DOI：10.20040/j.cnki.1000-7709.2023.20221020

水文计算中伽玛函数的计算方法研究

郭世兴

（陕西省水利电力勘测设计研究院，陕西 西安 710001）

摘要：伽玛函数作为水文频率及洪水计算中应用广泛的函数，计算方法众多，适用范围和计算精度各不相同。为探索适合水文计算的高精度伽玛函数计算方法，采用斯特林级数及其衍生的近似式等不同伽玛函数渐进展开公式进行计算分析，比较各种方法的适用范围及计算精度。结果表明，分段多项式法截断误差最小，成果精度最高；其次为Ramanujan渐近展开式和stirling前四项式。推荐的高精度伽玛函数计算方法可提高水文成果的精度，为各类涉水工程规划、设计中确定工程规模和管理决策提供快速精准的成果。

关键词：水文计算；伽玛函数；渐进展开式；斯特林级数

中图分类号：TV121.1；P333　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1000-7709(2023)05-0015-03

1　引言

概率统计中的皮尔逊Ⅲ型(简称P-Ⅲ型)曲线在工程水文中应用于设计暴雨、洪水、年径流等频率计算，其概率密度函数及分布函数包含伽玛函数，暴雨推求设计洪水的瞬时单位线法中也存在伽玛(简称Γ)函数问题。Γ函数为特殊函数，在数理统计学、物理学、水文水利、通信、金融、农业等众多学科不同实际问题的求解中应用场景广泛[1]。由于特殊函数的复杂性，应用中常通过级数展开的形式对其近似赋值表示，赋值的误差包含舍入误差和截断误差，前者是由浮点运算的特点造成的，后者则是由所选择的数值近似模型所确定[2]。特殊函数更精确的赋值和更高效的运算，一直是数学研究的重要方向。特殊函数近似逼近方法有级数展开、渐近展开、连分式展开、Padé逼近、Chevbyshev逼近、有理函数逼近等方法[3,4]，其中渐近级数逼近广泛应用于求解微分方程及函数的积分。James Stirling[3]在研究二项分布的正态逼近时提出了伽玛函数的Stirling formula，随后衍生出Stirling series。Laplace、Ramanujan、Burnside、Gosper、Windschitl、Nemes、Mortici及陈超平、陈永昌等推导出不种形式的Γ函数展开式，提高其计算精度。文献[5]用简单函数对Γ函数[1,2]区间逼近，误差在0.15%。为此，本文通过不同展开式计算值与文献[6]进行比较，根据误差范围、收敛情况及效果等方面进行分析，选出最优方法以提高水文成果的计算精度。

2　伽玛函数计算方法及成果

2.1　伽玛函数自变量取值范围

P-Ⅲ型曲线中，频率与$\Gamma(4/C_S^2)$(C_S为偏态系数)呈反比。偏态系数C_2^2表示洪水年际变化的不对称度，选取全国74个测站和西南“四江”48个大河测站分析结果表明[7]，C_S最大值为2.05(澜沧江戛旧站)，最小值为1.04(雅砻江泸宁站)；中小测站选取C_S变化较大的陕西省分析：渭河支流葫芦河张村驿站C_S最大值为4.98，汉江安康站C_S最小值为1.53；小流域中漆水河安头站C_S最大值为7.5，岚河六口站C_S最小值为1.35。故P-Ⅲ型曲线中伽玛函数自变量的取值为0.07～3.7。P-Ⅲ型曲线当$C_S>2$时概率密度函数呈“乙”字形，许多干旱、半干旱地区的中小河流洪水，虽然$C_S>2$，但经验柱状图仍呈铃形[8]，所以对自变量小于3.7的取值范围均需精确计算。

瞬时单位线(简称IUH)与$\Gamma(n)$呈反比(自变量n相当于线性水库个数或调节次数)。当流域汇流时间参数K一定时，n值由小变大，入流

收稿日期：2022-05-15，**修回日期：**2022-08-03

基金项目：陕西省水利科技项目(2021SLKJ-17)

作者简介：郭世兴(1973-)，男，正高级工程师，研究方向为水文水资源和水利水电工程规划，E-mail：guosx2022@qq.com

过程受调节次数增多，IUH 变化由剧烈而趋于平缓，洪峰滞后而减低[9]。n 与流域面积除平均比降(小数计)的幂函数呈反比，通过理想流域[10]($F=300\ \mathrm{km}^2$、$L=34.64\ \mathrm{km}$、$J=15‰$)计算，河流加权平均比降从 0.5‰到 100‰，n 值从 3.53 单调递减到 1.92。固定河长和比降，流域面积从 300 km^2 增加到 1000 km^2，相同的净雨，n 从 2.38 递增到 2.74。瞬时单位线参数 $m_2=1/n$，当 $m_2>1$ 时取 $m_2=1$，故 n 最小值为 1。

综上所述，水文分析 P-Ⅲ型曲线和 IUH 中，Γ 函数自变量的取值为 0.07～3.7。

2.2 不同方法的计算结果

Γ 函数的定义[4]为 $\Gamma(z)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t\,(Re(z)>0)$，文献[6]给出[1,2]区间的七位有效数字的伽玛函数值，其他区间根据伽玛函数递推公式 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$进行计算，与利用 Excel 中 GammaLN(•)函数计算值的相对误差在 10^{-8} 以上。选取具有代表性的几个 Γ 函数展开式进行分析比较，结果见表 1。

表 1　伽玛函数数值计算方法的结果表

Tab. 1　Results of asymptotic expansion for the gamma function

自变量 x	图表值	stirling 首四项式	stirling 首两项式	stirling 首两项改进式	分段多项式	Windschitl 式	Ramanujan 式	Mortici 式	Chao-Ping Chen 式
0.15	6.220 272 7	3.832×10^{-1}	-4.807×10^{-2}	-5.303×10^{-2}	-3.334×10^{-8}	8.529×10^{-2}	-6.648×10^{-3}	-1.284×10^{-1}	5.191×10^{-1}
0.20	4.590 843 5	1.536×10^{-1}	-2.635×10^{-2}	-3.036×10^{-2}	-4.618×10^{-8}	5.120×10^{-2}	-5.476×10^{-3}	-1.814×10^{-1}	1.283×10^{-1}
0.46	1.925 226 7	7.308×10^{-2}	-1.529×10^{-2}	-1.865×10^{-2}	2.531×10^{-8}	3.196×10^{-2}	-4.399×10^{-3}	-2.339×10^{-1}	5.897×10^{-3}
0.50	1.772 453 8	7.990×10^{-3}	-1.454×10^{-3}	-3.490×10^{-3}	-4.113×10^{-8}	6.046×10^{-3}	-1.760×10^{-3}	-4.508×10^{-1}	4.158×10^{-3}
0.72	1.267 473 1	5.762×10^{-3}	-7.246×10^{-4}	-2.620×10^{-3}	-2.872×10^{-8}	4.611×10^{-3}	-1.497×10^{-3}	-4.916×10^{-1}	7.778×10^{-4}
0.99	1.005 872 0	1.274×10^{-3}	8.387×10^{-4}	-5.353×10^{-4}	5.033×10^{-8}	1.261×10^{-3}	-6.682×10^{-4}	-7.149×10^{-1}	1.477×10^{-4}
1.25	0.906 402 5	3.030×10^{-4}	1.021×10^{-3}	-7.152×10^{-6}	8.941×10^{-8}	3.563×10^{-4}	-2.913×10^{-4}	-9.870×10^{-1}	5.731×10^{-2}
1.36	0.890 184 5	9.749×10^{-5}	8.931×10^{-4}	6.526×10^{-5}	2.531×10^{-8}	1.324×10^{-4}	-4.399×10^{-3}	-2.339×10^{-1}	-1.545×10^{-3}
1.46	0.885 604 3	6.333×10^{-5}	8.272×10^{-4}	6.243×10^{-5}	-3.667×10^{-8}	9.143×10^{-5}	-2.691×10^{-3}	-3.481×10^{-1}	5.897×10^{-3}
1.95	0.979 880 7	4.364×10^{-5}	7.690×10^{-4}	5.375×10^{-5}	-4.113×10^{-8}	6.670×10^{-5}	-1.760×10^{-3}	-4.508×10^{-1}	1.850×10^{-4}
2.00	1.000 000 0	8.533×10^{-6}	5.372×10^{-4}	-5.846×10^{-6}	8.510×10^{-8}	1.787×10^{-5}	-3.264×10^{-4}	-9.468×10^{-1}	1.398×10^{-4}
3.20	2.423 965 4	8.778×10^{-9}	2.507×10^{-4}	-8.571×10^{-5}	-4.618×10^{-8}	1.644×10^{-6}	-2.397×10^{-5}	-1.814×10^{-1}	1.253×10^{-6}
3.38	2.918 311 3	-9.668×10^{-8}	2.287×10^{-4}	-9.021×10^{-5}	-5.563×10^{-8}	1.240×10^{-6}	-1.829×10^{-5}	6.442×10^{-4}	7.803×10^{-7}
4.00	6.000 000 0	-1.447×10^{-7}	1.714×10^{-4}	-9.913×10^{-5}	0.000×10^{0}	5.701×10^{-7}	-8.049×10^{-6}	2.145×10^{-4}	1.576×10^{-7}

注：相对误差 δ=(图表值—计算值)/图表值。

(1)stirling 级数及其首两项近似式。伽玛函数应用最广泛的 stirling 级数形式为：

$$\Gamma(x+1)\approx\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51\,840x^3}-\frac{571}{2\,488\,320x^4}+O(x^5)\right) \tag{1}$$

式中，x 为自变量；e 为欧拉数；O 为截断误差。

Stirling series 不收敛，不能像泰勒级数展开一样通过无限制的增加项数来提高精度[3]，一般取前四项计算，文献[11]比较后认为增加项数误差反而增大，采用首两项计算。由于 $\Gamma(1)=1$，根据首两项公式，本文推导第二项的分母为 $11.843x$(称为首两项改进式)精度更高。

(2)分段多项式[12](第二公式为欧拉互补定理[13])。即：

$$\begin{cases}\Gamma(x)\approx\dfrac{1}{x+c_0x^2+c_1x^3+\cdots+c_{20}x^{22}}\\ 0<x\leqslant0.5\end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases}\Gamma(x)\approx\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)\Gamma(1-x)}\\ 0.5<x<1\end{cases} \tag{3}$$

式中，$c_i(i=0,1,2,\cdots,20)$为常数。

(3)Windschitl 渐近展开式[14]。即：

$$\Gamma(x+1)\approx\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(x\sinh\frac{1}{x}\right)^{x/2} \tag{4}$$

(4)Ramanujan 渐近展开式[15]。即：

$$\Gamma(x+1)\approx\sqrt{2\pi}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x+\frac{1}{240}\right)^{1/6} \tag{5}$$

(5)C. Mortici 渐近展开式[16]。即：

$$\Gamma(x+1)\approx\sqrt{\frac{2\pi}{e}}\left(\frac{x+1}{e}\right)^{x+1/2}\cdot\exp\left(\frac{1}{12x}-\frac{1}{12x^2}+\frac{29}{360x^3}-\frac{3}{40x^4}\right) \tag{6}$$

(6)Chao-Ping Chen 渐近展开式[17]。即：

$$\Gamma(x+1)\approx\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x\cdot\left(1+\frac{1}{12x^3+24/7x-1/2}\right)^{x^2+53/210} \tag{7}$$

由表 1 可知，水文计算中 Γ 函数的图像在第一象限，且在(0,1.46]区间单调递减，[1.46,∞)区间单调递增；分析图表值与不同 Γ 函数式计算

值的相对误差值,得出分段多项式计算精度最好(相对误差在 10^{-8}),其次 $n<1$ 采用 Ramanujan 式(相对误差在 10^{-3}),$n\geqslant1$ 采用 stirling 前四项式(相对误差在 10^{-4}),在 $n\leqslant1.36$ 时 stirling 首两项改进式略优于 stirling 前四项式。当 n 趋近无穷大时,各种方法计算的截断误差均在减小,计算值趋于相同。

3　结论

a. P-Ⅲ型密度曲线形状的参数 C_S 在洪峰流量计算时取值[1.04,7.5],对应伽玛函数自变量的取值[0.07,3.7]。计算的 $\Gamma(\alpha)$ 值偏小,影响成果超越频率值 p 偏大;IUH 适用于流域面积 300～1 000 km^2 无资料地区的设计暴雨推求设计洪水计算,线性水库个数 n 与流域面积除平均比降(小数计)的幂函数呈反比,取值不小于 1.0。计算的 $\Gamma(n)$ 偏小,影响计算的洪峰流量偏大。

b. 水文计算中 Γ 函数自变量均大于 0,图像在第一象限[0,1.46]区间单调递减,[1.46,∞)区间单调递增。采用分段多项式计算截断误差最小,精度最高;其次为 $0<n<1.0$ 采用 Ramanujan 渐近展开式,$n\geqslant1.0$ 采用 stirling 前四项式法($n\leqslant1.36$ 时 stirling 首两项改进式精度高于前四项式法)。

参考文献:

[1]　刘颖.不完全伽玛函数计算算法改进与应用[D].成都:电子科技大学,2015.

[2]　常晓阳.几类特殊函数的赋值分析研究[D].上海:华东师范大学,2018.

[3]　王竹溪,郭敦仁.特殊函数概论[M].北京:北京大学出版社,2000.

[4]　HARRY BATEMAN. Higher Transcendental Functions,Volume Ⅲ[M]. New York:McGraw-Hill Book Company,Inc.,1953.

[5]　赵晓慎,马建琴.皮尔逊Ⅲ型分布逼近、递推和迭代计算[J].水电能源科学,2006,24(4):44-47.

[6]　谭维炎,张维然.水文统计常用图表[M].北京:水利出版社,1982.

[7]　孙济良.论水文频率线型选优及参数估计[J].水力发电,1992(3):14-20.

[8]　中华人民共和国水利部.水利水电工程设计洪水计算规范:SL 44-2006[S].北京:中国水利水电出版社,2006.

[9]　长江水利委员会.水文预报方法:第二版[M].北京:水利水电出版社,1993.

[10]　长江水利委员会水文局.水利水电工程设计洪水计算手册[M].北京:中国水利水电出版社,1995.

[11]　陈永昌.瞬时单位线法中时段单位线的计算式[J].水文,1994,14(1):44-47.

[12]　王光生,宁方贵,肖飞,等.实用水文预报方法[M].北京:中国水利水电出版社,2008.

[13]　埃伯哈德·蔡德勒,等编. 数学指南—实用数学手册[M].李文林,等译.北京:科学出版社,2012.

[14]　M ABRAMOWITZ, I A STEGUN. Handbook of Mathmatical:Functions with Formulas, Graphs,and Mathematical Tables[M]. New York:Dover Publications,1972.

[15]　RAMANUJAN S. The Lost Notebook and Other Unpublished Papers[M]. Narosa Publishing House, New Delhi ,1988.

[16]　CRISTINEL MORTICI. New improvements of the stirling formula[J]. Applied mathematics and computation,2010,217:699-704.

[17]　CHAO-PING CHEN. A more accurate approximation for the gamma function[J]. Journal of number theory,2016,164: 417-428.

Study on Calculation Method for Gamma Function in Hydrological Computation

GUO Shi-xing

(Shaanxi Provincal Institute of Water Resources and Electric Power Investigation and Design, Xi'an 710001, China)

Abstract: As a widely used function in hydrologic frequency and flood computation, the Gamma function has many calculation methods, and the scope of application and computation accuracy also vary. In order to explore a high-precision Gamma function computation method suitable for hydrological computation, different Gamma function asymptotic expansion formulas such as Stirling series and its derived approximation formula are used for computation and analysis. Comparing the accuracy and application range of various methods, the results show that the piecewise polynomial method has the smallest truncation error and the highest accuracy; The second is the Ramanujan asymptotic expansion and the Stirling first tetranomial. The recommendatory high-precision Gamma function computation method can effectively improve the computation accuracy of hydrological results, which can provide fast and accurate results for the planning and design of various hydro projects to determine project scale and management decisions.

Key words: hydrological computation; Gamma function; asymptotic expansion; Stirling series