{l0}=\boldsymbol{K}_l\boldsymbol{p}_l \tag{20}$$

式中：$\boldsymbol{K}_l=\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})^{-1}$；$\boldsymbol{F}_{l0}=\boldsymbol{K}_l\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{R}$。$\boldsymbol{K}_l$即为三层组合梁在局部坐标系下的单元刚度矩阵，$\boldsymbol{F}_{l0}$是单元内部载荷引起的节点力，本文不考虑结构的内部荷载，因此该项取 0。

由式(15)的推导可知，本文中求得的 $\overline{u}$、$\overline{v}$、$\overline{\theta}$ 均是基于弹性力学微分方程的解析解获得，即所谓的“精确位移场”，可避免传统位移有限元法中位移场假设为多项式可能带来的弊端，且为保证计算结果精度所需划分的最小单元数仅取决于边界与荷载情况[38]，因此本文参照文献[30-31]将其定义为“精确”刚度矩阵。

2　结构坐标系下单元切线刚度矩阵

2.1　结构与共旋两种坐标系之间位移转换

对于本文研究的考虑双界面滑移的三层组合梁，建立图 4 所示的两种坐标系，即结构坐标系 xy 与共旋坐标系 x_ly_l，由共旋法的定义及已有文献[16,46]可知，结构坐标系 xy 是始终不变的，但共旋坐标系x_ly_l将随着单元的位移发生平移和转动。在本文中共旋坐标系 x_ly_l的原点取中间梁层的左节点 b_i，x_l轴则取节点 b_i与 b_j的连线且其方向由 b_i指向 b_j，y_l轴则由 x_l轴逆时针旋转 90°得到。

用 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{g}}=[u_{\mathrm{b}i}\quad v_{\mathrm{b}i}\quad \theta_i\quad g_{1i}\quad g_{2i}\quad u_{\mathrm{b}j}\quad v_{\mathrm{b}j}\quad \theta_j\quad g_{1j}\quad g_{2j}]^{\mathrm{T}}$表示三层组合梁单元在结构坐标系下的节点位移矩阵，矩阵中各元素的含义如图 4 与图 5 所示，共旋坐标系下的节点位移矩阵 $\boldsymbol{p}_l$所含元素如前所述，各元素的含义也可见图 4 与图 5。应当指出的是，如图 4 所示，共旋坐标系下的滑移 $\overline{\boldsymbol{g}}$ 的方向是平行于共旋坐标系的 x_l轴，而结构坐标系下的滑移 $\boldsymbol{g}$ 的方向是沿界面切线方向，$\overline{\boldsymbol{g}}$ 与 $\boldsymbol{g}$ 的具体数值关系在后续给出。

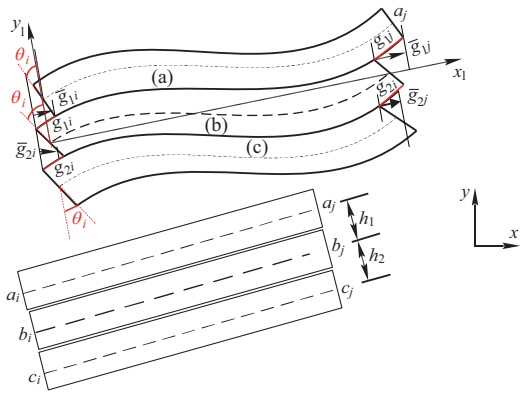


图 4　变形前后的三层组合梁单元

Fig. 4　Three-layer composite beam element before and after deformation

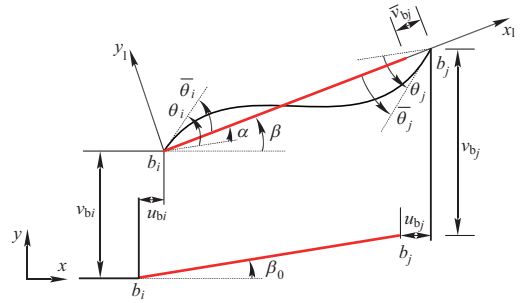


图 5　两种坐标系下的位移

Fig. 5　Displacement in two coordinate systems

基于共旋坐标系的定义以及联系图 4 与图 5，可将 $\boldsymbol{p}_l$中的各元素(显然已经去除了刚体位移)用 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{g}}$中的元素表示，有：

$$\begin{cases}\overline{u}_{\mathrm{b}i}=0\\ \overline{u}_{\mathrm{b}j}=l_{\mathrm{n}}-l_0\\ \overline{v}_i=0\\ \overline{v}_j=0\\ \overline{\theta}_i=\theta_i-\alpha\\ \overline{\theta}_j=\theta_j-\alpha\end{cases} \tag{21}$$

中国知网 https://www.cnki.net

式中：l_0和l_n分别为三层组合梁单元变形前、后的长度，由节点b_i与b_j在结构坐标系下的初始坐标值及相应节点位移值求得，$\alpha=\beta-\beta_0$为刚体转角，β_0与β则分别为三层组合梁单元变形前、后x_l轴与结构坐标系x轴的夹角。

对于β的求解，部分文献[52-53]采用反正切函数即$\beta=\arctan(\ )$的形式进行，该方法显然存在β的绝对值需小于$\frac{\pi}{2}$的隐性限制，在求解大转动问题时会导致非线性计算无法进行或不收敛(本文后续算例3开始时就遭遇此情况)，考虑到非线性计算中要求得的具体值是$\bar{\theta}_i$与$\bar{\theta}_j$，而β仅是一个中间变量，同时也考虑到$\bar{\theta}_i$与$\bar{\theta}_j$是扣除单元刚体转角后的纯角变形，其绝对值一般很难超过$\frac{\pi}{2}$，鉴于此，可分别对式(21)中的$\bar{\theta}_i$与$\bar{\theta}_j$求出其正弦函数与余弦函数值，然后再利用反正切函数直接求出$\bar{\theta}_i$与$\bar{\theta}_j$，如此就避免受β值求解的限制，具体计算式为：

$$\begin{cases}\bar{\theta}_i=\arctan\left(\dfrac{\sin\theta_i\cos\alpha-\cos\theta_i\sin\alpha}{\cos\theta_i\cos\alpha+\sin\theta_i\sin\alpha}\right)\\ \bar{\theta}_j=\arctan\left(\dfrac{\sin\theta_j\cos\alpha-\cos\theta_j\sin\alpha}{\cos\theta_j\cos\alpha+\sin\theta_j\sin\alpha}\right)\end{cases}\tag{22}$$

对于$\bar{u}_{ai}$、$\bar{u}_{ci}$、$\bar{u}_{aj}$、$\bar{u}_{cj}$，显然有：

$$\begin{cases}\bar{u}_{ai}=-\bar{g}_{1i}-h_1\bar{\theta}_i\\ \bar{u}_{ci}=-\bar{g}_{2i}-h_2\bar{\theta}_i\\ \bar{u}_{aj}=-\bar{g}_{1j}-h_1\bar{\theta}_j+\bar{u}_{1bj}\\ \bar{u}_{cj}=-\bar{g}_{2j}-h_2\bar{\theta}_j+\bar{u}_{1bj}\end{cases}\tag{23}$$

式(23)中的$\bar{g}_{1i}$、$\bar{g}_{2i}$、$\bar{g}_{1j}$、$\bar{g}_{2j}$，则有：

$$\begin{cases}\bar{g}_{ki}=g_{ki}\cos\bar{\theta}_i\\ \bar{g}_{kj}=g_{kj}\cos\bar{\theta}_j\end{cases}\quad k=1,\ 2\tag{24}$$

2.2 结构坐标系下单元切线刚度矩阵求解

共旋坐标法中求解结构坐标系下单元切线刚度矩阵有两种方法，即基于几何一致性法[52,54]和场一致性法[53,55]，相对而言，前者计算推导较复杂但导出对称的单元切线刚度矩阵，后者恰相反计算推导简单但导出的单元切线刚度矩阵是不对称的，综合考虑本文采用前一种方法。

由共旋法的定义，对于共旋坐标系下的节点力矩阵$\boldsymbol{F}_l$和节点位移矩阵$\boldsymbol{p}_l$，有：

$$\boldsymbol{F}_l=\boldsymbol{K}_l\boldsymbol{p}_l\tag{25}$$

基于几何一致性方法，设梁单元在结构坐标系下的节点力矩阵为$\boldsymbol{F}_g$，在结构与共旋两个坐标系之间应用虚功原理，有：

$$\delta(\boldsymbol{p}_l)_V^T\boldsymbol{F}_l=\delta(\boldsymbol{p}_g)_V^T\boldsymbol{F}_g\tag{26}$$

式中：位移微分的下标V表示其为虚拟量。

假设节点位移微分$\delta\boldsymbol{p}_l$与$\delta\boldsymbol{p}_g$存在以下关系：

$$\delta\boldsymbol{p}_l=\boldsymbol{B}_{lg}\delta\boldsymbol{p}_g\tag{27}$$

将式(27)代入式(26)，再利用式(25)，并微分，不难获得结构坐标系下节点力微分$\delta\boldsymbol{F}_g$与节点位移微分$\delta\boldsymbol{p}_g$之间的关系，也即梁单元在结构坐标系下的切线刚度矩阵$\boldsymbol{K}_g$，有：

$$\boldsymbol{K}_g=\boldsymbol{B}_{lg}^T\boldsymbol{K}_l\boldsymbol{B}_{lg}+\boldsymbol{H}_{lg}\tag{28}$$

式中：$\boldsymbol{H}_{lg}=\left.\dfrac{\partial(\boldsymbol{B}_{lg}^T\boldsymbol{F}_l)}{\partial\boldsymbol{p}_g}\right|_{\boldsymbol{F}_l}$。

对于单层梁单元，采用上述方法就能直接计算出其在结构坐标系下的单元切线刚度矩阵$\boldsymbol{K}_g$及节点力矩阵$\boldsymbol{F}_g$。对于三层组合梁单元，由于节点位移矩阵所含元素增多，特别是界面滑移项导致节点位移矩阵元素间关系较复杂，必须将上述$\boldsymbol{p}_l\to\boldsymbol{p}_g$及$\boldsymbol{F}_l\to\boldsymbol{F}_g$的直接一步求解改为引入中间矩阵，进行$\boldsymbol{p}_l\to\boldsymbol{p}_e\to\boldsymbol{p}_a\to\boldsymbol{p}_g$及$\boldsymbol{F}_l\to\boldsymbol{F}_e\to\boldsymbol{F}_a\to\boldsymbol{F}_g$的间接三步求解，其中有：

$$\begin{cases}\boldsymbol{p}_e=[\bar{u}_{1bj}\quad\bar{\theta}_i\quad\bar{\theta}_i\quad\bar{g}_{1i}\quad\bar{g}_{2i}\quad\bar{g}_{1j}\quad\bar{g}_{2j}]^T\\ \boldsymbol{p}_a=[\bar{u}_{1bj}\quad\bar{\theta}_i\quad\bar{\theta}_i\quad g_{1i}\quad g_{2i}\quad g_{1j}\quad g_{2j}]^T\end{cases}\tag{29}$$

参照上述直接一步求解过程，不难得到间接三步求解计算所需的各中间矩阵。

对于$\boldsymbol{p}_l\to\boldsymbol{p}_e$，有：

$$\boldsymbol{H}_{le}=0$$

$$\boldsymbol{B}_{le}=\begin{bmatrix}0&-h_1&0&-1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&-h_2&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\1&0&-h_1&0&0&-1&0\\1&0&0&0&0&0&0\\1&0&-h_2&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

对于$\boldsymbol{p}_e\to\boldsymbol{p}_a$，有：

$$\boldsymbol{H}_{ea}=\left.\frac{\partial(\boldsymbol{B}_{ea}^T\boldsymbol{F}_e)}{\partial\boldsymbol{p}_a}\right|_{\boldsymbol{F}_e}=$$

中国知网 https://www.cnki.net

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & A & 0 & -\sin\bar{\theta}_i \boldsymbol{F}_e(4) & -\sin\bar{\theta}_i \boldsymbol{F}_e(5) & 0 & 0 \\
0 & 0 & B & 0 & 0 & -\sin\bar{\theta}_j \boldsymbol{F}_e(6) & -\sin\bar{\theta}_j \boldsymbol{F}_e(7) \\
0 & -\sin\bar{\theta}_i \boldsymbol{F}_e(4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\sin\bar{\theta}_i \boldsymbol{F}_e(5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\sin\bar{\theta}_j \boldsymbol{F}_e(6) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\sin\bar{\theta}_j \boldsymbol{F}_e(7) & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{B}_{ea} =
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -g_{1i}\sin\bar{\theta}_i & 0 & \cos\bar{\theta}_i & 0 & 0 & 0 \\
0 & -g_{2i}\sin\bar{\theta}_i & 0 & 0 & \cos\bar{\theta}_i & 0 & 0 \\
0 & 0 & -g_{1j}\sin\bar{\theta}_j & 0 & 0 & \cos\bar{\theta}_j & 0 \\
0 & 0 & -g_{2j}\sin\bar{\theta}_j & 0 & 0 & 0 & \cos\bar{\theta}_j
\end{bmatrix}
$$

矩阵 $\boldsymbol{H}_{ea}$ 中 A、B 的具体表达式为：

$$
\begin{cases}
A = -[g_{1i}\boldsymbol{F}_e(4)\cos\bar{\theta}_i + g_{2i}\cos\bar{\theta}_i \boldsymbol{F}_e(5)] \\
B = -[g_{1j}\boldsymbol{F}_e(6)\cos\bar{\theta}_j + g_{2j}\cos\bar{\theta}_j \boldsymbol{F}_e(7)]
\end{cases}
$$

对于 $\boldsymbol{p}_a \to \boldsymbol{p}_g$，有：

$$
\boldsymbol{H}_{ag} = \frac{\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^T}{l_n}\boldsymbol{F}_a(1) + \frac{1}{l_n^2}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{z}^T + \boldsymbol{z}\boldsymbol{r}^T)[\boldsymbol{F}_a(2) + \boldsymbol{F}_a(3)]
$$

$$
\boldsymbol{B}_{ag} =
\begin{bmatrix}
-c & -s & 0 & 0 & 0 & c & s & 0 & 0 & 0 \\
-s/l_n & c/l_n & 1 & 0 & 0 & s/l_n & -c/l_n & 0 & 0 & 0 \\
-s/l_n & c/l_n & 0 & 0 & 0 & s/l_n & -c/l_n & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

其中：

$\boldsymbol{r} = [-c \quad -s \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad c \quad s \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$；

$\boldsymbol{z} = [s \quad -c \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$；

$c = \cos\beta$；$s = \sin\beta$。

应指出的是，上述计算中要用到的矩阵 $\boldsymbol{F}_e$、$\boldsymbol{F}_a$ 的计算方法与式(26)到式(28)中计算单层梁里的 $\boldsymbol{F}_g$ 完全相同。

至此，三层组合梁单元在结构坐标系下的切线刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_g$ 的最终表达式可求得，有：

$$
\boldsymbol{K}_g = \boldsymbol{B}_{ag}^T \boldsymbol{K}_a \boldsymbol{B}_{ag} + \boldsymbol{H}_{ag} \tag{30}
$$

2.3 偏心的影响

对于多层组合梁，由于外加约束或集中荷载的作用点与建立组合梁单元模型所取的节点(如图 4 中的 b_i、b_j)并不一定吻合，由于结构平衡方程涉及的节点位移与节点力均是以类似 b_i、b_j 的组合梁单元节点处值为基础，故需进行外加约束或集中荷载的作用点与组合梁单元节点之间力与位移的转换，也即需考虑偏心的影响[16,56]。

2.3.1 外加约束偏心

该类偏心总体而言分两种情况，一种是约束点与组合梁单元节点 b_i 在同一梁层，如图 6 中的 m 点；另一种是两者不在同一梁层，如图 6 中的 n 点。

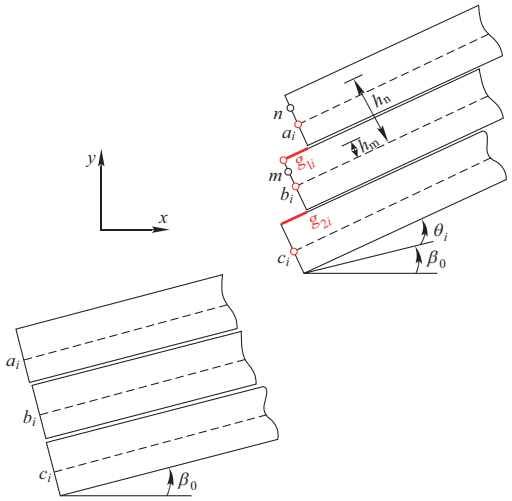


图 6 组合梁偏心影响示意图

Fig. 6 Schematic diagram of eccentric effect of composite beam

设 $\boldsymbol{p}_g = [u_{bi} \quad v_{bi} \quad \theta_i \quad g_{1i} \quad g_{2i} \quad u_{bj} \quad v_{bj} \quad \theta_j \quad g_{1j} \quad g_{2j}]^T$、$\boldsymbol{p}_m = [u_m \quad v_m \quad \theta_i \quad g_{1i} \quad g_{2i} \quad u_{bj} \quad v_{bj} \quad \theta_j \quad g_{1j} \quad g_{2j}]^T$、$\boldsymbol{p}_n = [u_n \quad v_n \quad \theta_i \quad g_{1i} \quad g_{2i} \quad u_{bj} \quad v_{bj} \quad \theta_j \quad g_{1j} \quad g_{2j}]^T$，考虑外加约束偏心的实质就是建立 $\boldsymbol{p}_m$、$\boldsymbol{p}_n$ 里位移微分项与 $\boldsymbol{p}_g$ 里位移微分项之间的关系，再基于此对组合梁单元在结构坐标系下的切线刚度矩阵进行修正，以此便于在增量平衡方程求解时引入 m 或 n 点的已知位移约束值。

对于 m 点，可将 mb_i 视为刚臂，根据刚臂受力后只发生刚体运动而不变形的特点[57]，m 点在结构坐

中国知网 https://www.cnki.net

标系下的线位移$[u_{bi} \quad v_{bi}]^T$有：

$$\begin{bmatrix} u_m \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{bi} \\ v_{bi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta_i - 1 & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\beta_0 \\ \cos\beta_0 \end{bmatrix} h_m \tag{31}$$

式中：h_m为 m 点与节点 b_i的距离，显然其值为常数。

对于 n 点，因要考虑滑移的影响，有：

$$\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{bi} \\ v_{bi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta_i - 1 & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\beta_0 \\ \cos\beta_0 \end{bmatrix} h_n + \begin{bmatrix} \cos(\theta_i+\beta_0) \\ \sin(\theta_i+\beta_0) \end{bmatrix} g_{1i} \tag{32}$$

式中：h_n为 n 点与节点 b_i的距离，显然其值也为常数。

微分式(31)和式(32)，分别有：

$$\begin{bmatrix} \delta u_m \\ \delta v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta u_{bi} \\ \delta v_{bi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos(\theta_i+\beta_0) \\ \sin(\theta_i+\beta_0) \end{bmatrix} h_m \delta\theta_i \tag{33}$$

和

$$\begin{bmatrix} \delta u_n \\ \delta v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta u_{bi} \\ \delta v_{bi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos(\theta_i+\beta_0) h_n + \sin(\theta_i+\beta_0) g_{1i} \\ \sin(\theta_i+\beta_0) h_n - \cos(\theta_i+\beta_0) g_{1i} \end{bmatrix} \delta\theta_i + \begin{bmatrix} \cos(\theta_i+\beta_0) \\ \sin(\theta_i+\beta_0) \end{bmatrix} \delta g_{1i} \tag{34}$$

显然，基于式(33)和式(34)可以分别建立位移微分 $\delta \boldsymbol{p}_g$与 $\delta \boldsymbol{p}_m$、$\delta \boldsymbol{p}_n$的关系，有：

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{p}_g &= \boldsymbol{B}_{gm} \delta \boldsymbol{p}_m \\ \delta \boldsymbol{p}_g &= \boldsymbol{B}_{gn} \delta \boldsymbol{p}_n \end{aligned} \tag{35}$$

参照式(27)、式(28)，不难获得考虑外加约束偏心后的修正刚度矩阵为：

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}_m = \boldsymbol{B}_{gm}^T \boldsymbol{K}_g \boldsymbol{B}_{gm} + \boldsymbol{H}_{gm} \\ \boldsymbol{K}_n = \boldsymbol{B}_{gn}^T \boldsymbol{K}_g \boldsymbol{B}_{gn} + \boldsymbol{H}_{gn} \end{cases} \tag{36}$$

式中：$\boldsymbol{K}_g$就是按式(30)计算的常规组合梁单元在结构坐标系下的切线刚度矩阵。

2.3.2 集中荷载偏心

对于集中荷载偏心点，与前述外加约束偏心一样，它与组合梁单元节点 b_i也有在同一梁层和不在同一梁层两种情况，故同样以图 6 中的 m 与 n 点为例进行分析，分析集中荷载偏心的实质也就是按照等效原则将其移至组合梁单元节点，求出其对应节点荷载值以及对单元切线刚度的影响。

设施加于 m 点与 n 点的集中荷载为 $\boldsymbol{P}_m = [P_m(1) \quad P_m(2) \quad P_m(3)]^T$和 $\boldsymbol{P}_n = [P_n(1) \quad P_n(2) \quad P_n(3)]^T$，其中第 1、2 和 3 项分别为水平力、竖向力和弯矩，对于 m 点与节点 b_i，应用虚功原理并结合式(31)可得到与 $\boldsymbol{P}_m$等效的节点荷载 $\boldsymbol{P}_{bi}$，有：

$$\boldsymbol{P}_{bi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos(\theta_i+\beta_0) h_m & \sin(\theta_i+\beta_0) h_m & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{P}_m \tag{37}$$

微分式(37)得到 $\delta \boldsymbol{P}_m$与 $\delta \boldsymbol{P}_{bi}$的关系，参照由式(35)导出式(36)的过程也就不难导出组合梁单元切线刚度矩阵受集中荷载偏心影响的计算式。

对于 n 点与节点 b_i，同样应用虚功原理并结合式(32)得到与 $\boldsymbol{P}_n$等效的节点荷载 $\boldsymbol{P}_{bi}$，有：

$$\boldsymbol{P}_{bi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos(\theta_i+\beta_0) h_n - \sin(\theta_i+\beta_0) g_{1i} & -\sin(\theta_i+\beta_0) h_n + \cos(\theta_i+\beta_0) g_{1i} & 1 \\ \cos(\theta_i+\beta_0) & \sin(\theta_i+\beta_0) & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{P}_n \tag{38}$$

至此，参照前述计算过程也不难得出此种集中荷载偏心工况下组合梁单元切线刚度矩阵受影响的计算式。

2.4 程序流程

Newton-Raphson(N-R)法具有较好的收敛效率，而荷载增量法又便于提高计算精度和体现计算过程，所以本文的算法程序中将外荷载分为 n 部分依次施加到结构上，每个荷载步内通过 N-R 法进行迭代计算，整体计算流程如图 7 所示：

(1) 输入结构的材料、节点单元划分、边界条件和荷载情况。

(2) 根据结构的受力情况，将偏心荷载和均布荷载等效为节点力，叠加节点荷载得到荷载向量 $\boldsymbol{P}$。并将其分为 n 个荷载步，每个荷载步的初始荷载为 $\boldsymbol{P}/n$ 。

(3) 按照文中方法计算三层组合梁的切线刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_g$，并累加形成整体刚度矩阵。

(4) 进行边界条件处理。

(5) 施加本迭代步的外荷载，计算得到位移增量 $\Delta \boldsymbol{d}$，并通过 $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d} + \Delta \boldsymbol{d}$ 计算得到当前迭代步下结构的总位移 $\boldsymbol{d}$。

(6) 根据位移 $\boldsymbol{d}$，通过 2.2 节的内容计算得到单元的节点力矩阵 $\boldsymbol{F}_g$，并集成为结构的抵抗力矩阵 R。

(7) 用此时施加到结构上的总荷载 $\boldsymbol{P}_n$减去抵抗力矩阵 $\boldsymbol{R}$，得到不平衡力向量 $\Delta \boldsymbol{Z}$。

(8) 判断 $\Delta \boldsymbol{Z}$ 是否满足收敛条件，若满足，则进入下一步，若不满足，将 $\Delta \boldsymbol{Z}$ 作为下一迭代步的外荷载，重复步骤(3)到步骤(8)。

中国知网 https://www.cnki.net

（9）判断荷载施加级数，若 $i<n$，则将 p/n 作为外荷载继续进行下一荷载步，重复步骤（3）~（9），若 $i=n$，则输出相应数据，计算结束。

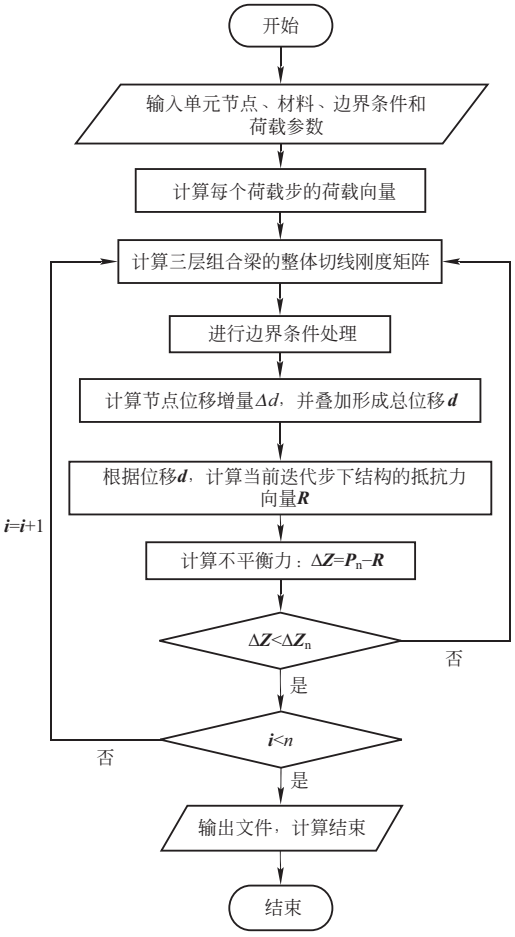


图 7　非线性迭代计算流程图

Fig. 7　Flowchart of nonlinear iteration algorithm

3　算例分析

本节选择 3 个算例用于验证本文算法及研制的程序的正确性，算例 2 和 3 还用于验证界面抗剪刚度 $k_{sc_k}\to\infty$ 或 $k_{sc_k}\to 0$ 时本文算法及程序的适用性。

算例 1　如图 8 所示均布荷载作用下简支钢板-混凝土-钢板组合梁，有限元分析所涉及的几何、材料、边界以及荷载等信息也附于图中，均布荷载取值范围为 10→1 500 kN/m，基于本文程序开展了几何线性与几何非线性计算，图 9 示出了均布荷载为 10 kN/m时界面滑移 g_1、g_2沿梁长的分布，图 10 与图 11 分别示出了端部滑移、跨中挠度与均布荷载的关系曲线，作为比较，也列出了文献[56]计算的相应值。

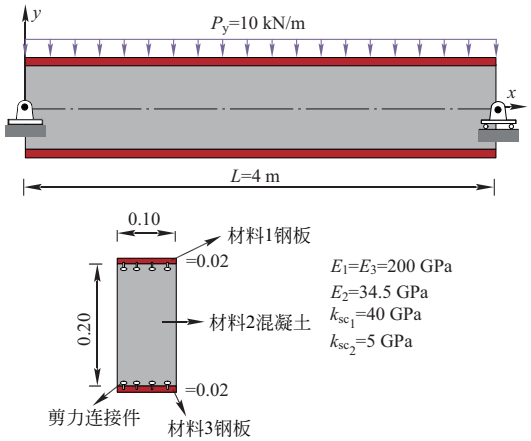


图 8　简支钢板-混凝土-钢板组合梁（单位：m）

Fig. 8　Simply supported steel plate-concrete-steel composite beam（unit：m）

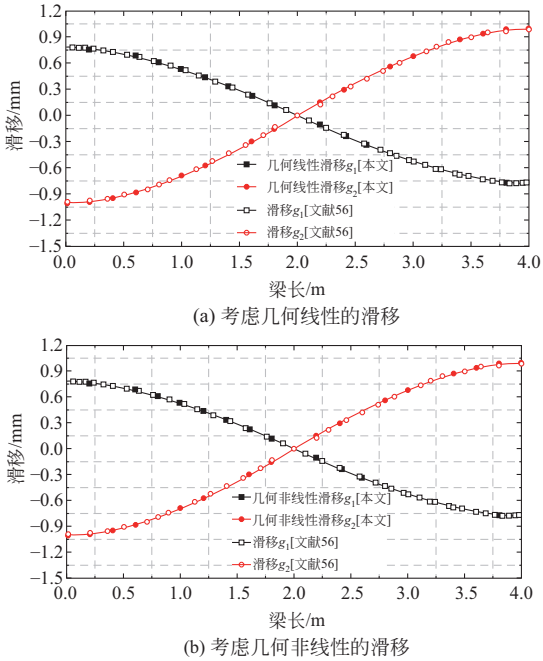


图 9　界面滑移沿梁长分布图

Fig. 9　Distribution of interface slip along beam length

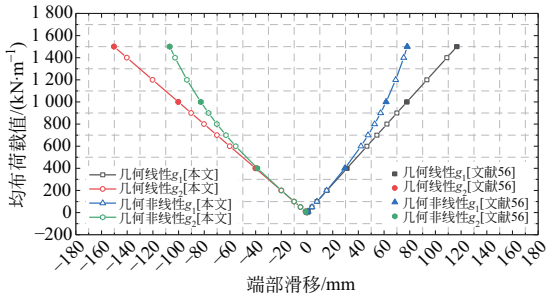


图 10　界面端部滑移-均布荷载关系曲线

Fig. 10　Relation curve of interfacial end slip-uniform load

中国知网 https://www.cnki.net

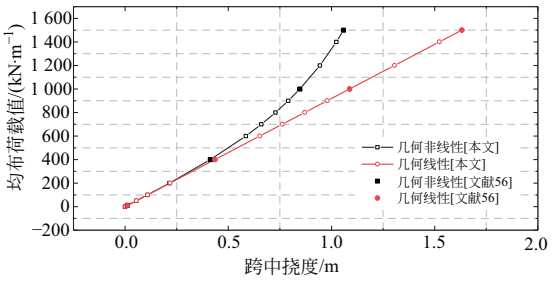


图 11　跨中挠度-均布荷载关系曲线

Fig. 11　Relation curve of mid-span deflection-uniform load

从图 9~图 11 可看出，本文计算结果与已有文献结果吻合良好，充分说明本文算法及程序是正确的(图 9 中，参考文献计算值与本文计算值以及几何线性与几何非线性的对应值基本相同)；同时也可看出：对于图 9，滑移均呈现反对称特征，g_2值沿梁长均大于g_1，但 10 kN/m 的均布荷载作用下几何线性与几何非线性的计算结果差别很小，对于梁端的g_1和g_2，两者分别为 0.777 9 mm 与 0.777 5 mm 以及 1.001 7 mm 与 1.001 6 mm，差别完全可忽略不计；对于图 10 与图 11，可看出在均布荷载大于 600 kN/m 时，不管是滑移还是跨中挠度，几何非线性效应就开始变得比较明显了。当均布荷载等于 1 500 kN/m 时，按几何非线性与几何线性算得的 g_1 和 g_2 分别为 78.055 7 mm 与 116.688 2 mm以及 106.919 8 mm 与 150.253 7 mm，分别相差 49.5%和 40.5%；按几何非线性与几何线性算得的跨中位移分别为 1.058 1 m 与 1.631 1 m，两者相差 54.2%，前者比后者小显然是由于组合梁下挠产生的受拉薄膜效应[58]引起。还应指出的是，不同于文献[56]将本算例处理为一个两层型钢柱再外包一个整体混凝土梁的结构，本文方法是完全将其处理为具有 3 个独立梁层的组合梁，显然更具适用性。

算例 2　如图 12 所示三层组合梁，该组合梁由文献[15-16，59]分析过的双层组合梁再增加最下面一个梁层形成，该新增梁层厚度可调。设计此三层组合梁的目的除了进一步验证本文算法及程序的正确性以外，也是验证新增梁层与原有组合梁底部梁层之间界面抗剪刚度 k_{sc} 取一个较大值模拟 k_{sc} 为∞(此时两个梁层之间无滑移，实质就是一个梁层)的可能性，实际计算中对该 k_{sc} 取值为 10^5 MPa，也就是图 12 中的 k_{sc_2}，新增梁层的弹性模量为 $E_3=12$ GPa，截面宽与第二梁层一致为 50 mm，其厚度依次取 200 mm、150 mm、100 mm、50 mm、12 mm 与 1.2 mm，其他两个梁层的详细信息可见图 12 或文献[15-16，59]。计算结果如图 13 及表 1 所示。

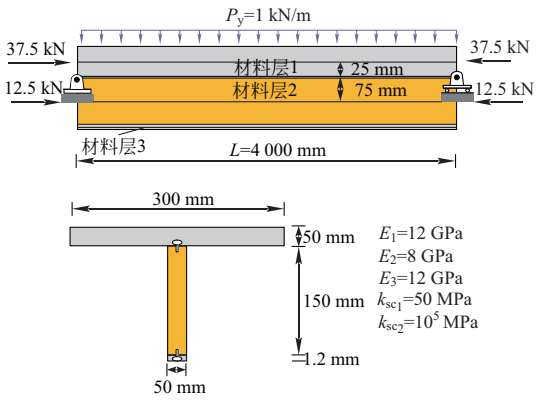
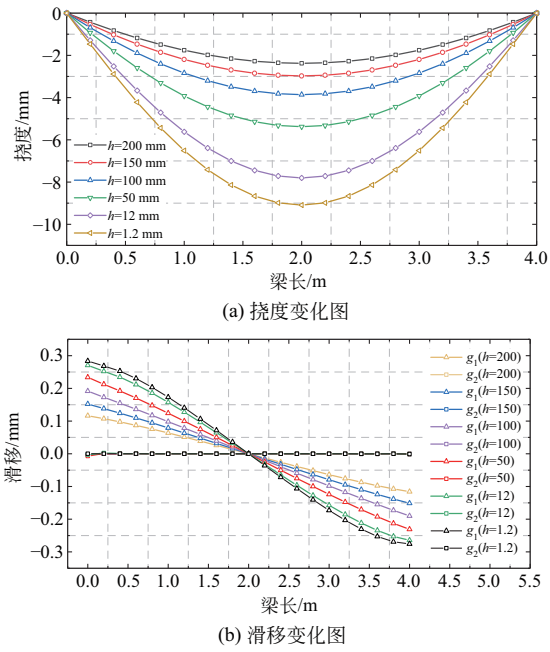


图 12　三层组合梁

Fig. 12　Three-layer composite beam



(a) 挠度变化图

(b) 滑移变化图

图 13　三层组合梁沿梁长挠度与滑移曲线图

Fig. 13　Curves of deflection and slip of three-layer composite beam along beam length

表 1　数值计算结果

Table 1　Numerical results

	文献[59]	文献[15]	文献[16]	本文
跨中挠度/m	9.274	9.276	9.249	9.089
$k_{sc}\times g_{1max}$/(kN·m^{-1})	13.878	13.865	13.798	13.783

由图 13(b)可知，新增梁层取不同厚度值下滑移值 g_2沿梁长方向均基本为 0，表明将 k_{sc_2}取为 10^5MPa 能保证新增梁层与原有组合梁底部梁层有效结合成一个完全连接梁层；同时，由图 13(a)与图 13(b)可看出，新增梁层厚度按上述递减取值时，考虑几何非线性的跨中挠度值从最开始的 2.37 mm 逐渐递增

中国知网 https://www.cnki.net

至 9.089 mm，滑移值 g_1 在梁端的最大值也从新增梁层厚度为 200 mm 时的 0.116 mm 递增至新增梁层厚度为 1.2 mm 时的 0.275 6 mm，该滑移值换算为最大滑移力为 13.783 kN/m（$k_{sc_1}\times g_{1max}$），与文献[15-16，59]的计算结果比较可知，随着新增梁层厚度的减小，基于本文方法得到的该三层梁的计算结果越来越趋近于双层组合梁，这一方面是进一步验证了本文算法及程序的正确性，同时也说明在本文方法中将界面抗剪刚度 k_{sc} 取一个较大值是能够有效模拟相邻梁层之间完全连接的。表 1 示出新增梁层厚度为 1.2 mm 时本文与已有文献计算结果的对比，可看出吻合良好，相对而言，底部梁层增厚 1.2 mm 对跨中挠度的影响大于对滑移值的影响。

算例 3　如图 14 所示大转动悬臂十字形三层组合梁，该组合梁详细信息示于图 14，也可参考文献[42]。此组合梁的主要受力特征就是发生大转动以及两层界面的剪力连接件刚度 k_{sc} 均等于 0，因此能较全面验证本文算法及程序（实际计算时将 k_{sc_1} 与 k_{sc_2} 取为 10^{-10} MPa），文献[15-16]也用此类算例的两层组合梁验证过其算法和程序。图 15、图 16 示意了部分数值计算结果，相对应的解析解[42]也一并示出用于比较。

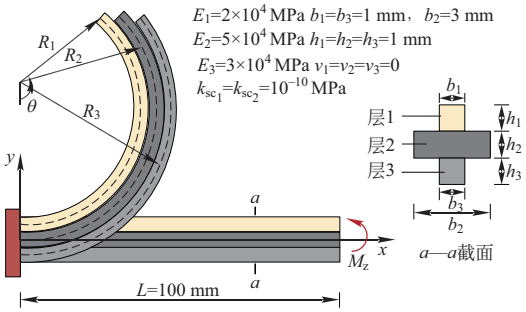


图 14　大转动悬臂十字形三层组合梁

Fig. 14　Cross-shaped three-layer composite cantilever beam with large rotation

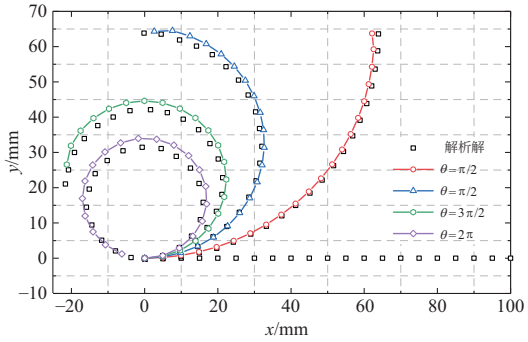


图 15　典型荷载水平下组合梁变形图

Fig. 15　Deformed shapes of composite beam at typical load levels

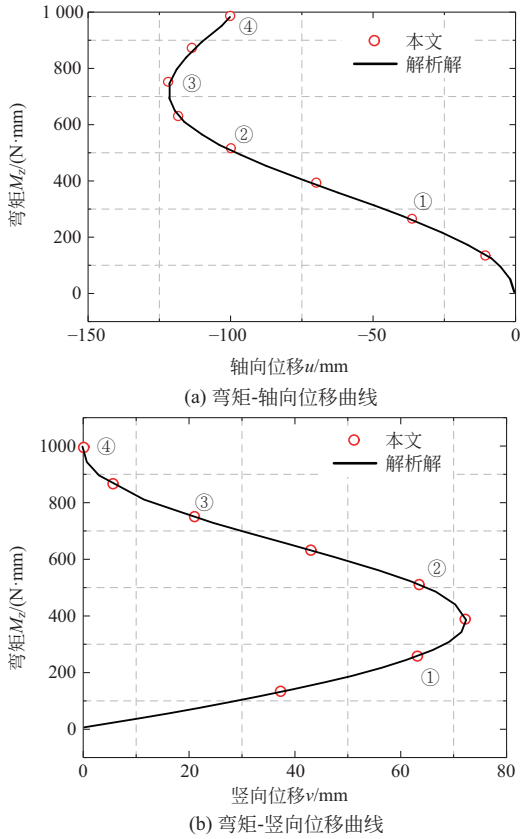


图 16　组合梁自由端荷载-位移曲线

Fig. 16　Load-displacement curves at the free end of composite beam

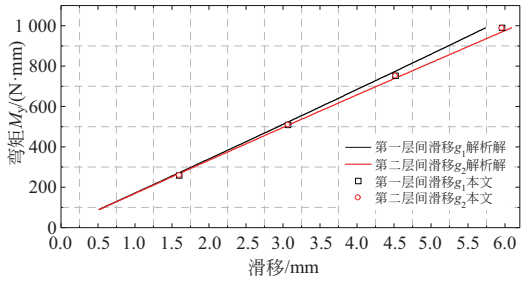


图 17　组合梁自由端荷载-滑移曲线

Fig. 17　Load-slip curves at the free end of composite beam

图 15 示意了自由端转角 θ 分别为 $\frac{\pi}{2}$、π、$\frac{3}{2}\pi$ 和 2π 时组合梁的变形图，图 16、图 17 示意了组合梁自由端的轴向位移、竖向位移及滑移与荷载的关系曲线，可看出本文数值解与解析解均吻合良好，其中解析解的详细计算公式可参见文献[42]，图 16 与图 17 中的①、②、③、④含义与图 14 中的一样，就是分别对应 θ 等于 $\frac{\pi}{2}$、π、$\frac{3}{2}\pi$ 和 2π。该算例也再次说明，针对三层组合梁的本文算法及程序不仅能解

中国知网 https://www.cnki.net

决大转动大位移问题，也能有效解决界面剪力连接件刚度 k_{sc} 为 0，即组合梁里相邻梁层切向无剪切连接情况。

4 结论与展望

（1）通过局部坐标系下采用“精确”几何线性单元刚度矩阵，利用共旋坐标法考虑几何非线性，建立了考虑双界面滑移的三层组合梁几何非线性有限元分析方法，对三个算例的分析比较表明了本文算法及程序的正确性与可靠性。

（2）本文采用的共旋法框架，即有限元变量在局部(共旋)坐标系与结构坐标系之间的转换矩阵与局部坐标系下的几何线性单元是无关的，各种性能优异的三层组合梁几何线性单元，在满足共旋法的基本假设以及节点数与节点所含自由度数相同的前提下均能使用该共旋法框架转换成几何非线性单元，从而简化相关研究。

（3）由于共旋法中几何非线性与材料非线性分析过程不耦合以及混凝土徐变实质为一种特殊的材料非线性的特点，本文方法可方便拓展用于三层组合梁的几何材料双非线性分析以及在非线性分析时同步考虑徐变的分析。

参 考 文 献

[1] 陈宝春，牟廷敏，陈宜言，等. 我国钢-混凝土组合结构桥梁研究进展及工程应用[J]. 建筑结构学报，2013，34(增 1)：1-10.（CHEN Baochun，MU Tingmin，CHEN Yiyan，et al. State-of-the-art of research and engineering application of steel-concrete composite bridges in China[J]. Journal of Building Structures，2013，34(S1)：1-10.）

[2] 曹国辉，廖世杰，彭鹏，等. 腐蚀与荷载耦合作用下钢-混凝土组合梁长期变形研究[J]. 土木工程学报，2022，55(1)：32-40，88.（CAO Guohui，LIAO Shijie，PENG Peng，et al. Long-term deformation of steel-concrete composite beams subjected to coupling effect of corrosion and loading[J]. China Civil Engineering Journal，2022，55(1)：32-40，88.（in Chinese））

[3] 王皓磊，李昊，唐源，等. FRP-胶合木-UHPC 组合梁桥设计与试验[J]. 土木工程学报，2022，55(5)：73-85.（WANG Haolei，LI Hao，TANG Yuan，et al. Design and experiment of FRP-Glulam-UHPC composite girder bridge[J]. China Civil Engineering Journal，2022，55(5)：73-85.（in Chinese））

[4] RICHARD LIEW J Y，SOHEL K M A，KOH C G. Impact tests on steel-concrete-steel sandwich beams with lightweight concrete core[J]. Engineering Structures，2009，31(9)：2045-2059.

[5] SOHEL K M A，LIEW J R，KOH C G. Numerical modelling of lightweight Steel-Concrete-Steel sandwich composite beams subjected to impact[J]. Thin-Walled Structures，2015，94：135-146.

[6] WANG Y H，LU J Y，LIU S T，et al. Behaviour of a novel stiffener-enhanced steel-concrete-steel sandwich beam subjected to impact loading[J]. Thin-Walled Structures，2021，165：107989.

[7] 都方竹，李冬生. 基于声发射监测的 GFRP-钢-混凝土组合梁损伤评估[J]. 建筑结构学报，2024，45(增 1)：258-266.（DU Fangzhu，LI Dongsheng. Damage assessment of GFRP- steel-concrete composite beams based on acoustic emission monitoring[J]. Journal of Building Structures，2024，45(S1)：258-266.（in Chinese））

[8] ZHANG Y J，YANG Z C，XIE T Y，et al. Flexural behaviour and cost effectiveness of layered UHPC-NC composite beams[J]. Engineering Structures，2022，273：115060.

[9] 裴必达，朱星畅，李传习，等. 钢-NC-UHPC 组合桥面板抗负弯性能试验研究[J]. 土木工程学报，2025，58(5)：41-53.（PEI Bida，ZHU Xingchang，LI Chuanxi，et al. Experimental study on negative bending resistance of steel-NC-UHPC composite bridge deck[J]. China Civil Engineering Journal，2025，58(5)：41-53.（in Chinese））

[10] 王花平. 考虑滑移效应的组合梁界面作用机理及形变特征[J]. 土木工程学报，2021，54(12)：41-52.（WANG Huaping. Interfacial interaction and deformation characteristics of composite beams with interfacial slip considered[J]. China Civil Engineering Journal，2021，54(12)：41-52.（in Chinese））

[11] 叶华文，蒋成川，黄澳，等. 基于三角级数解的钢-混凝土组合梁弹性弯曲变形计算方法[J]. 建筑结构学报，2024，45(5)：253-261.（YE Huawen，JIANG Chengchuan，HUANG Ao，et al. A novel theoretical method of elastic bending deformation of steel- concrete composite beams based on trigonometric series solution[J]. Journal of Building Structures，2024，45(5)：253-261.（in Chinese））

[12] 聂建国，沈聚敏. 滑移效应对钢-混凝土组合梁弯曲强度的影响及其计算[J]. 土木工程学报，1997，30(1)：31-36.（NIE Jianguo，SHEN Jumin. Slip effect on strength of composite steel concrete beams[J]. China Civil Engineering Journal，1997，30(1)：31-36.（in Chinese））

[13] 童根树，夏骏. 考虑滑移影响的钢-混凝土组合梁的刚度[J]. 建筑钢结构进展，2008，10(6)：1-8.（TONG Genshu，XIA Jun. Bending stiffness of steel-concrete composite beams considering effect of slip[J]. Progress in Steel Building Structures，2008，10(6)：1-8.（in Chinese））

[14] 申志强，钟宏志. 界面滑移组合梁的几何非线性求积元分析[J]. 工程力学，2013，30(3)：270-275，288.（SHEN Zhiqiang，ZHONG Hongzhi. Geometrically nonlinear quadrature element analysis of composite beams with partial interaction[J]. Engineering Mechanics，2013，30(3)：270-275，288.（in Chinese））

[15] KRAWCZYK P，REBORA B. Large deflections of laminated beams with interlayer slips[J]. Engineering Computations，2007，24(1)：33-51.

[16] BATTINI J M，NGUYEN Q H，HJIAJ M. Non-linear finite element analysis of composite beams with interlayer slips[J]. Computers & Structures，2009，87(13/14)：

中国知网 https://www.cnki.net

904-912.
[17] SOUSA J B M JR. Exact finite elements for multilayered composite beam-columns with partial interaction [J]. Computers & Structures, 2013, 123: 48-57.
[18] RANZI G. Locking problems in the partial interaction analysis of multi-layered composite beams[J]. Engineering Structures, 2008, 30(10): 2900-2911.
[19] SCHNABL S, SAJE M, TURK G, et al. Locking-free two-layer Timoshenko beam element with interlayer slip [J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2007, 43(9): 705-714.
[20] AYOUB A. A force-based model for composite steel-concrete beams with partial interaction [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2005, 61(3): 387-414.
[21] AYOUB A, FILIPPOU F C. Mixed formulation of nonlinear steel-concrete composite beam element [J]. Journal of Structural Engineering, 2000, 126(3): 371-381.
[22] REDDY J N. A simple higher-order theory for laminated composite plates[J]. Journal of Applied Mechanics, 1984, 51(4): 745-752.
[23] CHAKRABARTI A, SHEIKH A H, GRIFFITH M, et al. Analysis of composite beams with partial shear interactions using a higher order beam theory [J]. Engineering Structures, 2012, 36: 283-291.
[24] HE G H, YANG X. Finite element analysis for buckling of two-layer composite beams using Reddy's higher order beam theory[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2014, 83: 49-57.
[25] HE G H, YANG X. Dynamic analysis of two-layer composite beams with partial interaction using a higher order beam theory[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2015, 90: 102-112.
[26] UDDIN M A, SHEIKH A H, BROWN D, et al. Geometrically nonlinear inelastic analysis of steel-concrete composite beams with partial interaction using a higher-order beam theory[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2018, 100: 34-47.
[27] NEWMARK N M, SIESS C P, VIEST I M. Tests and analysis of composite beams with incomplete interaction [J]. Experimental Stress Analysis, 1951, 9(1): 75-92.
[28] HEINISUO M. An exact finite element technique for layered beams[J]. Computers & Structures, 1988, 30(3): 615-622.
[29] GIRHAMMAR U A, PAN D H. Exact static analysis of partially composite beams and beam-columns [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2007, 49(2): 239-255.
[30] NGUYEN Q H, HJIAJ M, GUEZOULI S. Exact finite element model for shear-deformable two-layer beams with discrete shear connection[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2011, 47(7): 718-727.
[31] NGUYEN Q H, MARTINELLI E, HJIAJ M. Derivation of the exact stiffness matrix for a two-layer Timoshenko beam element with partial interaction [J]. Engineering Structures, 2011, 33(2): 298-307.
[32] MOSA A A, XING M, ZHUGE Y, et al. Analysis of tapered three-layered sandwich flexural members (Stobie poles) with partial shear interaction: Analytical model[J]. Thin-Walled Structures, 2023, 191: 111032.
[33] LADURNER D, ADAM C, FURTMÜLLER T. Geometric nonlinear analysis of slender layered non-prismatic beams with interlayer slip[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2024, 261: 108651.
[34] ADAM C, LADURNER D, FURTMÜLLER T. Dynamic analysis of tapered symmetrically layered beams with interlayer slip[J]. Applied Mathematical Modelling, 2023, 120: 463-484.
[35] LIN JIANPING, LIU XIAOLEI, WANG YUN, et al. Static and dynamic analysis of three-layered partial-interaction composite structures [J]. Engineering Structures, 2022, 252: 113581.
[36] FORTUNA B, TURK G, SCHNABL S. A new locking-free finite element for N-layer composite beams with interlayer slips and finger joints[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2023, 220: 103936.
[37] REISSNER E. On one-dimensional finite-strain beam theory: The plane problem[J]. Zeitschrift Für Angewandte Mathematik und Physik ZAMP, 1972, 23(5): 795-804.
[38] KEO P, NGUYEN Q H, SOMJA H, et al. Derivation of the exact stiffness matrix of shear-deformable multi-layered beam element in partial interaction[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2016, 112: 40-49.
[39] SCHNABL S, PLANINC I, SAJE M, et al. An analytical model of layered continuous beams with partial interaction [J]. Structural Engineering and Mechanics, 2006, 22(3): 263-278.
[40] RAJENDRAN L, MATHEW A T. Analytical solution for large deflection of multilayered composite cantilever beams with interlayer slip [J]. Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering, 2020, 44(1): 23-33.
[41] ADAM C, LADURNER D, FURTMÜLLER T. Moderately large vibrations of flexibly bonded layered beams with initial imperfections [J]. Composite Structures, 2022, 299: 116013.
[42] KIM H J, YOON K, LEE P S. Continuum mechanics based beam elements for linear and nonlinear analyses of multi-layered composite beams with interlayer slips [J]. Composite Structures, 2020, 235: 111740.
[43] SOUSA J B M, OLIVEIRA C E M, DA SILVA A R. Displacement-based nonlinear finite element analysis of composite beam-columns with partial interaction [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2010, 66(6): 772-779.
[44] SOUSA J B M, PARENTE E, LIMA É M F, et al. Beam-tendon finite elements for post-tensioned steel-concrete composite beams with partial interaction [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2019, 159: 147-160.
[45] RANZI G, DALL'ASTA A, LEONI G, et al. A geometric nonlinear model for composite beams with partial interaction [J]. Engineering Structures, 2010, 32(5): 1384-1396.
[46] 邓继华, 梁璐祎, 谭平, 等. 共旋梁单元几何非线性分析的子结构方法[J]. 土木工程学报, 2024, 57(5): 65-75. (DENG Jihua, LIANG Luyi, TAN Ping, et al.

中国知网 https://www.cnki.net

Substructure method for geometric nonlinear analysis of corotational beam elements[J]. China Civil Engineering Journal, 2024, 57(5): 65-75. (in Chinese))

[47] 白伦华, 刘耀鹏, 王涛, 等. 共旋坐标系下考虑剪切变形的薄壁钢构件纤维梁单元[J]. 建筑结构学报, 2024, 45(10): 181-192, 205. (BAI Lunhua, LIU Yaopeng, WANG Tao, et al. Fiber beam element for thin-walled steel members considering shear deformation based on co-rotational coordinate system[J]. Journal of Building Structures, 2024, 45(10): 181-192, 205. (in Chinese))

[48] LEMES Í J M, DIAS L E S, SILVEIRA R A M, et al. Numerical analysis of steel-concrete composite beams with partial interaction: a plastic-hinge approach[J]. Engineering Structures, 2021, 248: 113256.

[49] OENG T, KEO P, GUEZOULI S, et al. Large displacement analysis of two-layer beam-columns taking into account slip and uplift[J]. Engineering Computations, 2023: 40(1): 265-295.

[50] 陈亮. 组合梁几何非线性与长期效应的同步算法[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2017, 45(8): 1108-1113, 1190. (CHEN Liang. Algorithm of composite beam synchronously considering geometrical nonlinearity and long term effects[J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2017, 45(8): 1108-1113, 1190. (in Chinese))

[51] BORST D, CRISFIELD, REMMERS. Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures[M]. Hoboken: John Wiley & Sons, 2012.

[52] 李东升, 高严培, 郭鑫. 改进共旋坐标法的 Timoshenko 梁单元非线性分析[J]. 工程力学, 2022, 39(11): 22-30, 108. (LI Dongsheng, GAO Yanpei, GUO Xin. Nonlinear analysis of Timoshenko beam element based on improved corotational formulation[J]. Engineering Mechanics, 2022, 39(11): 22-30, 108. (in Chinese))

[53] 邓继华, 谭建平, 谭平, 等. 基于共旋法与稳定函数的几何非线性平面梁单元[J]. 工程力学, 2020, 37(11): 28-35. (DENG Jihua, TAN Jianping, TAN Ping, et al. A geometric nonlinear plane beam element based on corotational formulation and on stability functions[J]. Engineering Mechanics, 2020, 37(11): 28-35. (in Chinese))

[54] BATTINI J M. A non-linear corotational 4-node plane element[J]. Mechanics Research Communications, 2008, 35(6): 408-413.

[55] 蔡松柏, 沈蒲生, 胡柏学, 等. 基于场一致性的 2D 四边形单元的共旋坐标法[J]. 工程力学, 2009, 26(12): 31-34. (CAI Songbai, SHEN Pusheng, HU Baixue, et al. A field consistency based co-rotational finite element procedure for 2D quadrilateral element[J]. Engineering Mechanics, 2009, 26(12): 31-34. (in Chinese))

[56] KEO P, NGUYEN Q H, SOMJA H, et al. Geometrically nonlinear analysis of hybrid beam-column with several encased steel profiles in partial interaction[J]. Engineering Structures, 2015, 100: 66-78.

[57] 邓继华, 邵旭东. 基于 U. L 列式的带刚臂平面梁元非线性分析[J]. 湖南大学学报: 自然科学版, 2012, 39(5): 8-12. (DENG Jihua, SHAO Xudong. Non-linear analysis of plane beam element with rigid arms based on U. L formulation[J]. Journal of Hunan University: Natural Sciences, 2012, 39(5): 8-12. (in Chinese))

[58] 李国强, 张娜思. 组合楼板受火薄膜效应试验研究[J]. 土木工程学报, 2010, 43(3): 24-31. (LI Guoqiang, ZHANG Nasi. Experimental study of membrane action of composite floor slabs under fire[J]. China Civil Engineering Journal, 2010, 43(3): 24-31. (in Chinese))

[59] ČAS B, SAJE M, PLANINC I. Non-linear finite element analysis of composite planar frames with an interlayer slip[J]. Computers & Structures, 2004, 82(23/24/25/26): 1901-1912.

邓继华(1975—),男,博士,教授。主要从事桥梁结构有限元分析方面的研究。

盛希凯(1998—),男,硕士。主要从事桥梁结构有限元分析及程序设计方面的研究

彭建新(1978—),男,博士,教授。主要从事桥梁结构可靠度方面的研究

王　磊(1979—),男,博士,教授。主要从事桥梁智慧运维及桥梁病害诊治方面的研究。

邵旭东(1961—),男,博士,教授。主要从事大跨与新型桥梁结构方面的研究。

中国知网 https://www.cnki.net