

DOI: 10. 20040/j. cnki. 1000-7709. 2023. 20221977

泥沙突变理论在细颗粒泥沙输沙率中的应用

马俊峰, 拾兵, 柏涛, 陈柏文, 王俊杰

(中国海洋大学工程学院, 山东 青岛 266100)

摘要: 基于尖点突变理论, 针对影响泥沙起动、底床冲刷的主要因素, 在不同水流强度下, 建立了恒定流下泥沙起动模式, 以及沙粒雷诺数、希尔兹数与泥沙冲刷强度的非线性方程, 进行了相应的物理模型试验, 并将已有试验得到的沙粒雷诺数代入非线性方程, 探讨了沙粒雷诺数的大小对非线性方程的影响, 将所提公式的计算结果与已有资料进行对比, 发现该理论公式的计算值与试验值具有较好的一致性, 能基本满足对细颗粒泥沙冲刷强度的预测需求。

关键词: 尖点突变理论; 泥沙起动模式; 冲刷; 非线性

中图分类号: TV142

文献标志码: A

文章编号: 1000-7709(2023)08-0048-04

1 引言

天然河床的泥沙颗粒运动过程最早被定义为无泥沙运动、弱动、中动、强动四个阶段, 泥沙起动的这四个过程经非线性理论证明为渐变的尖点突变过程。杨具瑞等^[1]通过非线性理论, 推导了输沙强度的非线性方程, 得到了输沙强度与水流强度、泥沙密实系数、水流切应力和起动粒径的控制方程; 拾兵等^[2]则利用希尔兹极值、相对粒径和反映泥沙之间相互作用的参数建立了波浪作用下的泥沙起动方程; 刘勇^[3]利用尖点突变方程和数值模拟对实测数据进行分析, 得到了较好的拟合结果; 杨少鹏等^[4]针对海底管线, 建立了希尔兹数、无量纲参数与冲刷坑深度的尖点突变模型, 并进行了验证。鉴此, 本文将尖点突变理论应用于泥沙冲刷强度的研究中, 建立了恒定流下泥沙起动模式及沙粒雷诺数希尔兹数与泥沙冲刷强度的非线性方程, 并通过试验验证了尖点突变模型求解泥沙冲刷方程的适用性。

2 泥沙起动冲刷突变模式的建立

泥沙的冲刷起动影响因素众多, 其中最主要的影响因素由水流条件和床沙自身的性质决定。在讨论河流床沙运动时, 常用希尔兹数 θ 表征水流强度, 它是底床表面的剪切应力与床沙水下重

力的函数。沙粒雷诺数 Re_* 是表征沙粒在水流中运动的参数, 与希尔兹数具有一定的函数关系, 因此可作为泥沙冲刷尖点突变模型的另一个控制参量。

推移质泥沙的输移强度一般用无量纲参数 Φ 表示:

$$\Phi = q_b / \sqrt{(s-1)gD_{50}^3} \quad (1)$$

式中, q_b 为单位时间内通过单位宽度的泥沙体积, m^2/s ; s 为泥沙比重; g 为重力加速度, m/s^2 ; D_{50} 为泥沙颗粒的中值粒径, m 。

建立如图 1 所示的坐标系, 泥沙输沙强度 Φ

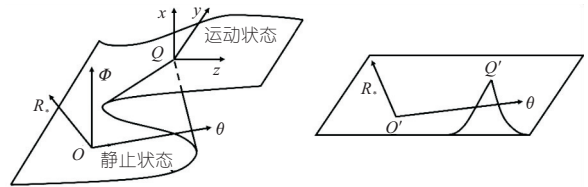


图 1 泥沙运动尖点突变模型图

Fig. 1 Model diagram of cusp mutation of sediment movement
的尖点突变模型推导过程中尖点突变曲面的标准方程为:

$$x^3 + xy - z = 0 \quad (2)$$

在该突变曲面内的分支曲线标准方程为:

$$4y^3 + 27z^2 = 0 \quad (3)$$

将标准式坐标 $Q(x, y, z)$ 从坐标系旋转平移至坐标 $O(\Phi, R_*, \theta)$, 转化方程组为:

$$\begin{cases} x = l_1\Phi + l_2R_* + l_3\theta - a \\ y = m_1\Phi + m_2R_* + m_3\theta - b \\ z = n_1\Phi + n_2R_* + n_3\theta - c \end{cases} \quad (4)$$

收稿日期: 2022-08-21, 修回日期: 2022-10-05

基金项目: 国家自然科学基金项目(U2006227); 山东省政府联合基金资助项目(U1906234)

作者简介: 马俊峰(1998-), 男, 硕士研究生, 研究方向为岸滩防护, E-mail: majunfeng@stu.ouc.edu.cn

通讯作者: 拾兵(1961-), 男, 博士、教授、博导, 研究方向为水力学及河流动力学, E-mail: sediment@ouc.edu.cn

式中, a, b, c 分别为 Q 在新坐标系 $O(\Phi, R_*, \theta)$ 中所对应的坐标值; l_i, m_i, n_i 为原坐标系 $Q(x, y, z)$ 对新坐标系 $O(\Phi, R_*, \theta)$ 的方向余弦。

冲刷强度 Φ 与 x 轴之间的夹角为 0° , 则其方向余弦值为:

$$l_1 = \cos 0^\circ = 1 \quad (5)$$

曲面在坐标系内的方程:

$$f(\Phi, R_*, \theta) = (\Phi + l_2 R_* + l_3 \theta - a) \{ 3 + (m_1 \Phi + m_2 R_* + m_3 \theta - b)(\Phi + l_2 R_* + l_3 \theta - a) - (n_1 \Phi + n_2 R_* + n_3 \theta - c) \} = 0 \quad (6)$$

坐标变换需满足的条件确定公式为:

$$\begin{cases} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1 \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \\ l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0 \\ l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

同时, 在右手坐标系中需满足:

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 1 \quad (9)$$

在泥沙起动冲刷模型中, 泥沙颗粒经历了由静止状态突变为运动状态的过程, 由此可知坐标经过原点, 将原点坐标代入方程中:

$$f(0, 0, 0) = 0 \quad (10)$$

将边界条件及坐标变化的附加条件代入曲面方程:

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix} \quad (11)$$

其中 $\beta = \arctan a$ (12)

联立式(10)~(12), 可得:

$$a^3 - ab - c = 0 \quad (13)$$

联立式(6)与式(11), 可得:

$$(\Phi - a)^3 + (R_* \cos \beta + \theta \sin \beta - b)(\Phi - a) - (-R_* \sin \beta + \theta \cos \beta - c) = 0 \quad (14)$$

将式(12)、(13)代入(14), 可得:

$$(\Phi - a)^3 + a^3 + \Phi(R_* - \beta') \cos \beta - \theta(\sec \beta - \Phi \sin \beta) = 0 \quad (15)$$

式中, a 为 Φ 的最小值, 取 $a = 0.0001$ 可看作泥沙颗粒正处于起动状态^[5]; β' 为泥沙 R_* 的最小代表值, 根据试验可得, 取 0.000011 。

将 $a, \beta, \beta' = b/\cos \beta, \beta = \arctan a$ 代入, 可得:

$$(\Phi - 0.0001)^3 + \Phi(R_* - 0.000011) - \theta(1 - 0.0001\Phi) = 0 \quad (16)$$

式(15)即为利用尖点突变理论得到的恒定流作用下冲刷坑的预测公式。选取部分试验数据对该预测模型进行验证, 发现在模型中存在较大系

统误差。其主要原因为冲刷率模型只是基于定性的考虑, 而实际的曲面模型相对该模型是拓扑等价的关系, 因此选取部分试验数据对试验模型进行定量分析, 从而进一步对该模型实现拓扑变化。

根据试验结果对参数进行拓扑变换:

$$\begin{cases} \theta \rightarrow (4\theta)^3 \\ \Phi \rightarrow 3\Phi/40 \\ R_* - 0.000011 \rightarrow (R_* - 0.000011)^{0.5} \end{cases} \quad (17)$$

将拓扑变换后的式(17)代入式(16)可以得到泥沙冲刷强度的非线性表达式:

$$(3\Phi/40 - 0.0001)^3 + 3\Phi(R_* - 0.000011)^{0.5}/40 - 64\theta^3(1 - 0.000075\Phi) = 0 \quad (18)$$

3 尖点突变模式的模型验证

3.1 试验布置

通过物理模型试验对推导的尖点突变模型进行检验。试验在中国海洋大学河流工程实验室的环形水槽内进行。水槽内宽 50 cm, 高 50 cm 配备有内循环水池, 可以实现水流循环。并配备电磁流量计和两个出水口, 可以实现流量的实时监控和水流顺时针的转换。流速测量采用多普勒点式流速仪(频率设置 30 Hz 可以在 1 s 内采集一个点的 30 个瞬时流速, 测量精度 $\pm 5\%$, ± 0.0001 m/s), 床沙级配组成采用山东耐克特激光粒度分析仪 NKT3100-L(量程为 $0.1 \sim 500 \mu\text{m}$)。试验布置见图 2。

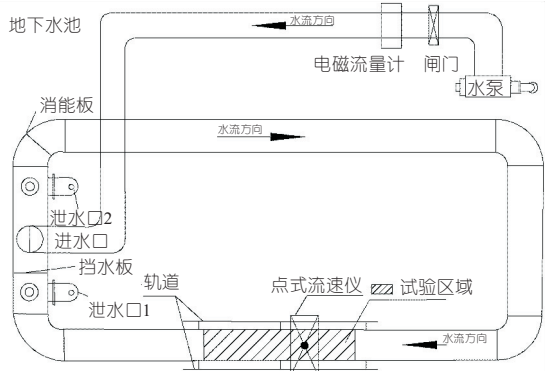


图 2 试验装置布置图

Fig. 2 Sketch map of model test

选取两种不同粒径的天然沙, 经配比混合后得到不同级配的试验用沙, 表 1 为经过配比后不同级配的 5 种试验用沙的沙样特征值。为避免沙样因为长时间放置固结而对冲刷试验造成影响, 在试验开始前利用高温烘干机对试验沙样进行烘干处理, 然后经精密电子秤称重配比, 再加水充分混合, 使土样达到完全饱和含水率的状态, 然后充分搅拌保证不再产生气泡后, 静置 24 h 得到试验

所需沙样,沙样特征值见表 1。

表 1 试验沙样特征值

Tab. 1 Characteristic values of test sand samples μm

沙样	D_{10}	D_{50}	D_{90}	沙样	D_{10}	D_{50}	D_{90}
S_0	139.80	189.67	257.69	S_3	26.47	123.48	221.01
S_1	35.25	157.13	241.47	S_4	24.15	114.52	217.10
S_2	43.05	143.51	233.96				

3.2 试验过程

步骤 1 将表 1 中重塑混合沙均匀铺设在试验区域,试验区域长 2 m,铺设厚度为 20 cm,试验区域上部布设多普勒点式流速仪,用于监测试验中的流速变化,铺设泥沙粒径范围见表 1。试验段进口处铺放卵砾石以达到消能的目的,启动水泵加水至淹没沙床 30 cm 高度处,再启动水槽循环水泵,使水槽内部开始水循环。

步骤 2 启动环形水槽,连接多普勒点式流速仪,控制水槽内流速达到试验流速,冲刷底床床面直至底床床面稳定。

3.3 试验结果

希尔兹数 θ 用于表征泥沙床面切应力作用力与重力作用力的比值,其计算公式为:

$$\theta = \tau_0 / [(\rho_s - \rho)gD_{50}] \quad (19)$$

式中, τ_0 为底床床面切应力, Pa; ρ_s 为泥沙干密度, kg/m^3 ; ρ 为水密度, kg/m^3 。

试验结果与式(17)计算结果见图 3、表 2。由图 3 可知,所推导理论公式在试验冲刷强度 $\Phi < 15$ 时,与试验值具有较高的计算精度。当冲刷强度增加,计算精度下降,但与实测值的误差范围仍保持在 40% 以内,因此可认为所建立的理论公式可以对推移质泥沙运动做出预测。

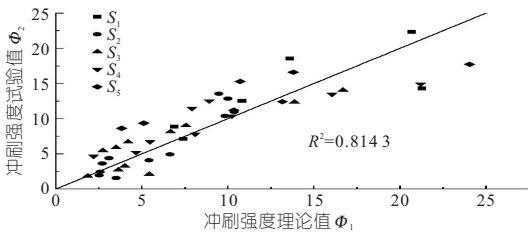


图 3 冲刷强度试验值与计算值对比图

Fig. 3 Comparison of test and calculated values of scour strength

为进一步分析所建公式的合理性,选取 Meyer-peter 水槽试验数据及其建立的输沙率公式、Einstein 水槽数据及其输沙率公式、杨具瑞公式、许晓阳公式^[6]进行验证,结果见图 4。通过分析可看出,在输沙强度 $\Phi < 0.01$ 时,所建公式与杨具瑞、许晓阳公式相关性较好,计算结果稍有偏差。在 $0.01 \leq \Phi < 1$ 的时候,各公式预测结果基本相同。当 $1 \leq \Phi < 100$ 时,即本文输沙率试验段范围,

表 2 基于尖点突变模型的泥沙冲刷强度

计算值与试验值对比

Tab. 2 Comparison of calculated and experimental values of sediment scour strength based on cusp catastrophe model

沙样	水流强度	试验输沙强度	计算输沙强度	误差/%	
S_0	0.261 5	7.411 0	7.124 3	-3.868 8	
	0.281 2	6.881 0	8.858 7	28.742 1	
	0.315 7	10.814 4	12.535 7	15.917 1	
	0.330 0	21.266 1	14.317 5	-32.674 4	
	0.359 7	13.585 4	18.541 6	36.481 9	
	0.382 8	20.671 0	22.348 2	8.113 7	
	S_1	0.157 9	3.497 4	1.568 5	-55.153 6
		0.169 8	2.521 4	1.950 5	-22.643 4
		0.183 4	2.586 4	2.457 7	-4.977 0
		0.209 0	2.700 5	3.637 2	34.685 5
0.217 2		5.411 5	4.082 3	-24.562 4	
0.222 4		3.086 8	4.382 6	41.978 4	
0.231 1		6.631 5	4.917 3	-25.849 5	
0.296 5		9.825 3	10.384 9	5.695 0	
0.301 9		10.362 2	10.962 7	5.794 6	
0.318 3		10.004 3	12.848 0	28.425 0	
S_2	0.323 9	9.462 0	13.538 1	43.079 1	
	0.166 5	1.847 1	1.838 9	-0.441 4	
	0.174 1	5.434 3	2.102 4	-61.311 8	
	0.189 7	3.630 0	2.719 7	-25.075 9	
	0.201 9	4.007 1	3.279 0	-18.171 4	
	0.239 3	2.734 0	5.459 5	99.689 8	
	0.245 6	3.493 7	5.902 2	68.937 4	
	0.256 1	4.201 1	6.692 0	59.291 3	
	0.273 2	6.660 3	8.124 0	21.976 1	
	0.282 9	7.559 8	9.020 4	19.320 4	
S_3	0.314 2	13.865 1	12.357 9	-10.870 4	
	0.328 0	16.685 1	14.058 8	-15.740 5	
	0.227 2	2.190 1	4.672 5	113.347 4	
	0.235 4	4.660 6	5.196 9	11.507 4	
	0.256 5	5.479 3	6.723 4	22.705 3	
	0.269 6	8.097 2	7.807 0	-3.583 6	
	0.296 4	10.228 1	10.374 3	1.429 9	
	0.306 5	7.901 6	11.471 4	45.178 6	
	0.315 6	8.917 5	12.523 8	40.441 1	
	0.323 4	16.045 4	13.475 5	-16.016 2	
S_4	0.334 6	21.199 4	14.924 6	-29.598 7	
	0.278 7	3.820 0	8.624 6	125.773 9	
	0.286 5	5.104 8	9.369 1	83.536 1	
	0.304 1	10.338 0	11.204 1	8.377 5	
	0.314 7	13.156 0	12.417 0	-5.617 2	
	0.337 2	10.710 2	15.275 3	42.623 6	
	0.346 7	13.800 6	16.603 0	20.306 7	
	0.354 3	24.044 5	17.719 0	-26.307 4	

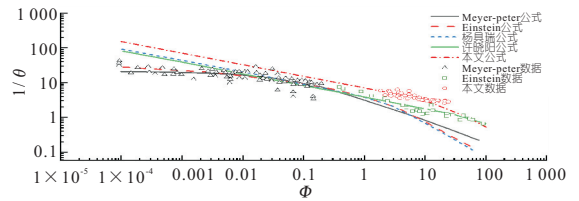


图 4 本文公式与其他公式对比分析

Fig. 4 Comparative analysis of this formula and other formulas

建立的输沙率公式与试验数据拟合情况良好,并与 Einstein 试验数据与许晓阳公式计算值偏差不大。

已有各公式在低输沙率与高输沙率时给出的值偏差较大,甚至可以达到 2~3 倍,在低输沙率的情况下表现尤为明显,钱宁等^[5]认为在 $\theta \leq 0.67$ 时水流条件的确认存在很大误差。在低水流强度条件下,泥沙颗粒呈现少量颗粒发生位移的起动状态,此时精确地确定泥沙的输沙率较困

难。同样,在高强度水流条件下,泥沙呈块状、团状起动,受泥沙不均匀程度和沙床自身性质的影响,通过试验得到各公式计算的输沙强度也存在较大误差。因此,本文在泥沙样本起动后,选取中等水流强度进行大量泥沙冲刷试验,选取能衡量水流作用力的希尔兹数 θ 与能衡量泥沙颗粒自身性质的沙粒雷诺数 Re_* 作为控制参数,借助泥沙起动的非线性过程,对泥沙冲刷机理进行分析,得到中等水流强度下具有较好拟合精度的泥沙非线性冲刷率方程。

3.4 沙粒雷诺数对公式的影响

关于泥沙颗粒的起动条件,最终都反映在水流条件和泥沙自身性质上。水流强度可用希尔兹数统一衡量。对于泥沙颗粒的自身性质,采用泥沙颗粒雷诺数进行衡量,则沙粒雷诺数的取值对泥沙输移公式的影响需进一步探究。本文收集了不同泥沙起动试验的临界沙粒雷诺数^[7]见表 3。

表 3 临界沙粒雷诺数整理

Tab. 3 Critical sand reynolds number finishing

研究者	Re_*	研究者	Re_*
KRAMER H	6.59~7.86	THIJSSE	3.04
CASEY H Y	2.08~73.3	TISION L J	1.61~670.0
SHIELDS A	14.9~206.9	岩恒雄一	47.4~219.0
WES U S	2.47~195.25	李昌华	0.203~66.08
MAVIS F T	104.9	NEILL C R	270.0~2028.0
WHITE C M	310.0	WHITE S J	0.034~1.91
GARND LAB.	12.93~269.0	MANTZ P A	0.13~0.84
SCHOKLITSCH A	150.0~750.0	TALIN M S	0.054~24.85
本文试验用沙	65~110.5		

针对试验所得的各临界沙粒雷诺数值,选取其中部分雷诺数值对公式进行验证(MAVIS F T 试验值, $Re_* = 104.9$; TISION L J 试验值, $Re_* = 670$; NEILL C R 试验值, $Re_* = 2028$),见图 5。可以发现,当选取的沙粒雷诺数为 670 时,新的输沙率公式具有更高的计算精度。且当 $\Phi < 0.01$ 时,本文输沙率公式与杨具瑞、徐晓阳公式计算精度相差不大。当 $0.01 \leq \Phi < 1$ 时,本文公式与其余各公式计算精度相当。在 $1 \leq \Phi < 100$ 时,本文公式与徐晓阳公式拟合精度较高。

Application of Sediment Catastrophe Theory in Fine-grained Sediment Transport Rate

MA Jun-feng, SHI Bing, BAI Tao, CHEN Bai-wen, WANG Jun-jie
(College of Civil Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266100, China)

Abstract: The nonlinear equation was established for the incipient motion of sediment under constant flow, including Reynolds number, Hiltz number and sediment erosion intensity. Based on cusp catastrophe theory, this experimental process focused on the main factors affecting incipient motion of sediment and bottom riverbed scouring, and considered different flow intensity conditions. The Reynolds number of sand particles from other experiments was used in the nonlinear equation of this study to verify the influence of Reynolds number. The theoretical value calculated by this formula has a strong consistency with the test value, after comparing the results and data. Therefore, this nonlinear equation can basically meet the requirements for predicting the scouring intensity of fine sediment.

Key words: cusp catastrophe theory; sediment initiation mode; sediment scour; nonlinearity

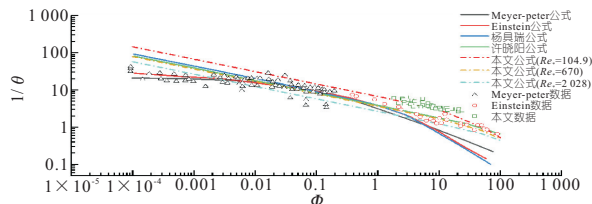


图 5 沙粒雷诺数对输沙率公式精度的影响

Fig. 5 Influence of Re_* on accuracy of sand transport rate formula

4 结论

a. 通过对尖点突变理论的研究,将其应用于泥沙冲刷强度的研究中,通过理论推导,得到了泥沙冲刷强度与沙粒雷诺数、希尔兹数相关的计算公式,并具有较好的适用性。

b. 对影响推移质输沙率的沙粒雷诺数进行分析,发现沙粒雷诺数的取值对本文输沙率公式有一定影响,但不同取值情况下对本文泥沙输移计算精度影响不大,在计算输沙率数值上仍具有较强的适用性。

参考文献:

- [1] 杨具瑞,方铎,何文社,等. 非均匀沙起动的非线性尖点突变模式[J]. 水利学报,2003(1):34-38.
- [2] 拾兵,刘勇,薛旖云,等. 波浪作用下的泥沙尖点突变起动模式[J]. 中国海洋大学学报(自然科学版),2013,43(10):102-105.
- [3] 刘勇. 波浪作用下的非粘性泥沙输移特性研究[D]. 青岛:中国海洋大学,2012.
- [4] 杨少鹏,拾兵,杨立鹏. 泥沙突变理论在海底管线冲刷中应用[J]. 海洋工程,2020,38(1):154-160.
- [5] 钱宁,万兆惠. 泥沙运动力学[M]. 北京:科学出版社,1983.
- [6] 许晓阳,张根广,周双,等. 基于非线性理论的推移质输沙率公式[J]. 水力发电学报,2019,38(11):20-28.
- [7] 程年生. 无粘性均匀沙起动拖曳力的计算式[J]. 水利水运科学研究,1990(3):267-275.