

doi: 10.19562/j.chinasae.qcgc.2025.02.014

# 基于分数阶天棚的车辆ISD悬架动态性能分析\*

沈钰杰<sup>1</sup>, 季 凯<sup>1</sup>, 黄荣楠<sup>1</sup>, 杨晓峰<sup>2</sup>, 刘雁玲<sup>2</sup>

(1. 江苏大学汽车工程研究院, 镇江 212013; 2. 江苏大学汽车与交通工程学院, 镇江 212013)

**[摘要]** 以提升车辆乘坐舒适性为目标, 基于分数阶微积分理论提出分数阶天棚控制策略。首先, 建立分数阶天棚车辆悬架动力学模型, 推导得到分数阶天棚阻尼力和分数阶天棚惯性力的解析表达式, 采用粒子群算法优化求解悬架的关键参数; 针对分数阶力无法物理实现的问题, 以应用机电惯容器的车辆ISD (inertor-spring-damper) 悬架为被控模型, 设计了基于分数阶天棚的模型参考自适应控制器跟踪分数阶悬架的力学性能输出。分别从频域与时域的角度对分数阶天棚惯容和分数阶天棚阻尼悬架进行了动态性能分析。仿真结果表明, 分数阶天棚惯容悬架在降低乘坐舒适性方面相比于整数阶天棚惯容悬架具有更加显著的优势。在随机路面输入下, 分数阶天棚阻尼悬架的车身加速度均方根值降低 18.3%, 而分数阶天棚惯容悬架降低 20.6%, 台架实验结果表明本文提出的基于分数阶天棚的车辆ISD悬架进一步提升了乘坐舒适性, 为车辆ISD悬架的设计提供新思路。

**关键词:** 车辆ISD悬架; 分数阶微积分; 天棚控制; 机电惯容器

## Dynamic Performance Analysis of ISD Suspension for Vehicles Based on Fractional-Order Skyhook Control

Shen Yujie<sup>1</sup>, Ji Kai<sup>1</sup>, Huang Rongnan<sup>1</sup>, Yang Xiaofeng<sup>2</sup> & Liu Yanling<sup>2</sup>

1. Automotive Engineering Research Institute, Jiangsu University, Zhenjiang 212013;

2. School of Automotive and Traffic Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013

**[Abstract]** With the aim of improving vehicle ride comfort, in this paper a fractional-order skyhook control strategy based on the fractional order calculus theory is proposed. Firstly, a fractional-order skyhook vehicle suspension dynamic model is established to derive analytical expressions for the fractional-order skyhook damping force and fractional-order skyhook inertial force. Subsequently, particle swarm optimization algorithm is used to optimize the key parameters of the suspension. In order to solve the problem that fractional-order force cannot be realized physically, a vehicle ISD (inertor-spring-damper) suspension with mechatronic inertor is chosen as the controlled model. A model reference adaptive controller based on fractional-order skyhook is designed to track the mechanical performance output of the fractional-order suspension. Dynamic performance analyses of fractional-order skyhook inertor suspension and fractional-order skyhook damper suspension is conducted from both frequency-domain and time-domain perspectives. Simulation results show that fractional-order skyhook ISD suspension has more significant advantages in reinforcing ride comfort than integer-order skyhook ISD suspension. Under random road input, the root-mean-square value of vehicle body acceleration of fractional-order skyhook damper suspension decreases by 18.3%, while the fractional-order skyhook ISD suspension decreases by 20.6%. The bench test results demonstrate that the vehicle ISD suspension based on fractional-order skyhook further enhances ride comfort, offering new insights for the design of vehicle ISD suspension.

**Keywords:** vehicle inertor-spring-damper suspension; fractional-order theory; skyhook control; mechatronic inertor

\* 国家自然科学基金(52072157)、中国科协青年人才托举工程项目(2022QNRC001)、中国博士后科学基金资助项目(2024T171048, 2024M753653)、江苏高校青蓝工程项目和江苏省研究生科研与实践创新计划(SJCX23\_2084)资助。

原稿收到日期为 2024 年 06 月 28 日, 修改稿收到日期为 2024 年 08 月 18 日。

通信作者: 沈钰杰, 副教授, 博士, E-mail: shenyujie@ujs.edu.cn。

## 前言

悬架系统的性能优劣是影响汽车行驶性能的重要因素之一。作为承载车身质量、缓冲与衰减路面不平度冲击的总成装置<sup>[1]</sup>,由弹簧与阻尼二元件构成的悬架不仅支撑着车身质量,还能有效地吸收路面带来的振动,对提升车辆的乘坐舒适性<sup>[2-3]</sup>、驾驶稳定性<sup>[4-5]</sup>和安全性<sup>[6-7]</sup>起着至关重要的作用。惯容器作为一种新型两端点机械元件,突破了传统“弹簧-阻尼”结构对悬架性能提升的制约,它的引入使得“质量-弹簧-阻尼器”机械网络跃迁至“惯容器-弹簧-阻尼器”网络。研究如何有效地利用惯容器,探索其在机械网络中的作用原理,是车辆ISD (inertor-spring-damper)悬架系统在垂向动力学领域亟待解决的问题。

国内外关于车辆ISD悬架系统的研究大多数针对的还是被动悬架<sup>[8-10]</sup>,这种结构只涉及惯容器、弹簧和阻尼3类元件的不同串并联连接方式。然而,随着道路条件的改变和驾驶需求的提高,传统被动悬架显示出局限性。因此,半主动和主动车辆ISD悬架系统应运而生,以提供更高级别的性能调节和适应性。Zhang等<sup>[11]</sup>结合惯容器和阻尼器组成双天棚结构,以适应道路和载荷条件的变化。Hu等<sup>[12]</sup>采用天棚隔振结构,以乘坐舒适性为导向对半主动悬架进行了优化设计。张丽霞等<sup>[13]</sup>建立了开关型、平滑型天棚控制半主动悬架仿真模型,分析得到了平滑天棚策略的控制效果,结果表明可以进一步提高舒适性。王越等<sup>[14]</sup>针对1/4车辆动力学模型,融合了开关型天棚控制策略与线性二次调节器(LQR)控制方法,提出一种天棚-线性二次调节器(SH-LQR)复合控制策略,相较于单独的控制策略,在全频域范围内展现了更为卓越的控制效果。

然而,现有研究的半主动/主动控制策略都是基于整数阶微积分理论,提升效果有限,而分数阶微积分可以拓展参数调整的灵活性,更准确地描述悬架系统的动态特性,获得更佳的控制效果<sup>[15]</sup>。吴光强等<sup>[16]</sup>和李健等<sup>[17]</sup>都以半主动空气悬架为研究对象,建立了基于分数阶天棚阻尼的车辆动力学模型,将仿真结果与整数阶天棚阻尼半主动悬架进行对比分析,结果表明分数阶天棚阻尼悬架在车身加速度控制中优于整数阶天棚阻尼悬架,能更有效地抑制车身共振,改善乘坐舒适性。王勇等<sup>[18]</sup>建立了分数阶惯容悬架系统动力学模型,分析结构参数对悬架动

态特性的作用机理,结果表明相较整数阶惯容悬架系统,分数阶惯容悬架系统能进一步减小车身振动。常宇健等<sup>[19]</sup>针对分数阶阻尼的悬架模型进行主动控制研究,建立分数阶阻尼的2自由度1/4车模型,设计了分数阶PTD<sup>n</sup>控制器的主动控制悬架,相较于传统PID控制,分数阶PTD<sup>n</sup>控制进一步改善了汽车悬架的平顺性和稳定性。

现有研究成果表明,分数阶微积分在复杂动态系统的描述和控制上,展现出了无可比拟的优势。然而,将分数阶天棚控制策略应用于车辆ISD悬架系统中的动态性能尚未探索。因此,本文首先建立基于分数阶天棚的车辆悬架动力学模型,通过粒子群算法优化求解悬架的关键参数。然后为实现分数阶天棚力的效果,以分数阶天棚悬架为参考模型,应用机电惯容器的车辆ISD悬架为实际被控模型设计模型参考自适应控制器跟踪分数阶悬架的力学性能输出,进而从时域和频域的角度分析分数阶天棚ISD悬架的动态特性。最后,通过力学性能测试对车辆ISD悬架进行台架试验验证,旨在进一步拓展车辆ISD悬架的设计方法,提升乘坐舒适性。

## 1 基于分数阶天棚的悬架动力学建模

### 1.1 分数阶微积分理论

分数阶微积分通过将微积分的概念扩展至分数甚至复数阶次,其定义的合理性和科学性已经在实践中得到检验。分数阶微积分算子的定义<sup>[20]</sup>为

$${}_{t_0}D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t), & \alpha > 0 \\ f(t), & \alpha = 0 \\ \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau^{-\alpha}, & \alpha < 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中:  ${}_{t_0}D_t^\alpha$  表示分数阶微积分的操作算子;  $t$  为自变量;  $\alpha$  表示微积分阶次;  $t_0$  为自变量的下边界。

目前,在分数阶微积分中有几种应用较广的定义,其中Grünwald-Letnikov (GL)定义利于把给定信号的 $\alpha$ 阶导数求出来,适合于数值计算,因此本文采用GL定义:

$${}_{t_0}^{GL}D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor (t-t_0)/h \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (2)$$

在初始条件为0时,GL分数阶微分的拉普拉斯变换为

$$L\{ {}_{t_0}D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) \quad (3)$$

### 1.2 基于分数阶天棚的车辆悬架动力学模型

在理想的模型中,天棚力是一个理论上的概念,它代表了车辆行驶时由天空施加在车身上的理想力。然而,在实际的悬架设计与运行中无法实现这种天棚力。因此,为模拟这种理想情况,需要在车辆的簧上质量和非簧上质量之间引入一个可调的阻尼或惯容。本文所提出的基于分数阶天棚的车辆悬架动力学模型如图1所示。

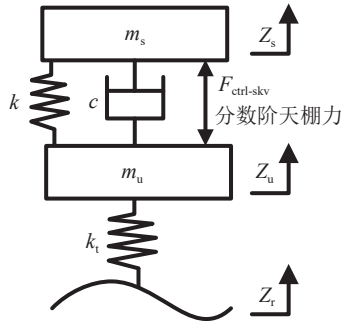


图1 分数阶天棚悬架模型

其动力学方程为

$$\begin{cases} m_s \ddot{z}_s + k(z_s - z_u) + c(\dot{z}_s - \dot{z}_u) + F_{ctrl} = 0 \\ m_u \ddot{z}_u - k(z_s - z_u) - c(\dot{z}_s - \dot{z}_u) + k_t(z_u - z_r) - F_{ctrl} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

式中:\$k\$为弹簧刚度;\$c\$为基值阻尼系数;\$m\_s\$、\$m\_u\$分别为簧上、簧下质量;\$k\_t\$为轮胎等效刚度系数;\$z\_r\$为路面粗糙度的垂直输入位移;\$z\_s\$、\$z\_u\$分别为簧上、簧下的垂直位移;\$Z\_s\$、\$Z\_u\$和\$Z\_r\$分别为\$z\_s\$、\$z\_u\$和\$z\_r\$的拉普拉斯变换;\$F\_{ctrl-sky}\$为分数阶天棚力。

根据天棚控制策略,可以推导得到分数阶阻尼力与分数阶惯容力的表达式为

$$\begin{cases} F_{ctrl-c} = \begin{cases} c_{max} D^\alpha (z_s - z_u), \dot{z}_s (\dot{z}_s - \dot{z}_u) \geq 0 \\ c_{min} D^\alpha (z_s - z_u), \dot{z}_s (\dot{z}_s - \dot{z}_u) < 0 \end{cases}, 0 < \alpha < 1 \\ F_{ctrl-b} = \begin{cases} b_{max} D^\beta (z_s - z_u), \ddot{z}_s (\ddot{z}_s - \ddot{z}_u) \geq 0 \\ b_{min} D^\beta (z_s - z_u), \ddot{z}_s (\ddot{z}_s - \ddot{z}_u) < 0 \end{cases}, 1 < \beta < 2 \end{cases} \quad (5)$$

式中:\$D^\alpha\$是分数阶算子;\$\alpha\$、\$\beta\$为分数阶阶次;\$c\_{min}\$是最小阻尼系数;\$c\_{max}\$是最大阻尼系数;\$b\_{min}\$是最小惯质系数;\$b\_{max}\$是最大惯质系数。

选取悬架模型簧上质量和簧下质量的位移和速度以及路面输入作为系统的输入向量\$X\_m\$:

$$X_m = [\dot{z}_s \quad \dot{z}_u \quad z_s \quad z_u \quad z_r]^T \quad (6)$$

输出向量\$Y\_m\$:

$$Y_m = [\ddot{z}_s \quad z_s - z_u \quad k_t(z_u - z_r)]^T \quad (7)$$

被控模型的状态空间方程如下:

$$\begin{cases} \dot{X}_m = A_m X_m + B_m F_m + E_m W \\ Y_m = C_m X_m + D_m F_m \end{cases} \quad (8)$$

其中:

$$A_m = \begin{bmatrix} \frac{-c}{m_s} & \frac{c}{m_s} & \frac{-k}{m_s} & \frac{k}{m_s} & 0 \\ \frac{c}{m_u} & \frac{-c}{m_u} & \frac{k}{m_u} & \frac{-(k+k_t)}{m_u} & \frac{k_t}{m_u} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.111u \end{bmatrix}$$

$$B_m = \begin{bmatrix} \frac{-1}{m_s} \\ \frac{1}{m_u} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; E_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.111 \times 40 \times \sqrt{G_0 u} \end{bmatrix}$$

$$C_m = \begin{bmatrix} \frac{-c}{m_s} & \frac{c}{m_s} & \frac{-k}{m_s} & \frac{k}{m_s} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_t & -k_t \end{bmatrix}$$

$$D_m = \begin{bmatrix} \frac{-1}{m_s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$W = w_0(t)$$

悬架模型的相关参数如表1所示。

表1 悬架模型参数

参数	数值
簧载质量 \$m_s\$/kg	320
非簧载质量 \$m_u\$/kg	45
轮胎刚度 \$k/(kN \cdot m^{-1})\$	192

### 1.3 路面模型

#### 1.3.1 正弦路面输入模型

本文采用的正弦型路面输入模型如下:

$$Z_r = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (9)$$

式中:\$A\$为振幅;\$\omega\$为频率;\$\varphi\$为相位。

#### 1.3.2 随机路面输入模型

采用的路面输入模型<sup>[21]</sup>如下:

$$\dot{z}_r = -0.111[uz_r(t) + 40\sqrt{G_0 u} w_0(t)] \quad (10)$$

式中:\$z\_r(t)\$为路面不平度垂向输入位移;\$G\_0\$为路面不平度系数;\$w\_0(t)\$为均值为0的白噪声。

## 2 基于分数阶天棚的车辆悬架参数优化

参数优化设计综合考虑悬架的车身加速度和轮胎动载荷指标,本文采用改进的粒子群优化算法,并结合遗传算法中的交叉、变异操作,使得其全局搜索能力强且可以快速收敛。优化算法的目标函数为

$$f = w_1 \frac{BA(X)}{BA_{pas}} + w_2 \frac{DTL(X)}{DTL_{pas}} \quad (11)$$

式中: $w_1$ 、 $w_2$ 为加权系数,分别为0.7、0.3; $BA(X)$ 为待优化的分数阶天棚悬架的车身加速度均方根值; $BA_{pas}$ 为被动悬架的车身加速度均方根值; $DTL(X)$ 为待优化悬架的轮胎动载荷均方根值; $DTL_{pas}$ 为被动悬架的轮胎动载荷均方根值。

优化变量的选取如下:支撑弹簧的刚度系数 $k$ 、阻尼器的阻尼系数 $c$ 、分数阶天棚阻尼的最大阻尼系数 $c_{max}$ 与最小阻尼系数 $c_{min}$ 、分数阶天棚阻尼的阶数 $\alpha$ 、分数阶天棚惯容的最大惯质系数 $b_{max}$ 与最小惯质系数 $b_{min}$ 和分数阶天棚惯容的阶数 $\beta$ 。

仿真工况设定在随机路面输入下,路面不平度等级为C级,车速为20 m/s时得到如表2所示的悬架参数。

表2 参数优化结果

悬架	参数
整数阶天棚阻尼	$k=11827 \text{ N/m}$ , $c=634 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ , $c_{max}=653 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ , $c_{min}=300 \text{ N}\cdot\text{s/m}$
整数阶天棚惯容	$k=10000 \text{ N/m}$ , $c=1307 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ , $b_{max}=10 \text{ kg}$ , $b_{min}=5 \text{ kg}$
分数阶天棚阻尼	$k=10000 \text{ N/m}$ , $c=401 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ , $c_{max}=1294 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ , $c_{min}=781 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ , $\alpha=0.9$
分数阶天棚惯容	$k=10000 \text{ N/m}$ , $c=862 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ , $b_{max}=218 \text{ kg}$ , $b_{min}=23 \text{ kg}$ , $\beta=1.1$

## 3 基于分数阶天棚的车辆ISD悬架自适应控制器设计

由于在实际工况中,分数阶算子无法采用控制器进行实现,本文采用模型参考控制器,通过将分数阶天棚的车辆悬架作为参考模型,车辆ISD悬架作为被控模型跟踪参考模型的性能输出。

### 3.1 参考模型及被控模型建模

参考模型的状态空间方程已由式(8)给出,被控

模型如图2所示。

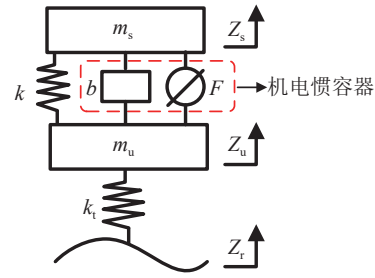


图2 被控模型

图2中模型的动力学方程为

$$\begin{cases} m_s \ddot{z}_s + k(z_s - z_u) + b(\dot{z}_s - \dot{z}_u) + F = 0 \\ m_u \ddot{z}_u - k(z_s - z_u) - b(\dot{z}_s - \dot{z}_u) + k_t(z_u - z_r) - F = 0 \end{cases} \quad (12)$$

选取悬架模型簧上质量和簧下质量的位移和速度以及路面输入作为系统的输入向量 $X_p$ :

$$X_p = [\dot{z}_s \quad \dot{z}_u \quad z_s \quad z_u \quad z_r]^T \quad (13)$$

输出向量 $Y_p$ :

$$Y_p = [\ddot{z}_s \quad z_s - z_u \quad k_t(z_u - z_r)]^T \quad (14)$$

被控模型的状态空间方程如下:

$$\begin{cases} \dot{X}_p = A_p X_p + B_p F_p + E_p W \\ Y_p = C_p X_p + D_p F_p \end{cases} \quad (15)$$

其中:

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-km_u}{M} & \frac{km_u - k_t b}{M} & \frac{k_t b}{M} \\ 0 & 0 & \frac{km_s}{M} & \frac{A_{p24}}{M} & \frac{k_t(m_s + b)}{M} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.111u \end{bmatrix}$$

$$B_p = \begin{bmatrix} \frac{-m_u}{M} \\ \frac{m_s}{M} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; E_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.111 \times 40 \times \sqrt{G_0} u \end{bmatrix}$$

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-km_u}{M} & \frac{km_u - k_t b}{M} & \frac{k_t b}{M} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_t & -k_t \end{bmatrix}$$

$$D_p = \begin{bmatrix} \frac{-m_u}{M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} W &= w_0(t) \\ M &= m_s m_u + m_s b + m_u b \\ A_{p24} &= -(k_s m_s + k_b b + k m_s) \end{aligned}$$

### 3.2 误差函数的建立

由于路面激励信号在实际应用中难以直接测量,因此选择悬架簧上质量的速度和位移作为系统的状态向量,而簧下质量的速度和位移被设定为输入向量。基于这些定义,参考模型及被控模型的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{X}_m = A_m X_m + B_m F_m + E_m W_m \\ \dot{X}_p = A_p X_p + B_p F_p + E_p W_p \end{cases} \quad (16)$$

在构建可调系统时,运用多种调节机制,包括被控模型的反馈调节器 $P_1$ 、参考模型的控制向量增益 $P_2$ 以及前馈调节器 $P_3$ 。这些调节器共同确保系统能够根据当前状态和外部输入进行动态调整。

$$F_p = P_1 X_p + P_2 F_m + P_3 W \quad (17)$$

将上式代入被控模型的状态方程得:

$$\dot{X}_p = (A_p + B_p P_1) X_p + B_p P_2 F_m + (B_p P_3 + E_p) W \quad (18)$$

状态误差为

$$e = X_m - X_p \quad (19)$$

对上式求导得:

$$\dot{e} = A_m e + (A_m - A_p - B_p P_1) X_p + (B_m - B_p P_2) F_m + (E_m - B_p P_3 - E_p) W \quad (20)$$

### 3.3 自适应律的求解

在自适应控制系统中,由于状态矩阵是固定的,不能直接进行调整,因此须通过修改反馈调节器 $P_1$ 、参考模型的控制向量增益 $P_2$ 以及前馈调节器 $P_3$ 来实现误差函数的归零,从而确保被控模型与参考模型达到一致。

$$\begin{cases} A_m = A_p + B_p P_1^* \\ B_m = B_p P_2^* \\ E_m = B_p P_3^* + E_d \end{cases} \quad (21)$$

式中 $P_1^*$ 、 $P_2^*$ 、 $P_3^*$ 分别表示被控模型与参考模型一致时的 $P_1$ 、 $P_2$ 和 $P_3$ 的稳态取值。

整合式(20)和式(21)可得:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A_m e + B_m (P_2^*)^{-1} (P_1^* - P_1) X_p + \\ & B_m (P_2^*)^{-1} (P_2^* - P_2) F_m + \\ & B_m (P_3^*)^{-1} (P_3^* - P_3) W \end{aligned} \quad (22)$$

令式(22)中的 $P_1^* - P_1 = \tilde{P}_1$ 、 $P_2^* - P_2 = \tilde{P}_2$ 和 $P_3^* - P_3 = \tilde{P}_3$ ,则式(22)可以简写成:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A_m e + B_m (P_2^*)^{-1} \tilde{P}_1 X_p + \\ & B_m (P_2^*)^{-1} \tilde{P}_2 F_m + B_m (P_2^*)^{-1} \tilde{P}_3 W \end{aligned} \quad (23)$$

本文选取的Lyapunov函数如式(24)所示。

$$V = \frac{1}{2} [e^T W e + \text{tr}(\tilde{P}_1^T R_1^{-1} \tilde{P}_1) + \text{tr}(\tilde{P}_2^T R_2^{-1} \tilde{P}_2) + \text{tr}(\tilde{P}_3^T R_3^{-1} \tilde{P}_3)] \quad (24)$$

对Lyapunov函数求导可得:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{2} [e^T (A_m^T P + W A_m) e] + e^T W B_m (P_2^*)^{-1} \tilde{P}_1 X_p + \\ & e^T W B_m (P_2^*)^{-1} \tilde{P}_2 F_p + e^T W B_m (P_2^*)^{-1} \tilde{P}_3 W + \\ & \frac{1}{2} \text{tr}(\dot{\tilde{P}}_1^T R_1^{-1} \tilde{P}_1 + \tilde{P}_1^T R_1^{-1} \dot{\tilde{P}}_1) + \\ & \frac{1}{2} \text{tr}(\dot{\tilde{P}}_2^T R_2^{-1} \tilde{P}_2 + \tilde{P}_2^T R_2^{-1} \dot{\tilde{P}}_2) + \\ & \frac{1}{2} \text{tr}(\dot{\tilde{P}}_3^T R_3^{-1} \tilde{P}_3 + \tilde{P}_3^T R_3^{-1} \dot{\tilde{P}}_3) \end{aligned} \quad (25)$$

由于 $A_m$ 为稳定矩阵,存在正定对称矩阵 $Q$ 使 $A_m^T W + W A_m = -Q$ ,因此,式(25)可以改写为

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\frac{1}{2} e^T Q e + \\ & \text{tr}(X_p e^T W B_m (P_2^*)^{-1} \tilde{P}_1 + \dot{\tilde{P}}_1^T R_1^{-1} \tilde{P}_1) + \\ & \text{tr}(F_p e^T W B_m (P_2^*)^{-1} \tilde{P}_2 + \dot{\tilde{P}}_2^T R_2^{-1} \tilde{P}_2) + \\ & \text{tr}(W_p e^T W B_m (P_2^*)^{-1} \tilde{P}_3 + \dot{\tilde{P}}_3^T R_3^{-1} \tilde{P}_3) \end{aligned} \quad (26)$$

式(24)的Lyapunov函数大于零,而式(26)的Lyapunov函数的导数小于零,根据李雅普诺夫稳定性定理,本文的自适应控制律在输入连续时,自适应控制系统是全局稳定的。

自适应控制律为

$$\begin{cases} P_1(t) = \int_0^t \bar{R}_1 B_m^T W e X_p^T dt + P_1(0) \\ P_2(t) = \int_0^t \bar{R}_2 B_m^T W e F_m^T dt + P_2(0) \\ P_3(t) = \int_0^t \bar{R}_3 B_m^T W e W_p^T dt + P_3(0) \end{cases} \quad (27)$$

## 4 仿真分析

### 4.1 频域分析

采用1.3.1节中的正弦路面输入,振幅 $A$ 取0.01,频率 $\omega$ 为 $2\pi f$ ,相位 $\varphi$ 取 $\frac{\pi}{2}$ , $f$ 为0.1~15且步长为0.1的数值型向量,分析5种不同悬架在正弦路面输入条件下的动态性能。从图3可以看出,在低频段,天棚控制策略均能降低车身加速度、悬架动行程和轮胎动载荷,从而提升乘坐舒适性以及操纵稳定性,而在中高频段,这些悬架的效果各有差异。相较于整数阶天棚元件,分数阶天棚元件在低频段进一步改善了乘坐舒适性与操纵稳定性。此外,整数阶天棚元件在中高频段的轮胎动载荷优化上并不理

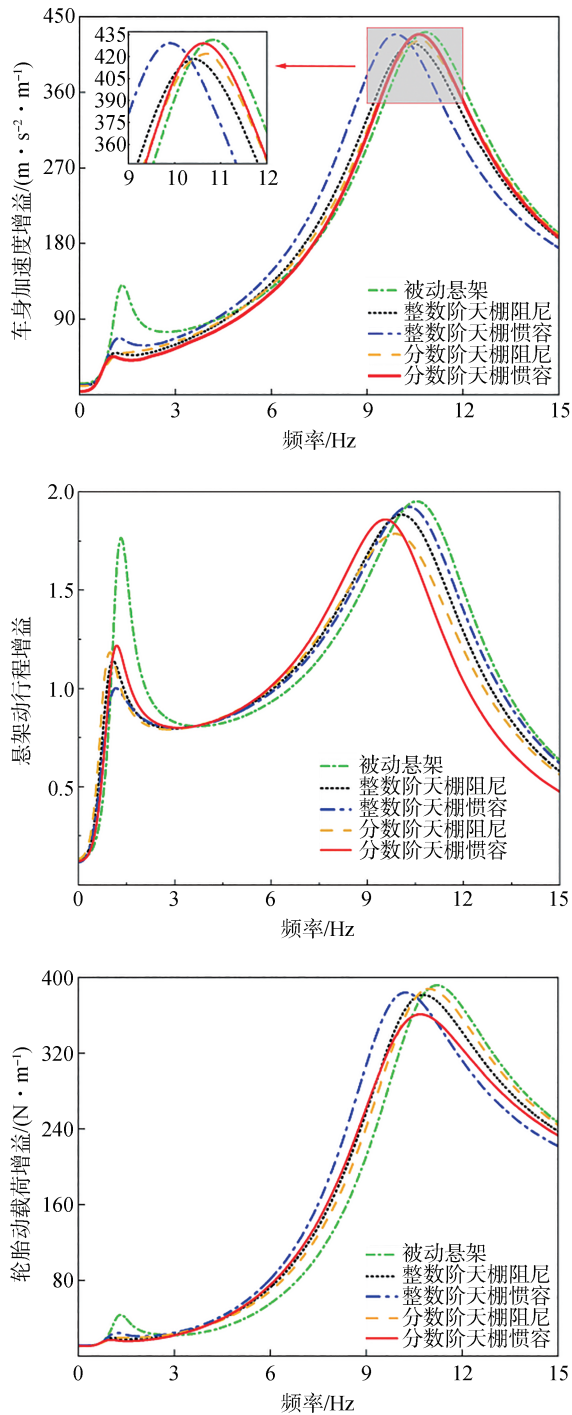


图3 正弦路面输入下的增益对比图

想,相比之下,分数阶天棚惯容悬架在中高频段轮胎动载荷显著降低。虽然整数阶天棚元件也能够不同程度上降低轮胎动载荷,但其降低幅度低于分数阶天棚元件。

分析表明,分数阶天棚元件在提升乘坐舒适性方面相比于整数阶天棚元件具有更加显著的优势。这一点尤其在低频段的车身加速度上表现得最为明

显,虽然分数阶天棚惯容在悬架动行程增益上的改善效果并不显著,但相较于被动悬架依旧有着较好的优化效果。且分数阶天棚惯容在轮胎动载荷低频处的表现优于其他悬架类型,并在全频段显著降低轮胎动载荷。因此,分数阶天棚惯容悬架为最优结构。

#### 4.2 时域分析

采用1.3.2节中的随机路面输入,假设车辆以20 m/s在C级等级路面上行驶,仿真时间设置为60 s。表3和图4分别为5种不同悬架的均方根值和时域响应,其中 $J_1$ 、 $J_2$ 、 $J_3$ 分别为车身加速度、悬架动行程和轮胎动载荷均方根值。

从图4和表3可以看出,分数阶天棚元件相比于被动悬架系统以及整数阶天棚元件,在提升悬架性能方面具有显著优势。其中,分数阶天棚惯容的车身加速度均方根值降低20.6%,而整数阶天棚惯容车身加速度均方根值降低12.7%。从整数阶天棚元件的性能表现来看,虽然也能够不同程度上降低乘坐舒适性,但其降低幅度相较于分数阶天棚元件要小。尽管天棚阻尼元件对悬架动行程有着较好的抑制效果,分数阶天棚阻尼的悬架动行程均方根值降低了17.3%,而分数阶天棚惯容的悬架动行程均方根值仅降低6.3%。但本文聚焦于提升车辆乘坐舒适性的同时尽可能地降低天棚策略对车辆的操纵稳定性的负面影响。

表3 不同悬架均方根值比较

悬架结构	$J_1/(m \cdot s^{-2})$	降幅	$J_2/m$	降幅	$J_3/N$	降幅
被动悬架	1.26		0.0127		869.19	
整数阶天棚阻尼	1.04	17.5% ↓	0.0109	14.2% ↓	893.54	2.8% ↑
整数阶天棚惯容	1.10	12.7% ↓	0.0111	12.6% ↓	902.38	3.8% ↑
分数阶天棚阻尼	1.03	18.3% ↓	0.0105	17.3% ↓	884.61	1.7% ↑
分数阶天棚惯容	1.00	20.6% ↓	0.0119	6.3% ↓	876.59	0.9% ↑

采用天棚策略的悬架系统中轮胎动载荷的均方根值普遍呈现出恶化的趋势。尤其是在整数阶天棚元件中,这一负面效果尤为明显。其中,整数阶天棚惯容轮胎动载荷均方根值恶化3.8%,分数阶天棚惯容轮胎动载荷均方根值恶化0.9%,进一步验证了分数阶算子在缓解或减少操纵稳定性恶化方面的有效性。

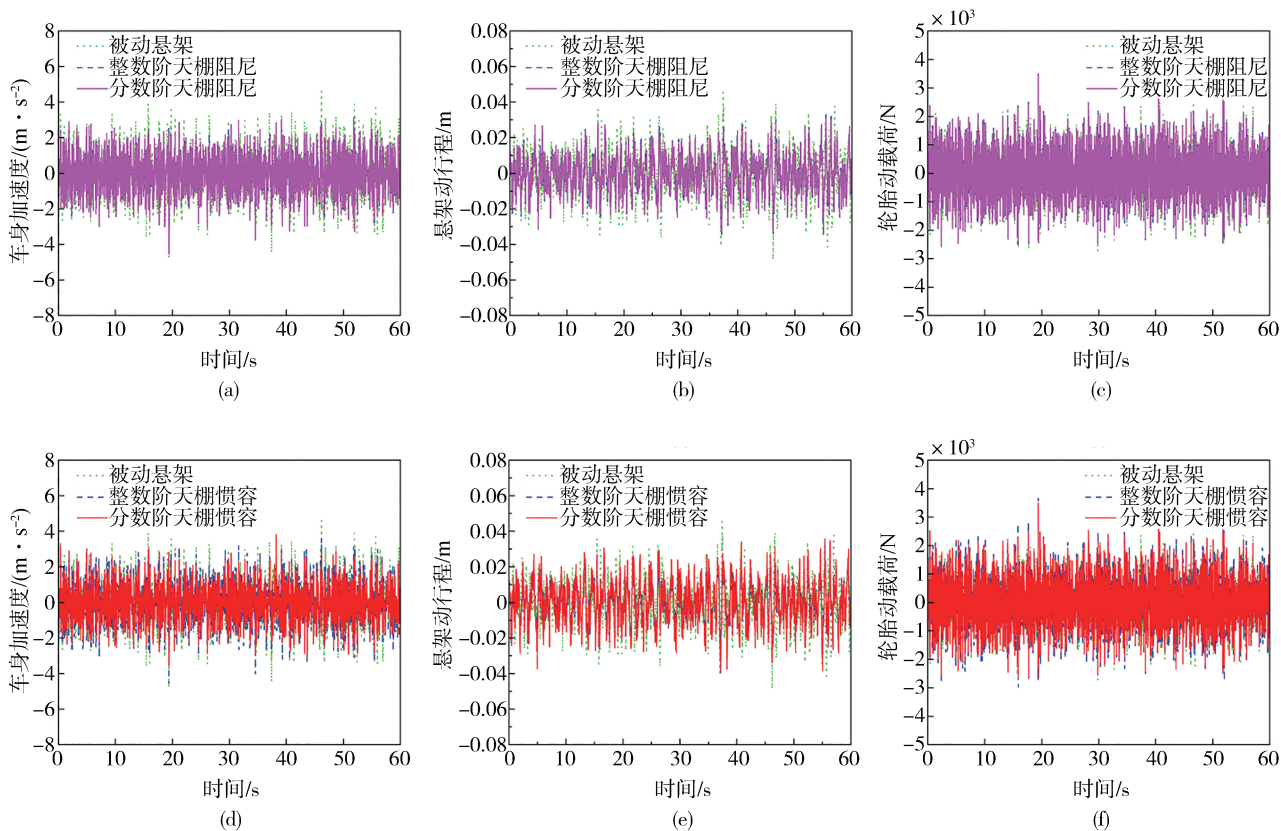


图4 5种不同悬架的时域响应

综上所述,相较于整数阶天棚元件,分数阶天棚元件(分数阶天棚阻尼、分数阶天棚惯容)进一步提升悬架系统的乘坐舒适性,同时可有效减少对操纵稳定性的负面影响。其中,分数阶天棚惯容表现出最佳的乘坐舒适性,为天棚策略中的最优结构配置。

## 5 台架试验

### 5.1 试验方案

本文所设计的车辆ISD悬架系采用滚珠丝杠式机电惯容器<sup>[22]</sup>作为执行装置,借助dSPACE原型开发系统进行了半实物仿真试验。首先将在MATLAB中建立的模型参考自适应控制策略导入dSPACE系统中,进而得出与控制相匹配的自适应规律。随后,利用旋转电机驱动器驱动电机,对悬架系统实施精准控制,如图5所示。

### 5.2 正弦路面输入试验

在振幅为10 mm的正弦路面激励条件下,激振频率范围为[0.1-15] Hz时,从图6可以看出,相比于被动悬架,本文所研究的车辆ISD悬架的车身加



图5 试验实物布置

速度在全频域内均有降低,且在低频和高频的共振峰均有所下降,其中低频的共振峰下降明显,可以看出其抑制车身加速度的效果十分显著;轮胎动载荷也没有明显的恶化,同时在低频和高频的共振峰处有所下降,说明车辆ISD悬架起到了良好隔振效果。

### 5.3 随机路面输入试验

图7和图8分别给出了车速为10、20、30 m/s在随机路面等级为A、B、C输入下悬架系统的车身加速度和轮胎动载荷。表4展示了在C级路面下各车速

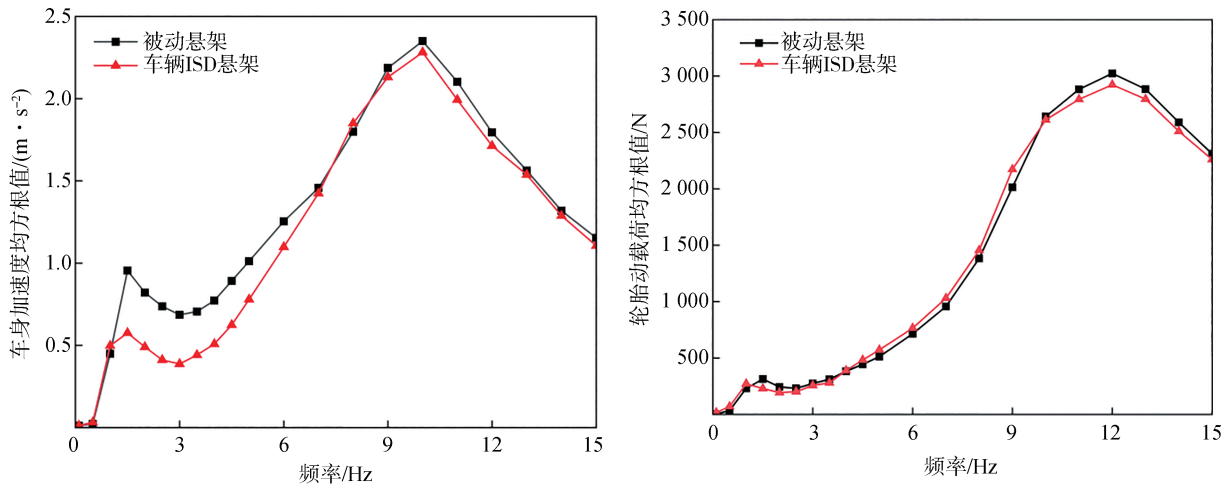


图6 正弦路面输入下的增益对照图

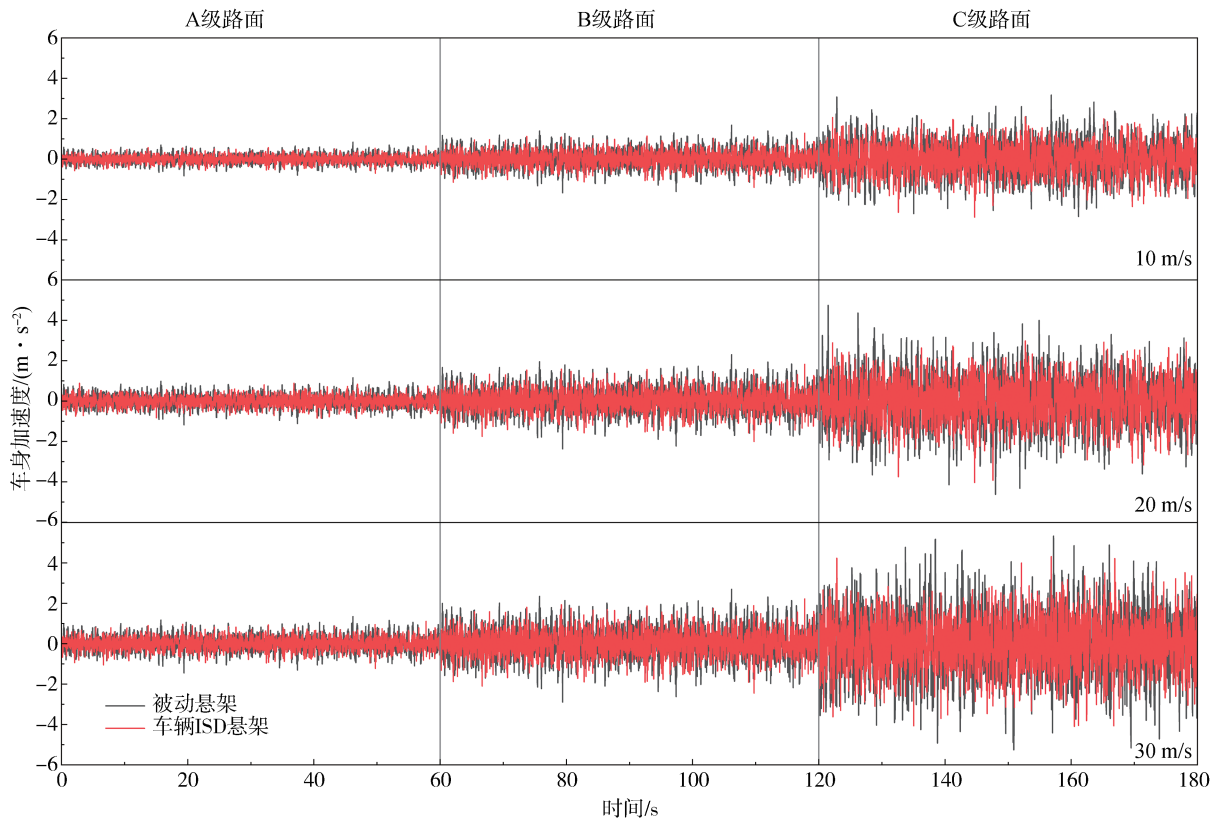


图7 两种不同悬架的车身加速度对比

的悬架系统的性能比较。可以看出,在车速为20 m/s时,本文所研究的车辆ISD悬架在车身加速度均方根值方面相较于被动悬架降幅达到了20.5%。同时,轮胎动载荷均方根值恶化了1.8%,进一步证明了基于分数阶天棚的车辆ISD悬架在综合性能上的优势。

## 6 结论

本文将分数阶微积分理论与天棚控制策略相结合,提出了分数阶天棚控制策略。通过建立基于分数阶天棚的车辆悬架动力学模型,以应用机电惯容

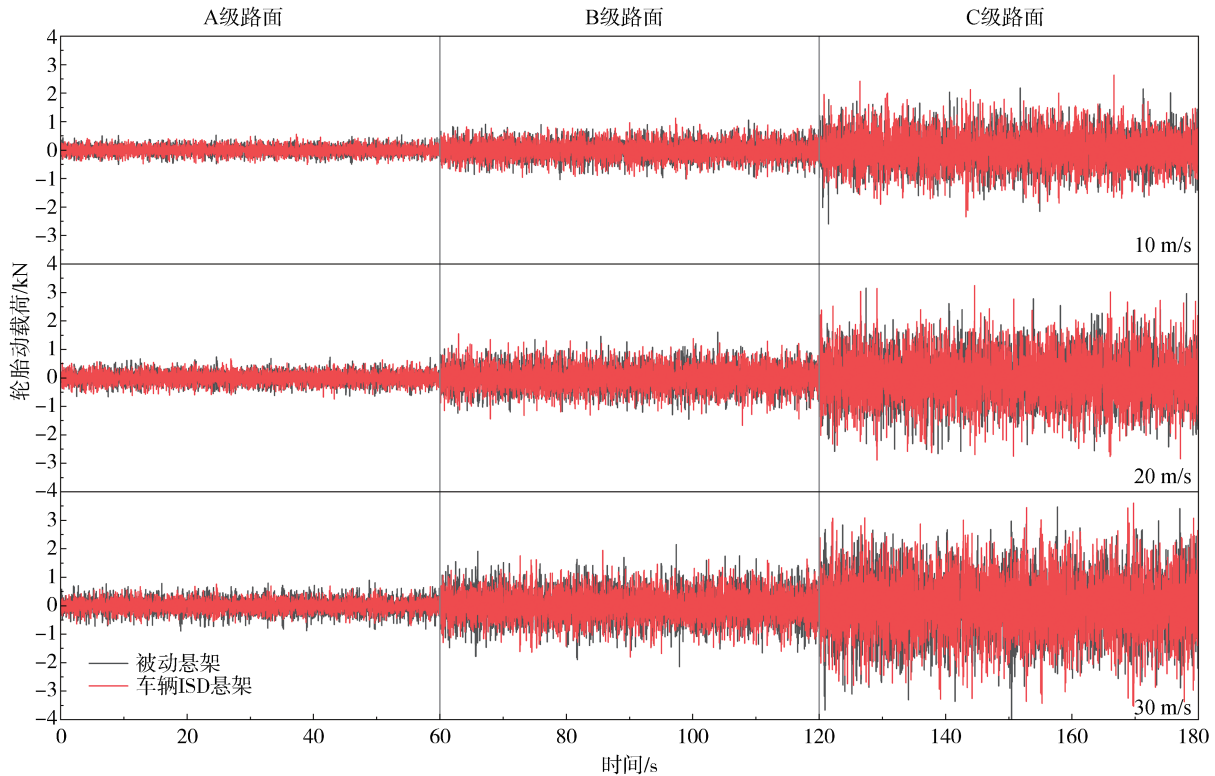


图8 两种不同悬架的轮胎动载荷对比

表4 C级路面输入下不同悬架的性能对比

悬架结构	车速/ ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )	车身加速度/ ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ )	降幅	轮胎动 载荷/N	降幅
被动悬架	10	0.85		631	
	20	1.22		890	
	30	1.49		1 103	
车辆ISD 悬架	10	0.68	20.0% ↓	645	2.2% ↑
	20	0.97	20.5% ↓	906	1.8% ↑
	30	1.21	18.8% ↓	1 126	2.1% ↑

器的车辆ISD悬架物理实现了分数阶天棚阻尼力和惯性力。仿真与试验结果表明,分数阶天棚惯容的悬架在时域和频域上都要优于传统被动悬架以及整数阶天棚惯容悬架,且车身加速度的优化最为明显。研究结论可以为车辆ISD悬架的控制策略与系统设计提供参考。

### 参考文献

- [1] 陈家瑞. 汽车构造[M]. 北京: 机械工业出版社, 2007: 199-243.  
CHEN J R. Automotive structure[M]. Beijing: China Mechanical Press, 2007: 199-243.
- [2] CAO D P, SONG X B, AHMADIAN M. Editors' perspectives: road vehicle suspension design, dynamics, and control[J]. Vehicle System Dynamics, 2011, 49(1-2): 3-28.
- [3] SHIM T, VELUSAMY P C. Improvement of vehicle roll stability by varying suspension properties[J]. Vehicle System Dynamics, 2011, 49(1-2): 129-152.
- [4] BEI S Y, HUANG C, LI B, et al. Hybrid sensor network control of vehicle ride comfort, handling, and safety with semi-active charging suspension[J]. International Journal of Distributed Sensor Networks, 2020, 16(2): 1-10.
- [5] LI H X, LI S W, SUN W C. Vibration and handling stability analysis of articulated vehicle with hydraulically interconnected suspension[J]. Journal of Vibration and Control, 2019, 25(13): 1899-1913.
- [6] SAKTHIVEL R, ARUNKUMAR A, MATHIYALAGAN K, et al. Robust reliable control for uncertain vehicle suspension systems with input delays[J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 2015, 137(4): 1-13.
- [7] LIANG W, MEDANIC J, RUHL R. Analytical dynamic tire model[J]. Vehicle System Dynamics, 2008, 46(3): 197-227.
- [8] 张孝良, 陈龙, 聂佳梅, 等. 2级串联型ISD悬架频响特性分析与试验[J]. 江苏大学学报(自然科学版), 2012, 33(3): 255-258.  
ZHANG X L, CHEN L, NIE J M, et al. Analysis and experiment of frequency response characteristics of two-stage series-connected ISD suspension[J]. Journal of Jiangsu University (Natural Science Edition), 2012, 33(3): 255-258.
- [9] HU Y, CHEN M Z Q. Performance evaluation for inerter-based

- dynamic vibration absorbers[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2015, 99: 297-307.
- [10] 杜甫, 毛明, 陈轶杰, 等. 基于动力学模型与参数优化的ISD悬架结构设计及性能分析[J]. *振动与冲击*, 2014, 33(6): 59-65.
- DU F, MAO M, CHEN Y J, et al. Structure design and performance analysis of inerter-spring-damper suspension structure based on dynamic model and parameter optimization [J]. *Journal of Vibration & Shock*, 2014, 33(6): 59-65.
- [11] ZHANG X L, ZHU J, NIE J, et al. Analysis of inertance and damping double-skyhook control strategies for a semi-active device combining an adjustable inerter and damper [J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2022, 29(10).
- [12] HU Y L, CHEN M Z Q, SUN Y H. Comfort-oriented vehicle suspension design with skyhook inerter configuration [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2017, 405: 34-47.
- [13] 张丽霞, 李宁斐, 梁冠群, 等. 阻尼连续可调半主动悬架平滑天棚控制策略研究[J]. *噪声与振动控制*, 2023, 43(2): 169-173, 184.
- ZHANG L X, LI N F, LIANG G Q, et al. Research on the smooth skyhook control strategy for damping continuously adjustable semi-active suspension [J]. *Noise and Vibration Control*, 2023, 43(2): 169-173, 184.
- [14] 王越, 刘夫云, 邓聚才, 等. 半主动悬架SH-LQR阻尼控制策略仿真研究[J]. *噪声与振动控制*, 2022, 42(3): 68-72, 79.
- WANG Y, LIU F Y, DENG J C, et al. Simulation study on the SH-LQR damping control strategy for semi-active suspension [J]. *Noise and Vibration Control*, 2022, 42(3): 68-72, 79.
- [15] 王海涛, 董新民, 王建刚. 分数阶控制理论及其在飞机俯仰控制中的应用[J]. *飞行力学*, 2011, 29(5): 44-48.
- WANG H T, DONG X M, WANG J G. Fractional order control theory and its applications in aircraft longitudinal control [J]. *Flight Dynamic*, 2011, 29(5): 44-48.
- [16] 吴光强, 黄焕军, 叶光湖. 基于分数阶微积分的汽车空气悬架半主动控制[J]. *农业机械学报*, 2014, 45(7): 19-25.
- WU G Q, HUANG H J, YE G H. Semi-active control of automotive air suspension based on fractional order calculus [J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2014, 45(7): 19-25.
- [17] 李健, 杨建, 柴星, 等. 车辆半主动悬架分数阶天棚阻尼控制器设计[J]. *机械研究与应用*, 2018, 31(5): 140-144.
- LI J, YANG J, CHAI X, et al. Design of fractional-order skyhook damping controller for vehicle semi-active suspension [J]. *Mechanical Research and Application*, 2018, 31(5): 140-144.
- [18] 王勇, 季明珠, 张步云. 分数阶惯容悬架动态特性研究[J]. *噪声与振动控制*, 2023, 43(1): 12-18.
- WANG Y, JI M Z, ZHANG B Y. Research on dynamic characteristics of fractional-order inerter suspension [J]. *Noise and Vibration Control*, 2023, 43(1): 12-18.
- [19] 常宇健, 田沃沃, 金格, 等. 基于分数阶 $PI^{\alpha}D^{\mu}$ 的非线性分数阶主动控制悬架研究[J]. *燕山大学学报*, 2020, 44(6): 575-580.
- CHANG Y J, TIAN W W, JING G, et al. Research on nonlinear fractional-order active control suspension based on fractional-order  $PI^{\alpha}D^{\mu}$  controller [J]. *Journal of Yanshan University*, 2020, 44(6): 575-580.
- [20] 薛定宇. 分数阶微积分学与分数阶控制[M]. 北京: 科学出版社, 2018.
- XUE D Y. *Fractional calculus and fractional-order control* [M]. Beijing: Science Press, 2018.
- [21] 吴志成, 陈思忠, 杨林, 等. 基于有理函数的路面不平度时域模型研究[J]. *北京理工大学学报*, 2009, 29(9): 795-798.
- WU Z C, CHEN S Z, YANG L, et al. Research on time-domain model of road roughness based on rational function [J]. *Transactions of Beijing Institute of Technology*, 2009, 29(9): 795-798.
- [22] 杨晓峰, 颜龙, 沈钰杰, 等. 新型机电惯容器抗振性能仿真与实验研究[J]. *振动、测试与诊断*, 2022, 42(2): 343-349, 411.
- YANG X F, YAN L, SHEN Y J, et al. Simulation and experimental study on anti-vibration performance of new mechatronic inerter [J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2012, 42(2): 343-349, 411.

(上接第308页)

- [25] LIU Y, WU S, CHEN H, et al. Brake wear induced PM10 emissions during the world harmonised light-duty vehicle test procedure-brake cycle [J]. *Journal of Cleaner Production*, 2022, 361: 132278.
- [26] 刘笃优, 马尧, 门正宇, 等. 汽车制动磨损颗粒物排放特征与影响因素[J]. *汽车工程学报*, 2020, 10(5): 342-349.
- LIU D Y, MA Y, MEN Z Y, et al. Emission characteristics and influential factors of vehicle brake wear particulate matter [J]. *Chinese Journal of Automotive Engineering*, 2020, 10(5): 342-349.
- [27] DUBOKA C, TODOROVIC J, ARSENIC Ž. Application of an inertia dynamometer to check braking performance against theoretical predictions [C]. 6th International Heavy Vehicles Seminar, Christchurch, New Zealand, 1996.
- [28] 肖叶龙, 成煜, 赵火平, 等. 制动磨损源大气颗粒物排放的研究进展[J]. *摩擦学学报*, 2022, 42(6): 1290-1304.
- YE X L, CHENG Y, ZHAO H P, et al. Airborne brake wear particle emissions: a review [J]. *Tribology*, 2022, 42(6): 1290-1304.