

DOI: 10.20040/j.cnki.1000-7709.2023.20220902

# 基于 Copula 函数的长江堤防岸线土体参数分布模型研究

殷永鑫<sup>1a</sup>, 杨文东<sup>1b</sup>, 周鑫隆<sup>2</sup>, 胡少华<sup>1a</sup>

(1. 武汉理工大学 a. 安全科学与应急管理学院; b. 资源与环境工程学院, 湖北 武汉 430070;  
2. 湖北工业大学土木建筑与环境学院, 湖北 武汉 430068)

**摘要:** 针对二维独立分布不能考虑变量间相关性, 导致堤防边坡稳定性的可靠度计算结果不够准确的问题, 基于 171 组长江堤防岸线土体抗剪强度试验数据, 采用 Copula 函数研究长江堤防岸线土体抗剪强度参数间相关性, 利用 AIC、BIC 准则识别最优边缘分布与 Copula 函数, 构建二维联合分布模型, 并分析数据量对参数间相关结构识别的影响。结果表明, 基于 Copula 函数的二维联合分布模型能够较准确地表征长江堤防岸线土体参数间的相关性; 当数据量大于 24 组时, AIC、BIC 准则可准确识别最优 Copula 函数, 为堤防边坡可靠度计算和 Copula 函数模型的构建提供参考。

**关键词:** Copula 函数; 堤防; 抗剪强度参数; 边缘分布; 联合概率分布模型

**中图分类号:** TV871; TU432; TU459<sup>+</sup>.2; TU45 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-7709(2023)02-0202-05

最优 Copula 函数识别的影响。

## 1 引言

长江堤防稳定性对沿岸城市发展及人民生命财产安全具有重要意义, 因此准确评价堤防边坡安全状态有助于及时消除潜在隐患, 保障堤防安全运行。现有长江堤岸基本是在民堤基础上多次加高培厚而成, 堤基堤身土体组成复杂, 其抗剪强度参数粘聚力( $c$ )、内摩擦角( $\varphi$ )存在一定的相关性, 忽略这种相关性, 会造成堤防边坡可靠度计算结果偏于安全<sup>[1]</sup>, Copula 函数模型可表征参数间多种相关结构, 并具有良好的数据重构能力, 在边坡可靠度分析中应用广泛。目前关于 Copula 函数在岩土工程领域的研究<sup>[2-7]</sup>为 Copula 函数在边坡可靠度分析中的应用做出了重要贡献, 然而以往鲜有关于数据量对参数间相关结构识别影响的研究, 为此本文采用 Copula 函数研究长江堤防岸线土体参数  $c$ 、 $\varphi$  值的重构及长江堤防岸线土体参数间的相关性, 并与基于 Gaussian Copula 的二维正态分布模型相比较, 验证了基于 Copula 函数的二维联合分布模型在长江堤防岸线土体参数重构中应用的可行性与适用性, 确定了数据量对

## 2 堤防土体参数二维分布模型

### 2.1 堤防土体参数数据

统计了汉口沿河堤、汉阳沿河堤等 17 座武汉地区长江堤防土体抗剪强度参数  $c$ 、 $\varphi$  值, 共计 171 组, 受工程经济性等因素影响, 实测土体参数较少(如汉口沿河堤仅 19 组), 难以开展土体参数分布估计研究, 为此将相似堤段土体参数汇总分析, 并按数据来源将其分为 2 组, 其中堤基土体参数 80 组用  $A_1$  表示,  $c$  表示为  $c_1$ ,  $\varphi$  为  $\varphi_1$ , 堤身土体参数 91 组用  $A_2$  表示,  $c$  表示为  $c_2$ ,  $\varphi$  为  $\varphi_2$ , 土体参数统计见表 1。

表 1 土体参数统计特性  
Tab. 1 Statistical characteristics of soil parameters

土体参数	土体参数统计量						
	最大值	最小值	均值	变异系数	标准差	Pearson 系数	Kendall 系数
$c_1$ /kPa	44	1	13.31	0.71	9.47	-0.415 6	-0.320 3
$\varphi_1$ /°	16	39	25.18	0.19	4.85		
$c_2$ /kPa	42	0.2	16.61	0.55	9.22	-0.216 4	-0.205 2
$\varphi_2$ /°	33	5	22.85	0.24	5.54		

$A_1$ 、 $A_2$  组土体参数 Pearson 与 Kendall 相关系数对应双尾显著性检验  $P$  值分别为  $4.27 \times 10^{-5}$ 、

收稿日期: 2022-05-01, 修回日期: 2022-05-27

基金项目: 国家自然科学基金项目(52108315); 湖北省教育厅科学技术研究计划青年人才项目(Q20211404); 湖北省自然科学基金项目(2021CFB286)

作者简介: 殷永鑫(1996-), 男, 硕士研究生, 研究方向为边坡工程可靠度与风险分析, E-mail: Yin\_yongxin@whut.edu.cn

通讯作者: 胡少华(1986-), 男, 博士、教授, 研究方向为工程安全与应急管理, E-mail: sh\_kxin@whut.edu.cn

$1.26 \times 10^{-4}$  和  $3.93 \times 10^{-2}$ 、 $4.79 \times 10^{-3}$ , 当  $P$  小于 0.05 认为变量间有统计学差异, 根据  $P$  值与 Pearson、Kendall 相关系数结果, 发现  $c$  与  $\varphi$  间存在一定相关性。为更加直观地了解土体参数间的分布特性, 结合实测数据绘制散点图, 见图 1。其中江永堤土体参数  $c$ 、 $\varphi$  值间存在明显的负相关性,  $c$ 、 $\varphi$  值沿对角线近似对称分布, 说明江永堤  $c$ 、 $\varphi$  值具有基本对称的相关结构,  $A_2$  组  $c$ 、 $\varphi$  值间也存在一定程度的相关性。

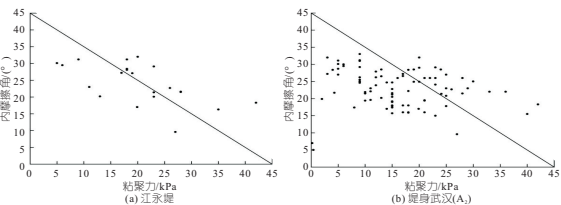


图 1 土体参数散点图

Fig. 1 Scatter diagram of soil parameters

### 2.2 堤防土体参数边缘分布

在研究长江堤防岸线土体抗剪强度参数间相关性, 构建土体参数二维分布模型前需确定其边缘分布函数, 利用边缘分布函数模型近似表征土体参数的实际分布状态, 结合文献[6, 8]选取 4 种表征模型作为备选边缘分布函数拟合土体参数分布特性, 包括截尾正态分布 (TN)、对数正态分布 (LN)、截尾极值 I 型分布 (TG) 和威布尔分布 (WB), 备选边缘分布函数的概率密度函数 (PDF) 与累积分布函数 (CDF) [8], 为尽可能真实地反映土体参数的分布状态, 需采用拟合优度检验方法选取最优边缘分布, 本文采用 AIC、BIC 准则识别判断最优边缘分布函数, 认为具有最小 AIC、BIC 值的边缘分布为最优解, AIC、BIC 计算公式见文献[8]。表 2 为各组  $c$ 、 $\varphi$  值边缘分布函数 AIC、BIC 计算值, 表 3 为最优边缘分布识别结果。由表 2、3 可看出, 不同土体  $c$ 、 $\varphi$  值具有不同的最优边缘分布,  $c$ 、 $\varphi$  值边缘分布除 TN 分布外, 也存在 WB 分布, 这证明参数间的分布类型存在正态以外的其他可能, 为节省计算量采用正态分布近似表征土体参数分布情况的方法可能会降低分析结果的准确性。

表 2 粘聚力、内摩擦角 AIC、BIC 计算值

Tab. 2 Calculated value of cohesion and internal friction angle AIC and BIC

指数 标组	样本 数	TN 分布		LN 分布		TG 分布		WB 分布		
		AIC	BIC	AIC	BIC	AIC	BIC	AIC	BIC	
$c$	$A_1$	80	576.46	581.23	576.18	580.94	566.33	571.10	562.31	567.08
	$A_2$	91	658.97	664.00	763.81	768.83	659.04	664.06	659.47	664.49
$\varphi$	$A_1$	80	482.75	487.52	484.74	489.50	497.52	502.28	487.54	492.31
	$A_2$	91	572.68	577.70	617.07	622.09	664.80	669.82	570.40	575.41

表 3 最优边缘分布及 Copula 函数识别结果

Tab. 3 Optimal marginal distribution and Copula function recognition results

数组	粘聚力 $c$ /kPa	内摩擦角 $\varphi$ /( $^\circ$ )	Copula
$A_1$ (堤基)	WB	TN	Plackett
$A_2$ (堤身)	TN	WB	No. 16

为更加直观地验证各组土体参数对应 AIC、BIC 准则识别最优边缘分布函数的准确性, 给出边缘分布 PDF 曲线和 CDF 曲线见图 2、3。由图 2、3 可看出, 基于 AIC、BIC 准则识别的最优边缘分布类型能较为准确地拟合实测数据的分布特征, 最优边缘分布函数拟合情况与 AIC、BIC 准则识别结果基本一致, 但最优边缘分布函数并不能完全准确拟合参数的分布特征, 拟合情况与原始数据仍存在一定程度的差异, 这一现象在 CDF 曲线中也有所反应。

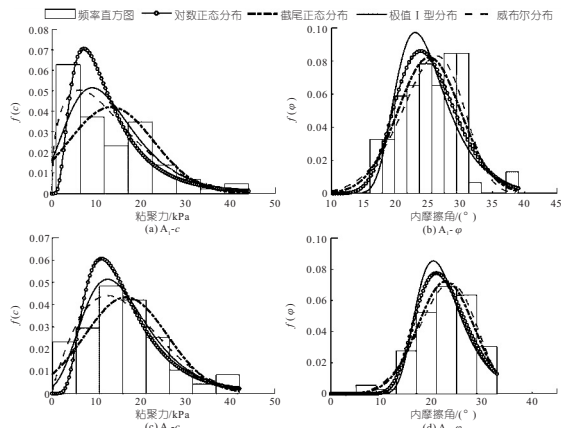


图 2 PDF 曲线和频率分布直方图

Fig. 2 PDF curve and frequency distribution histogram

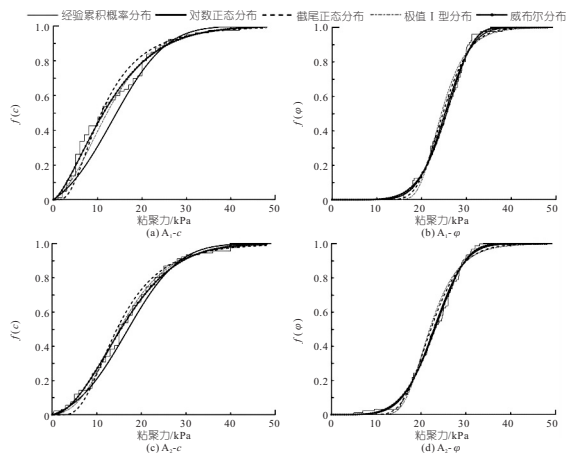


图 3 土体参数 CDF 曲线图

Fig. 3 Soil parameter CDF curve

### 2.3 Copula 函数模型

结合已有研究及  $c$ 、 $\varphi$  值相关系数, 可发现  $c$ 、 $\varphi$  值间存在一定的相关性。为准确表征土体参数间相关性与参数分布状态, 本文采用 Copula 函数建立土体参数二维分布模型。基于 Copula 函数

的二维联合分布模型将参数联合概率分布的构造简化为边缘分布与 Copula 函数的选择,最优边缘分布与 Copula 函数的选择单独进行,可构造出具有任意边缘分布与多种相关结构的联合分布模型<sup>[4]</sup>。根据 Copula 理论,任意一个联合分布函数都可以分解为相应的边缘分布和对应的 Copula 函数,Copula 函数确定了变量间的相关结构与相关性大小,边缘分布函数描述变量的分布情况。基于 Copula 函数理论可得到  $c, \varphi$  的二维联合分布函数,本文选取 Plackett、No. 16、Gaussian、Frank Copula 作为备选 Copula 函数,可同时描述参数间正负两种相关结构<sup>[5,6]</sup>,计算公式分别为:

$$F(c, \varphi) = C(F_1(c), F_2(\varphi), \theta) = C(u, v; \varphi) \quad (1)$$

$$f(c, \varphi) = f_1(c) f_2(\varphi) D(F_1(c), F_2(\varphi), \theta) \quad (2)$$

式中,  $C$  为描述变量  $c, \varphi$  之间相关结构的 Copula 函数;  $\theta$  为 Copula 函数参数;  $F_1(c), F_2(\varphi), f_1(c), f_2(\varphi)$  分别为  $c, \varphi$  的 CDF 与 PDF;  $D(\cdot)$  为连接各边缘分布概率密度函数与 Copula 函数的 PDF。

由式(1)、(2)可知,确定 Copula 函数需要求解参数  $\theta$ , Kendall、Pearson 相关系数与参数  $\theta$  存在式(3)、(4)所示关系<sup>[8]</sup>,可根据式(3)、(4)求解 Copula 函数参数,参数  $\theta$  计算值见表 4。

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(F_1(c), F_2(\varphi), \theta) \cdot dC(F_1(c), F_2(\varphi), \theta) - 1 \quad (3)$$

$$\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} [(x - u_x)(y - u_y) D(F(x), G(y); \theta) f(x) g(y)] dx dy \quad (4)$$

式中,  $x, y$  均为变量,本文变量对应  $c, \varphi$ 。

表 4 Copula 函数参数  $\theta$

Tab. 4 Copula function parameter  $\theta$

数组	Gaussian	Plackett	Frank	No. 16
A <sub>1</sub>	-0.482 1	0.226 7	-3.150 7	0.037 4
A <sub>2</sub>	-0.316 8	0.392 8	-1.913 1	0.065 7

构建基于 Copula 函数的联合分布模型的关键在于最优边缘分布与 Copula 函数的选择。本文以 AIC、BIC 准则作为识别方法,认为具有最小 AIC、BIC 值的 Copula 即为最优 Copula 函数<sup>[4]</sup>,表 5 为备选 Copula 函数 AIC、BIC 计算值,表 3 为最优 Copula 函数识别结果。根据计算结果 A<sub>1</sub>、A<sub>2</sub> 组土体最优 Copula 函数分别为 Plackett、

No. 16 Copula 函数,证明不是所有土体参数最优 Copula 函数都为某种特定类型,如关于土体参数分布模型研究中最优 Copula 函数为 Frank Copula 函数<sup>[4]</sup>,因此具体应用中应根据实际情况重新分析确定 Copula 函数种类,本文选取的 4 种 Copula 函数的 PDF、CDF 公式见文献[8]。

### 2.4 基于 Copula 函数的土体参数联合分布估计

根据 Copula 函数理论,模拟出服从各组土体参数对应最优 Copula 函数相关结构的均匀分布变量  $U$ ,经最优边缘分布函数的反函数转换得到服从最优边缘分布函数和最优 Copula 函数的等效样本。图 4 给出了 A<sub>1</sub>、A<sub>2</sub> 组土体参数相关标准均匀分布变量  $U$  散点图。由图 4 可看出,由于 Copula 函数的差异性,不同模拟数据间呈现不同的相关性。根据各组数据最优 Copula 函数模拟出服从对应最优 Copula 函数的均匀分布变量  $U$ ,经最优边缘分布的反函数得到对应土体的等效样本见图 5,从散点图可直观看出模拟数据能较准确地反映出原始参数间相关结构与参数分布情况,模拟样本基本围绕在实测数据周围,说明基于 Copula 函数的二维联合分布模型具有较好的数据重构能力,所得数据可有效表征土体参数间相关性。

为进一步了解基于 Copula 函数的联合分布模型的数据重构能力,单独选取数据量较多(23 组)的堤段江永堤构建联合分布模型并绘制等效样本散点图,经计算江永堤  $c, \varphi$  值最优边缘分布均为 WB 分布,最优 Copula 函数为 Frank Copula,等效样本与原始数据散点图(图 6)较好地覆盖了实测数据,并基本沿参考线分布,能够较好地表征原始参数相关结构与分布特性。

## 3 基于 Copula 函数的二维分布模型的影响因素分析

### 3.1 二维正态分布模型与最优 Copula 函数构造联合分布模型比较

为确定 Copula 函数构造的土体参数二维联合分布模型与二维正态分布模型的区别,以及边缘分布和 Copula 函数对联合分布模型结果的影响,以 A<sub>2</sub> 组数据为基础进行对比分析见图 7。由

表 5 Copula 函数 AIC、BIC 值

Tab. 5 Copula function AIC、BIC value

数组	Gaussian		Plackett		Frank		No. 16	
	AIC	BIC	AIC	BIC	AIC	BIC	AIC	BIC
A <sub>1</sub>	-18.842 9	-16.460 9	-19.632 9	-17.250 8	-18.144 9	-15.762 9	2.641 8	5.023 8
A <sub>2</sub>	-3.087 7	-0.576 8	-5.760 5	-3.249 7	-5.434 6	-2.923 7	-6.753 9	-4.243 0

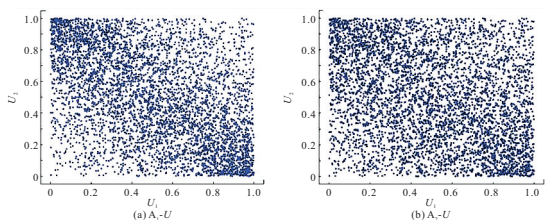


图 4 均匀分布变量  $U$  散点图

Fig. 4 Uniformly distributed variable  $U$  scatter plot

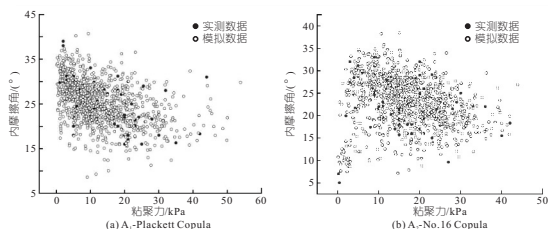


图 5 等效样本与原始数据散点图

Fig. 5 Equivalent sample vs raw data scatter plot

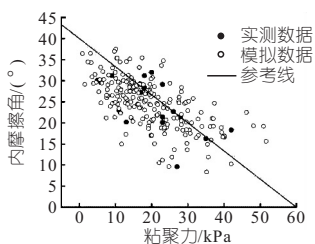


图 6 江永堤等效样本与原始数据散点图

Fig. 6 Scatter diagram of equivalent samples and original data of Jiangyong embankment

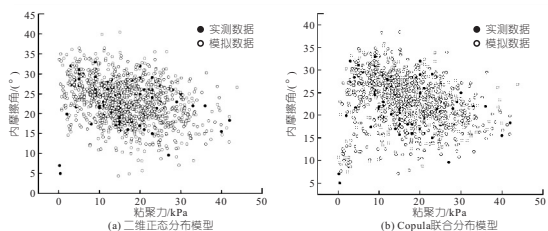


图 7 二维正态与最优 Copula 函数模型对比

Fig. 7 Comparison of two-dimensional normal and optimal Copula function models

于  $A_2$  组  $c$ 、 $\varphi$  最优边缘分布分别为 TN、WB 分布,最优 Copula 函数为 No. 16 Copula,二维正态分布模型采用 Gaussian Copula 函数描述变量间的相关结构类型,边缘分布均为 TN 分布。由图 7 对比发现二维正态分布模型(图 7(a))与最优边缘分布和 Copula 函数构造的二维联合分布模型模拟结果(图 7b)均表征出原始土体参数的相关性,但具体分布形式存在显著差异。最优 Copula 函数构造的联合分布模型模拟数据分布趋势与原始数据最为接近,所得数据基本围绕在实测数据周围,模拟数据能很好地覆盖原始数据。相比之下二维正态分布模型所得数据主要集中在实测数据周围,部分实测数据位于模拟数据边缘,未能准

确表征实测数据的相关结构与分布情况。这也表明基于 Copula 函数的土体参数联合分布模型受边缘分布和 Copula 函数共同影响,不同边缘函数与 Copula 函数组合构造的联合分布之间存在较大差异,准确识别最优边缘分布与 Copula 函数对建立联合分布模型和降低分析结果误差具有重要作用。

### 3.2 数据量对参数相关结构识别的影响

了解数据量对参数间相关结构识别的影响,对联合分布模型的建立与数据收集有较大帮助,为此以  $A_1$  组数据为例,从中随机抽取样本并依次增减数目,计算备选 Copula 函数 AIC、BIC 值,结果见图 8。由图 8 可发现,样本量减少时最优 Copula 函数始终为 Plackett Copula,当样本量小于 24 组,最优 Copula 函数变为 Gaussian Copula。在随机抽样计算中发现,样本量小于 24 组时,最优 Copula 函数可能维持原最优类型不变,但识别结果不稳定,即样本量过少时 AIC、BIC 准则无法准确判断出最优 Copula 函数,数据量对于参数间相关结构识别影响较大,因此为提高数据模拟的准确性,在构建联合分布模型时原始数据收集量不应少于 24 组。

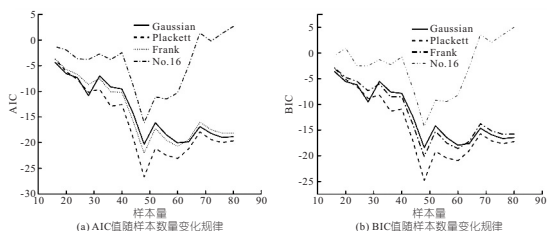


图 8 Copula 函数 AIC、BIC 值随样本数量变化规律

Fig. 8 Copula function AIC and BIC value changes with the number of samples

## 4 结论

- a. 基于 Copula 函数的二维联合分布模型能较为准确地反映长江堤防  $c$ 、 $\varphi$  之间的相关性,较二维独立正态分布适用性更好。
- b. 数据量对最优 Copula 的识别有较大影响,实例证明当数据量少于 24 组时 AIC、BIC 准则识别最优 Copula 函数结果不稳定。
- c. 基于 Copula 函数的二维联合分布模型受边缘分布和 Copula 函数共同影响。

### 参考文献:

[1] 赵寿刚,杨小平,兰雁,等.黄河堤防边坡稳定性的可靠度分析[J].建筑科学,2006(3):36-39.

[2] 方旭,冯晓波. 基于 Copula 函数的边坡可靠度高效分析方法[J]. 中国农村水利水电, 2021(4): 201-206, 211.

[3] 杨超,黄达,张永兴,等. 基于 Copula 理论的岩体抗剪强度参数估值[J]. 岩石力学与工程学报, 2013, 32(12): 2463-2470.

[4] ZHOU X, ZHANG G, HU S, et al. Copula-based approach coupling information diffusion distribution for slope reliability analysis[J]. Bulletin of engineering geology and the environment, 2020, 79(4): 1-16.

[5] TANG X, LI D, ZHOU C, et al. Copula-based ap-

proaches for evaluating slope reliability under incomplete probability information [J]. Structural safety, 2015, 52: 90-99.

[6] 邢婕,唐小松,李典庆,等. 水利水电工程岩基抗剪强度参数二维分布模型构造的 Copula 方法[J]. 岩土力学, 2016, 37(3): 783-792.

[7] 张蕾,李典庆,唐小松,等. 基于贝叶斯理论的抗剪强度参数最优 Copula 函数识别[J]. 岩土力学, 2016, 37(增刊 2): 578-588.

[8] 孔宪京,宋来福,徐斌,等. 基于 Copula 函数的堆石料非线性强度参数相关性及其分布模型研究[J]. 岩土工程学报, 2020, 42(5): 797-807.

## Study on Soil Parameters Distribution Model of Yangtze River Embankment Shoreline Based on Copula Function

YIN Yong-xin<sup>1a</sup>, YANG Wen-dong<sup>1b</sup>, ZHOU Xin-long<sup>2</sup>, HU Shao-hua<sup>1a</sup>

(1a. School of Safety Science and Emergency Management; 1b. School of Resources and Environmental Engineering, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China; 2. School of Civil Engineering, Architecture and Environment, Hubei University of Technology, Wuhan 430068, China)

**Abstract:** Aiming at the problem that the reliability calculation results of embankment slope stability are not accurate due to the fact that the correlation between variables cannot be considered in two-dimensional independent distribution, based on 171 sets of test data of the shear strength of the Yangtze River embankment shoreline soil, Copula function was used to study the correlation between the shear strength parameters of the Yangtze River embankment shoreline soil. The AIC and BIC criteria were used to identify the optimal edge distribution and Copula function, and a two-dimensional joint distribution model was constructed. The influence of data volume on the identification of correlation structure between parameters was analyzed. The results show that the two-dimensional joint distribution model based on Copula function can accurately characterize the correlation between soil parameters of the Yangtze River embankment shoreline; When the data volume is more than 24 groups, AIC and BIC criteria can accurately identify the optimal Copula function, which provides a reference for the reliability calculation of embankment slope and the construction of Copula function model.

**Key words:** Copula function; embankment; shear strength parameters; marginal distribution; joint probability distribution model



(上接第 220 页)

### 参考文献:

[1] 陆继明,毛承雄,范澍,等. 同步发电机微机励磁控制[M]. 北京:中国电力出版社,2006.

[2] 毛承雄,吴建东,娄慧波,等. 基于电流源型变换器的大型同步发电机励磁[J]. 水电能源科学, 2008, 26(3): 172-175.

[3] 童小琴,张敬,刘德红. 热管自冷型整流柜风道设计分析[J]. 低温与超导, 2021, 49(9): 38-41, 60.

[4] 周宇,张敬,田会莉,等. 一种隐式环路环形热管散

热器;中国,201120433196.5[P]. 2012-07-11.

[5] 胡国,李朝晖,杨兴斌,等. 葛洲坝电厂 19F 机组励磁系统状态监测与诊断[J]. 水电自动化与大坝监测, 2005, 29(2): 23-27, 41.

[6] 马龙,周伍,曾广栋,等. 葛洲坝电站 3 号机组增容改造稳定性分析[J]. 大电机技术, 2012(6): 44-47, 54.

[7] 王波,张敬,胡先洪,等. 三峡地下电站国产化励磁系统[J]. 大电机技术, 2011(6): 63-66.

[8] 中国国家标准化管理委员会. 同步电机励磁系统大、中型同步发电机励磁系统技术要求: GB/T 7409.3-2007[S]. 北京:中国标准出版社,2007.

## Development and Application of Loop Heat Pipe Rectifier Cabinet for Excitation System of Giant Hydropower Units

TONG Xiao-qin<sup>1</sup>, ZHANG Jing<sup>2</sup>

(1. Department of Mechanical and Electrical Engineering, Wuhan City College, Wuhan 430083, China; 2. Baihetan Hydropower Plant, China Yangtze Power Co., Ltd, Yichang 443002, China)

**Abstract:** In order to solve the heat dissipation problem of heat pipe rectifier cabinet for excitation system of giant hydropower station, the working principle of loop heat pipe and the processes of development and improvement of loop heat pipe rectifier cabinet were introduced. The advantages of integrated loop heat pipe and horizontal symmetry structure, as well as its application in Wudongde Hydropower Station were analyzed. The practice shows the loop heat pipe rectifier cabinet adopting completely self-cooling heat dissipation mode is in a thermal stable state after long-term operation in the field, and a series of problems, such as dust, noise, power supply, maintenance, can be solved from the design principle. Meanwhile, it can improve the safety, reliability and automation level of the equipment and reduce the energy consumption, the benefits of energy-saving and environmental protection are obvious.

**Key words:** rectifier cabinet; self-cooling; loop heat pipe; energy conservation and environmental protection