

# 考虑时变参考和转向延迟的自动驾驶车辆轨迹跟踪控制方法\*

杨正才<sup>1,2</sup>, 张慧泉<sup>2</sup>, 葛林鹤<sup>1,2</sup>, 孙天骏<sup>3</sup>

(1. 湖北汽车工业学院, 汽车动力传动与电子控制湖北省重点实验室, 十堰 442002;

2. 湖北汽车工业学院汽车工程学院, 十堰 442002;

3. 吉林大学, 汽车底盘集成与仿生全国重点实验室, 长春 130022)

**[摘要]** 最优控制方法已成为自动驾驶横向运动控制的主流研究和工业部署方法。LQR方法拥有在线计算量小、实时性好等优点而被广泛使用,但是无法考虑时变参考和转向延迟。延时的存在会导致LQR方法在高速时失去稳定性,因此在解决该问题的同时维持LQR小计算量的特性十分必要。本文在保证实时性的前提下,解决了LQR无法考虑时变参考和转向延迟的问题。将道路曲率作为时变参考、转向延迟特性作为纯延时和1阶惯性环节考虑进跟踪误差状态方程中,将控制时域对应的KKT逆矩阵部分查表到实时求解器中,旨在减小计算量并保证控制器的实时性。仿真试验结果表明:所搭建的EqLPV-MPC控制器可以有效处理道路变曲率工况;相比于LQR方法,车速为72 km/h的双移线工况下横向误差降低39%,航向角误差下降52%,质心侧偏角减少28%。实车试验结果表明,在双移线工况下,本文所搭建的控制器可以将最大横向误差控制在0.1 m以内。

**关键词:** 轨迹跟踪;模型预测控制;道路曲率;转向延迟;惯性环节

## Trajectory Tracking Control Method for Autonomous Vehicles Considering Time-Varying Reference and Steering Delay

Yang Zhengcai<sup>1,2</sup>, Zhang Huiquan<sup>2</sup>, Ge Linhe<sup>1,2</sup> & Sun Tianjun<sup>3</sup>

1. Hubei University of Automotive Technology, Hubei Key Laboratory of Automotive Power Train and Electronic Control, Shiyan 442002;

2. Automotive Engineering College, Hubei University of Automotive Technology, Shiyan 442002;

3. Jilin University, National Key Laboratory of Automotive Chassis Integration and Bionics, Changchun 130022

**[Abstract]** The optimal control method has become the mainstream research and industry deployment method for lateral motion control in autonomous driving. The LQR method is widely used due to its advantages of low online computational load and good real-time performance, but it cannot consider time-varying references and steering delay. The presence of delay can cause the LQR method to lose stability at high speed, so it is essential to solve this problem while maintaining the characteristic of small computational load of LQR. In this paper, under the premise of ensuring real-time performance, the problem of LQR's inability to consider time-varying references and steering delay is solved. By incorporating road curvature as time-varying references, steering delay characteristics as pure delay, and first-order inertial section into the tracking error state equation, and by looking up the KKT inverse matrix part corresponding to the control time domain into the real-time solver, the aim is to reduce computational load and ensure controller real-time performance. The simulation results demonstrate that the constructed EqLPV-MPC controller can effectively handle road curvature changes. Compared to the LQR method, under the condition of dual

\* 汽车动力传动与电子控制湖北省重点实验室开放基金项目(ZDK12023A05)、湖北省武汉市科技重大专项(2022013702025184)和中央引导地方科技发展专项项目(2022BGE248)资助。

原稿收到日期为2024年04月22日,修改稿收到日期为2024年06月22日。

通信作者:葛林鹤,博士,E-mail:20230070@huat.edu.cn;张慧泉,硕士研究生,E-mail:202211114@huat.edu.cn。

lane change at a speed of 72 km/h, the lateral error decreases by 39%, with the heading error decreasing by 52%, and the lateral deviation of the center of mass decreasing by 28%. The results from real vehicle tests show that under dual lane change conditions, the controller constructed in this paper can keep the maximum lateral error within 0.1 m.

**Keywords:** trajectory tracking; model predictive control; road curvature; steering lag; inertial element

## 前言

伴随着自动驾驶汽车进入产业化阶段,其运动控制技术也日趋成熟。LQR方法具有状态反馈能力,且Riccati方程可以离线求解,使其具有高实时性而被商业领域广泛部署。MPC方法相较于LQR可以考虑时变参考和转向延迟,在高速及大曲率道路下具有优势。

Xu等<sup>[1]</sup>将未来扰动扩展到系统状态方程中,形成增广LQR问题,从而解耦原始状态量与增广状态量,避免求解高维度Riccati方程。然而,这种方法导致了预测时域范围的降低。Qin等<sup>[2]</sup>设计了一种基于无迹卡尔曼滤波(AUKF)的多参数联合估计方法,并结合最优前轮胎侧向力的LQR轨迹跟踪控制。文献[3]中提出了一种基于前轮最优侧偏力的LQR控制方法,旨在减小轮胎的横向和纵向滑移。文献[4]~文献[6]中通过自适应调节LQR控制器的权重参数,改善了路径跟踪性能。

尽管上述方法利用了计算负荷较小的LQR方法并进行了权重优化,但无法考虑控制系统中存在的时变参考信号和转向延迟。因此,在高速情况下难以保持较高的跟踪精度。

文献[7]和文献[8]的研究表明,当转向系统延迟大于50 ms时,采用比例微分控制的线控转向系统会发生失稳。文献[9]中采用自适应内模控制(AMIC),该方法可以随着系统参数的变化自动调整增益。刘文通等<sup>[10]</sup>基于内模控制并采用全极点方法近似延迟环节,在HIL转向台架上可以实时适应延迟变化。吕颖等<sup>[11]</sup>设计了前馈加有限时域全状态反馈的误差跟踪控制架构,将转向系统延时作为1阶惯性环节,并进行模型化后增广到状态方程中,实车试验表明其可以快速响应;但并未考虑线控转向的纯延时环节。Lei等<sup>[12]</sup>针对露天矿山运输车辆转向机构延迟的轨迹跟踪问题,采用可以考虑执行器延迟补偿的MPC方法并建立了响应延迟模型。王威等<sup>[13]</sup>将线控转向系统表述成纯延时和1阶惯性延时

环节,并使用MPC方法进行轨迹跟踪控制,仿真结果显示,与不考虑转向延迟相比取得良好控制效果。

路径跟踪控制是一项实时性要求很高的应用。考虑时变参考和转向延迟的同时保持前向预测优势,并提升优化求解器运算速度十分关键。

Gao等<sup>[14]</sup>从非线性系统离散化和时变约束的角度,加速了基于NMPC控制器的数值优化。文献[1]中利用的LQR方法固定时域内求解且Riccati方程可以离线求解,计算负荷小,实时性好。Xu等<sup>[15]</sup>还利用此方法设计了计算成本低廉的车速跟踪控制器。文献[16]中考虑了线控转向系统通信延迟与执行机构延迟,并在实车中进行参数整定,利用预览控制理论进行轨迹跟踪控制器设计,使其在考虑未来道路曲率和转向延迟的情况下,不依赖在线数值优化避免大量计算。

本文从高实时性和考虑转向系统延迟与时变参考的角度出发,将时变参考与转向延时考虑到状态方程中,设计的控制器主要亮点如下:

(1)将时变参考与转向延迟特性同时考虑在内的同时,维持LQR方法计算复杂度小的特性,解决了LQR方法无法考虑时变参考和转向延时的时延问题。

(2)将控制时域相关部分的KKT逆矩阵离线生成,在线查表到实时求解器中,将优化问题求解计算复杂度降低,确保控制器的高实时性。

## 1 轨迹跟踪误差模型的构建

### 1.1 单轨动力学模型

变化的道路曲率对高速工况下车辆操纵稳定性有重要影响,直接关系到自动驾驶车辆的轨迹跟踪精度。本文的建模部分主要参考Ge等<sup>[17-18]</sup>采用车辆单轨动力学模型,适当简化的车辆模型可以在占用较少计算资源的前提下,考虑道路变化曲率对车辆动态行为的影响。

本文旨在实现前轮转向自动驾驶车辆的轨迹跟踪控制,如图1所示,采用了考虑车辆横向运动和横摆运动的车辆单轨2自由度动力学模型。

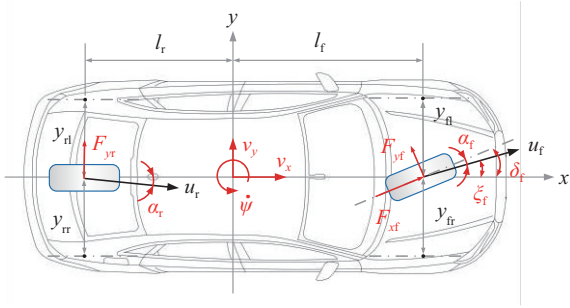


图1 单轨2自由度动力学模型

该模型的动力学方程如下:

$$\begin{cases} F_y = F_{yf} \cos \delta_f + F_{yr} + F_{xf} \sin \delta_f \\ M_z = l_f F_{yf} \cos \delta_f - l_r F_{yr} \end{cases} \quad (1)$$

式中: \$\delta\_f\$ 为前轮转角; \$l\_f\$、\$l\_r\$ 分别表示前轴和后轴距; \$F\_{xf}\$ 表示前轮的纵向力; \$F\_{yf}\$、\$F\_{yr}\$ 分别表示前轮与后轮的侧向力。当转向轮转角较小时, 前后车轮侧向力与侧偏角呈近似线性关系, 因此上述方程可以近似为

$$\begin{cases} m \left( \frac{dv_y}{dt} + v_x \frac{d\psi}{dt} \right) = F_{yf} + F_{yr} \\ I_z \frac{d\dot{\psi}}{dt} = l_f F_{yf} - l_r F_{yr} \end{cases} \quad (2)$$

前后车轮的横向力为

$$\begin{cases} F_{yf} = -C_{af} \alpha_f \\ F_{yr} = -C_{ar} \alpha_r \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \alpha_f = (v_y + l_f \dot{\psi}) / v_x - \delta_f \\ \alpha_r = (v_y - l_r \dot{\psi}) / v_x \end{cases} \quad (4)$$

式中: \$m\$ 表示车辆总质量; \$I\_z\$ 表示车身绕 \$z\$ 轴旋转的转动惯量; \$C\_{af}\$、\$C\_{ar}\$ 分别为前后轴等效侧偏刚度; \$\psi\$ 为车辆的横摆角。将车辆横向动力学方程整理成状态方程的形式:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_y \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\beta / (mv_x) & C_r / m - v_x \\ D_\beta / (I_z v_x) & D_r / I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_\delta / m \\ D_\delta / I_z \end{bmatrix} \delta_f \quad (5)$$

其中:

$$\begin{cases} C_r = \partial F_y / \partial r = -l_f C_{af} / v_x + l_r C_{ar} / v_x \\ C_\beta = \partial F_y / \partial \beta = -(C_{af} + C_{ar}) \\ C_\delta = \partial F_y / \partial \delta = C_{af} \\ D_r = \partial M_z / \partial r = -l_f^2 C_{af} / v_x - l_r^2 C_{ar} / v_x \\ D_\beta = \partial M_z / \partial \beta = -(l_f C_{af} - l_r C_{ar}) \\ D_\delta = \partial M_z / \partial \delta = l_f C_{af} \end{cases} \quad (6)$$

## 1.2 跟踪误差动力学模型

考虑动态运动的车辆与参考轨迹之间的关系是必要的, 其状态变量是车辆当前位置相对于期望位

置的位置误差和方向误差。

图2为跟踪误差动力学模型。图中: 车辆质心到期望轨迹上预瞄点的距离定义为横向误差, 用 \$e\_y\$ 表示, 其是以期望轨迹点为起点、车辆质心为终点的矢量, 方向指向道路参考点, 左侧为正右侧为负; \$e\_\psi\$ 表示车辆运行的航向角误差, 方向从期望轨迹的预瞄点指向车辆行驶的航向, 逆时针为正顺时针为负。

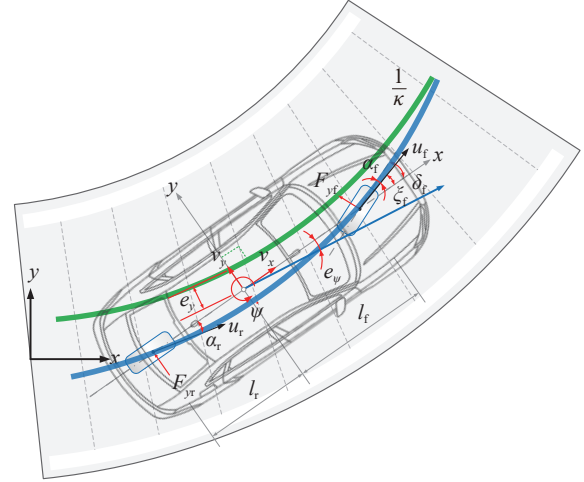


图2 跟踪误差动力学模型

基于单点预瞄的轨迹跟踪模型为

$$\dot{e}_\psi = \dot{\psi} - \kappa v_x \quad (7)$$

$$\dot{e}_y = v_y + v_x e_\psi \quad (8)$$

式中 \$\kappa\$ 为轨迹道路曲率。

最后, 通过总结式(6)~式(8), 形成系统的微分方程:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_y \\ \dot{\psi} \\ e_y \\ e_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\beta / (mv_x) & C_r / m - v_x & 0 & 0 \\ D_\beta / (I_z v_x) & D_r / I_z & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & v_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ \dot{\psi} \\ e_y \\ e_\psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_\delta / m \\ D_\delta / I_z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_f + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -v_x \end{bmatrix} \kappa_{ref} \quad (9)$$

式中 \$\kappa\_{ref}\$ 为系统的可测扰动变量。

## 1.3 转向延迟特性参数化建模

转向延迟特性会导致车辆被控系统的超调量增大, 稳定时间变长, 严重的会导致系统失稳。

为保证在具有延迟的车辆平台上获得更好的跟踪性能与稳定性, 本文采用纯滞后环节和1阶惯性环节串联结构(见图3)表征转向系统延迟特性:

$$\dot{\delta}_r(t) = -\frac{1}{\tau} \delta_r(t) + \frac{1}{\tau} \delta_e(t - \tau_d) \quad (10)$$

式中: $\tau$ 为惯性时间常数; $\delta_r$ 为实际前轮转角; $\delta_e$ 为前一时刻期望前轮转角; $\tau_d$ 为纯延时。将转向延迟模型引入道路偏差动力学模型得到:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_y \\ \dot{\psi} \\ e_y \\ e_\psi \\ \delta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\beta/(mv_x) & C_r/m - v_x & 0 & 0 & C_\delta/m \\ D_\beta/(I_z v_x) & D_r/I_z & 0 & 0 & D_\delta/I_z \\ 1 & 0 & 0 & v_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ \dot{\psi} \\ e_y \\ e_\psi \\ \delta_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/\tau \end{bmatrix} \delta_e + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -v_x \\ 0 \end{bmatrix} \kappa_{\text{ref}} \quad (11)$$

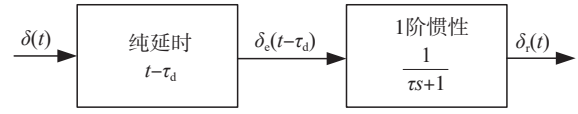


图3 转向延迟模型

## 2 轨迹跟踪控制器的设计

考虑时变参考和转向延迟的轨迹跟踪控制器架构如图4所示。核心在于将KKT逆矩阵(2.2节中说明)离线查表,将控制时域相关部分实时查表到求解器中,提高控制器的在线计算效率。

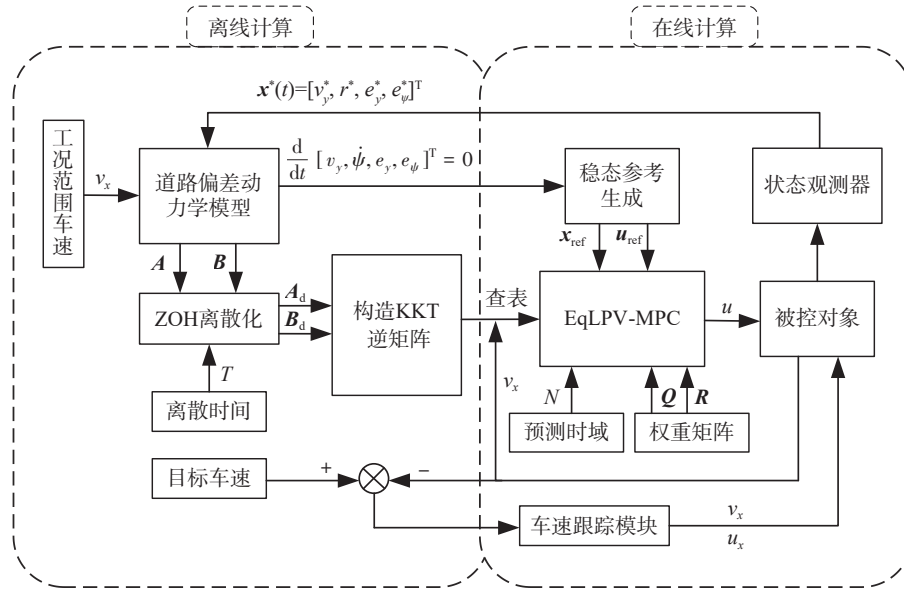


图4 轨迹跟踪控制器架构

### 2.1 QP问题的构建

针对车辆高车速运行工况下转向轮转角较小的情况,转向盘不会有较大角度输入,可以通过系统的状态方程进行等式约束。该控制器在高速工况下最大限度满足实时性指标,从而保证车辆的横向稳定性和控制器的高实时性。最终可将线性MPC(LMPC)问题描述为

$$[\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*] = \arg \min_{\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k} \sum_0^{N-1} [(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k_{\text{ref}}})^T \mathbf{Q} (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k_{\text{ref}}}) + (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k_{\text{ref}}})^T \mathbf{R} (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k_{\text{ref}}})] + \mathbf{Q}_N \|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_{N_{\text{ref}}}\|_2 \quad (12)$$

$$\text{subject to: } \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d[k] \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_d[k] \mathbf{u}_k + \mathbf{d}_k \quad (13)$$

$$\mathbf{x}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_{-1} = \mathbf{u}_{\text{fb}} \quad (14)$$

式中 $\mathbf{x}_{\text{ref}}$ 和 $\mathbf{u}_{\text{ref}}$ 分别表示状态参考和控制参考, $k=0, 1, 2, 3, \dots, N-1$ ( $N$ 是预测步数)。在二次规划代价

函数中, $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$ 分别表示状态权重矩阵和控制权重矩阵, $\mathbf{Q}_N$ 表示终端代价权重矩阵。第1个等式约束表示系统状态方程约束即被控对象当前的状态加上当前的控制量和系统外界的扰动量等于下一时刻系统的状态量。第2个等式约束表示系统初始状态与控制约束, $\hat{\mathbf{x}}_0$ 和 $\mathbf{u}_{\text{fb}}$ 分别表示状态反馈和控制反馈。上式给出的LMPC的一般形式须进一步转化为QP问题进行求解。将上述问题转化为等式约束的凸二次规划问题:

$$\begin{cases} \text{minimize } f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{z} + \mathbf{q}^T \mathbf{z} \\ \text{subject to: } \mathbf{A}_l \mathbf{z} = \mathbf{b} \end{cases} \quad (15)$$

式中 $\mathbf{z} = [\mathbf{u}_{-1}, \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{N-1}, \mathbf{x}_N]^T$ 为决策变量,其中 $\mathbf{z}_i = [\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i]$ 。代价函数由半正定矩阵 $\mathbf{p} \in \mathbf{S}_+^n$ 和向量 $\mathbf{q}^T \in \mathbf{R}^n$ 所构成。线性约束由 $\mathbf{A}_l \in \mathbf{R}^{n_c \times n_z}$ 、 $\text{rank} \mathbf{A}_l =$

$p < n$  和向量  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  构成等式约束, 这样使得矩阵  $\mathbf{A}_i$  的约束数少于变量数且等式约束之间相互独立, 等式约束就为一个多解问题, 求解得到的决策变量中包含的状态量和控制量。

## 2.2 QP问题的求解

将状态量和控制量作为决策变量, 离散化状态方程作为等式约束之后, LMPC 稀疏解法的核心问题为构造 Hessian 矩阵和梯度向量:

$$\mathbf{P} = \text{diag}(0, \overbrace{Q_{z_0}, Q_{z_1}, Q_{z_2}, \dots, Q_{z_{N-1}}},^N, Q_N) \quad (16)$$

$$\mathbf{A}^l = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{n_s \times n_s} & \mathbf{A}_{\text{eq}_0} & \mathbf{A}'_{\text{eq}_0} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^{n_s \times n_s} & 0 & \mathbf{A}_{\text{eq}_1} & \mathbf{A}'_{\text{eq}_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^{n_s \times n_s} & 0 & 0 & \mathbf{A}_{\text{eq}_2} & \mathbf{A}'_{\text{eq}_2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \mathbf{A}_{\text{eq}_3} & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}^{n_s \times n_s} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \mathbf{A}_{\text{eq}_{N-2}} & \mathbf{A}'_{\text{eq}_{N-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{A}_{\text{eq}_{N-1}} & \mathbf{A}''_{\text{eq}_{N-1}} \\ \mathbf{0}^{n_s \times n_s} & [\mathbf{I}^{n_s \times n_s}, 0] & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{I}^{n_s \times n_s} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{A}_{\text{eq}_i} = [\mathbf{A}_d[i], \mathbf{B}_d[i]] \quad (21)$$

$$\mathbf{A}'_{\text{eq}_i} = [-\mathbf{I}^{n_s \times n_s}, \mathbf{0}^{n_s \times n_s}] \quad (22)$$

$$\mathbf{A}''_{\text{eq}_{N-1}} = -\mathbf{I}^{n_s \times n_s} \quad (23)$$

$$\mathbf{b} = [-(\mathbf{d}_0)^T, -(\mathbf{d}_1)^T, \dots, -(\mathbf{d}_{N-1})^T, \hat{\mathbf{x}}_0^T, \mathbf{u}_{\text{fb}}^T]^T \quad (24)$$

$$\mathbf{d}_i = [0, 0, 0, -v_x \kappa_{\text{ref}_i}]^T \quad (25)$$

求解上述等式约束优化问题等价于确定 KKT 方程的解:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_i^T \mathbf{z}^* = \mathbf{b} \\ \mathbf{P} \mathbf{z}^* + \mathbf{q} + \mathbf{A}_i^T \mathbf{v}^* = 0 \end{cases} \quad (26)$$

式中, 第1组方程为线性原可行方程, 第2组方程为对偶可行方程, 其含有  $n + p$  个变量  $\mathbf{x}^*$  和  $\mathbf{v}^*$  的  $n + p$  个方程的联立求解问题。将其整理成矩阵乘法形式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ \mathbf{v}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{A}_i^T \\ \mathbf{A}_i & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{q} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (27)$$

式中: 待求解向量  $\mathbf{x}^*$  为原问题的最优解 (primal optimal);  $\mathbf{v}^*$  为对偶最优解 (dual optimal)。本文所建立的考虑时变参考与转向延迟的跟踪误差动力学模型使得构造  $\mathbf{A}_i$  矩阵的元素  $\mathbf{A}_{\text{eq}_i}$  中的离散状态方程矩阵  $\mathbf{A}_d$  和  $\mathbf{B}_d$  的时变参数只有纵向车速  $v_x$  (时变参考道路曲率  $\kappa_{\text{ref}}$  在矩阵  $\mathbf{E}_d$  中)。因此, 可以离线循环遍历纵向车速变化范围内的所有 KKT 逆矩阵即式 (27) 等号右边逆矩阵, 并按照纵向车速  $v_x$  的对应关系存储在表格中, 控制器实时运行时根据实时车速查找表格中对应的 KKT 逆矩阵参与控制量的求解。

构成式 (16) 的矩阵元素公式为

$$\mathbf{Q}_{z_i} = \text{diag}(\mathbf{Q}, \mathbf{R}) \quad (17)$$

显然,  $\mathbf{P}$  矩阵为典型的稀疏对角矩阵, 根据式 (15) 代价函数可以得到 LMPC 问题的梯度向量:

$$\mathbf{q}^T = -[0, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{N-1}, (\mathbf{Q}_N \mathbf{x}_{\text{ref}})^T]^T \quad (18)$$

构成式 (18) 的矩阵元素公式为

$$\mathbf{q}_i = [(\mathbf{Q} \mathbf{x}_{\text{ref}_i})^T, (\mathbf{R} \mathbf{u}_{\text{ref}_i})^T]^T \quad (19)$$

LMPC 问题等式约束的稀疏矩阵与向量可以由系统的离散状态方程得到:

这种方法使得优化问题求解中计算量最大的 KKT 逆矩阵在离线阶段进行计算, 控制器实时运行时仅须计算 KKT 逆矩阵与  $[-\mathbf{q} \ \mathbf{b}]^T$  向量的矩阵乘法。同时, 优化问题求解中并非所有矩阵元素都被用于控制量中, 可以进行适当调整, 从而减少计算量, 提高控制器运行速度。

求解 LMPC 问题的最优控制序列就在  $\mathbf{x}^*$  中, 结合决策变量  $\mathbf{z}$  的构造, 可以提取出控制时域对应的控制序列。本文在离线查表过程中发现, 参与优化求解的 KKT 逆矩阵只有控制时域相关部分的计算结果被用于转向轮转角控制 (如图 5 所示)。因此本文根据实时车速将控制时域对应的 KKT 逆矩阵部分查表到在线求解器中, 旨在减少计算量并提高控制器的运行效率。

## 2.3 稳态参考计算

前轮转向车辆到达稳态时可以保证横向误差为零, 须确定状态和控制的稳态值  $\mathbf{x}_{\text{ref}}$  和  $\mathbf{u}_{\text{ref}}$ , 即系统处于稳态时应该满足下式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{ref}} \\ \mathbf{u}_{\text{ref}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{E} \mathbf{d}_{\text{ref}} \\ \mathbf{y}_{\text{ref}} - \mathbf{G} \mathbf{d}_{\text{ref}} \end{bmatrix} \quad (28)$$

式中:  $\mathbf{d}_{\text{ref}}$  为扰动量;  $\mathbf{y}_{\text{ref}}$  为输出的参考值。当  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  构成的矩阵满秩时线性方程具有唯一解。式 (28) 中第 1 行表示的状态导数应等于零, 第 2 行表示状态方程输出  $\mathbf{y}$ , 应等于稳态下的目标参考  $\mathbf{y}_{\text{ref}}$ 。当满足  $e_y = 0$  时, 则线性独立约束的个数应小于或等

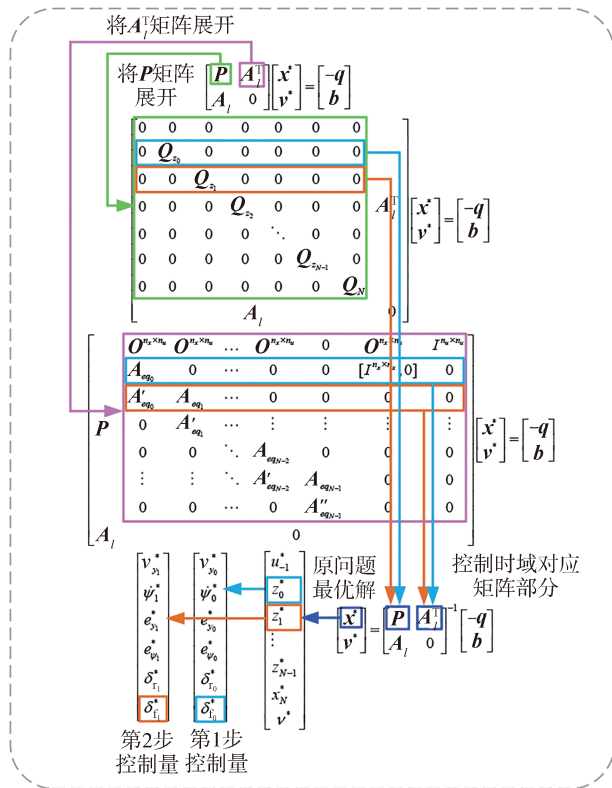


图5 优化求解简化

于未知量的个数,即  $y_{\text{ref}}$  的维数应小于或等于控制输入的维数,方程具有唯一解。当  $A, B, C, D$  构成的矩阵非奇异时,稳态参考计算可以变成:

$$\begin{bmatrix} x_{\text{ref}} \\ u_{\text{ref}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -E d_{\text{ref}} \\ y_{\text{ref}} - G d_{\text{ref}} \end{bmatrix} \quad (29)$$

对于离散系统,可以得到:

$$x_{\text{ref}} = \begin{bmatrix} \kappa_{\text{ref}} v_x l_f - \frac{\kappa_{\text{ref}} l_f m v_x^3}{C_{\text{ar}} (l_f + l_r)}, \kappa_{\text{ref}} v_x, 0, -\kappa_{\text{ref}} l_f + \frac{\kappa_{\text{ref}} l_f m v_x^2}{C_{\text{ar}} (l_f + l_r)} \end{bmatrix}^T \quad (30)$$

$$u_{\text{ref}} = \kappa_{\text{ref}} (l_f + l_r) + \left( \frac{l_r}{C_{\text{af}}} - \frac{l_f}{C_{\text{ar}}} \right) \frac{\kappa_{\text{ref}} m v_x^2}{l_f + l_r} \quad (31)$$

航向角误差的稳态值是关于车辆质量和轮胎侧偏刚度的函数,并且随着地面附着条件的变化而变化。由式(30)可知,稳态下规划横向投影速度为零,即车速方向应与规划轨迹的切线方向一致。

### 3 仿真验证分析

本文设计的路径跟踪控制器的特点是将道路曲率作为预测模型参考输入,考虑转向系统的延迟,提高路径跟踪控制器的鲁棒性和控制精度。利用等式

约束优化方法与查表的方法可以解决传统控制器优化求解计算时间长、在线实时性低的问题。为验证本文设计的轨迹跟踪控制器架构,在 MATLAB/Simulink 联合仿真中采用 CarSim 中的 C 级乘用车模型,车辆的主要参数如表 1 所示,尽可能消除模型的不匹配性,便于评价控制器的性能。

表 1 仿真平台车辆和道路主要参数

参数	数值
整车质量 $m/\text{kg}$	1 412
质心到前轴距离 $l_f/\text{m}$	1.015
质心到后轴距离 $l_r/\text{m}$	1.895
绕轴转动惯量 $I_z/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	1 536.7
前轮侧偏刚度 $C_{af}/(\text{N} \cdot \text{rad}^{-1})$	81 910.295
后轮侧偏刚度 $C_{ar}/(\text{N} \cdot \text{rad}^{-1})$	81 910.295
车轮滚动半径 $r_c/\text{m}$	0.325
路面附着系数 $\mu$	0.85
车辆转向延迟时间 $T_{\text{lag}}/\text{ms}$	300

其中,试验工况包括:(1)蛇行工况试验;(2)双移线工况试验。为量化对比 3 种控制器的跟踪精度,依据文献[19]计算横向误差的均方根误差:

$$RMS_{e_y} = \sqrt{\frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} e_y^2 dt} \quad (32)$$

式中  $T_1$  和  $T_2$  分别为控制器运行起始时间和终止时间。上式适用于横向误差  $e_y$  为连续函数的连续系统,针对本文的离散系统采用欧拉梯形公式进行离散化处理:

$$RMS_{e_y} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i_r=1}^n e_{y,i_r}^2} \quad (33)$$

式中  $n$  为期望路径的预瞄点总数。

#### 3.1 蛇行工况试验

本节讨论蛇行工况仿真结果。选择蛇行工况是因为曲率突变的动态特性可以研究控制器的稳态误差。此外,多个曲率阶跃点可以评判控制器的鲁棒性,有助于对控制器权重参数的整定。

在车速为 54 km/h 的工况下,EqLPV-MPC 方法、LQR 方法、MPC 方法的状态量对比试验结果如图 6 所示,控制量对比如图 7 所示。可以看出预测模型的行为与仿真车辆被控对象的行为并不完全一致。在优先考虑跟踪精度的情况下,考虑道路曲率时变参考的 EqLPV-MPC 方法精度更高。从图 6(a)和图 6(b)中可以观察到 3 种方法的对横摆角速度的跟踪优于对横向速度的跟踪,图 6(c)中显示出 MPC 方法

的横向误差达到0.022 m,LQR方法的横向误差为0.021 m,而EqLPV-MPC方法可以将横向误差降低到0.001 m。图6(d)中显示出的LQR方法、MPC方法

和EqLPV-MPC方法的稳态最大航向角误差分别为0.04°、0.07°、0.01°。相比之下,EqLPV-MPC可以较好地降低横向误差与航向角误差。

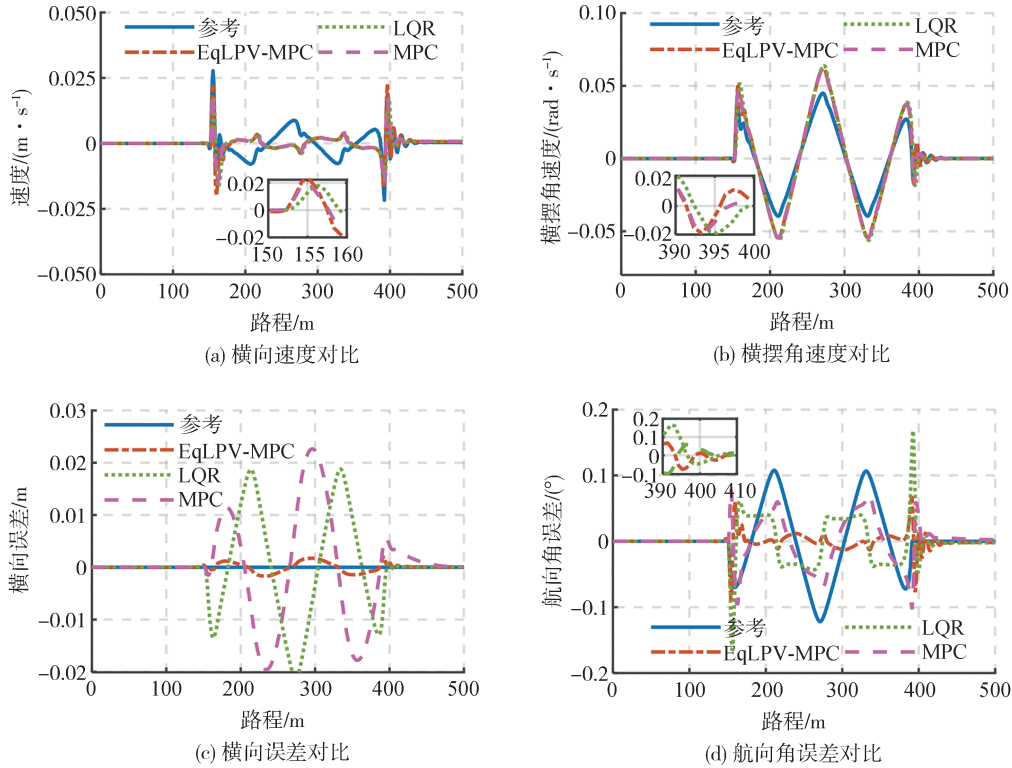


图6 蛇行工况状态对比图

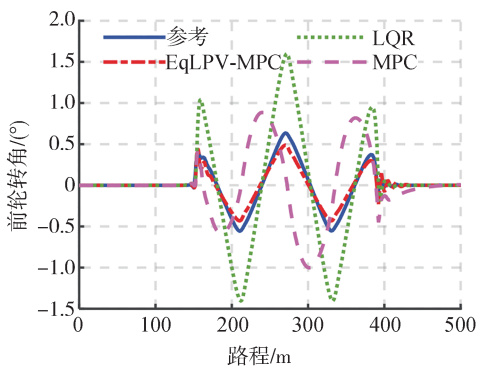


图7 蛇行工况控制量对比

根据式(33)计算得到EqLPV-MPC方法、MPC方法、LQR方法的横向误差均方根误差分别为0.000 656、0.006 9、0.007 7。综上所述,与MPC和LQR方法相比,EqLPV-MPC方法能显著提高跟踪精度。

对横向速度与航向角权重的适当松弛可以避免控制器频繁和过度调整。同时,适当提高控制权重

可以避免前轮转角变化率过大。从图7中可以看出EqLPV-MPC对前轮转角控制量跟踪较好,相比之下,MPC方法产生的相位延迟比LQR方法更大,这是由于MPC的计算复杂度较高,实时性较差。

### 3.2 双移线行驶工况试验

本节讨论双移线工况仿真结果。双移线工况曲率突变特性有助于评判控制器的鲁棒性。

图8(a)和图8(b)中显示在双移线过程中,EqLPV-MPC方法对车辆横向速度和横摆角速度的跟踪精度与LQR方法和MPC方法高度一致。从图8(c)可以看出,在道路曲率变化率大的工况下,EqLPV-MPC方法的跟踪精度优势明显。LQR方法和MPC方法的横向误差分别达到了0.06和0.039 m,而EqLPV-MPC方法将横向误差控制在0.012 m以内。另一个影响跟踪性能的指标是航向角误差。图8(d)显示,在道路曲率突变处,LQR方法的航向角误差达到了1.508°,而EqLPV-MPC方法将航向角误差降低至0.785°,同比下降了47.9%。在相同甚至

更快速的收敛速度条件下,考虑时变参考和转向延迟特性的EqLPV-MPC方法提高了车辆的跟踪精度和稳定性。

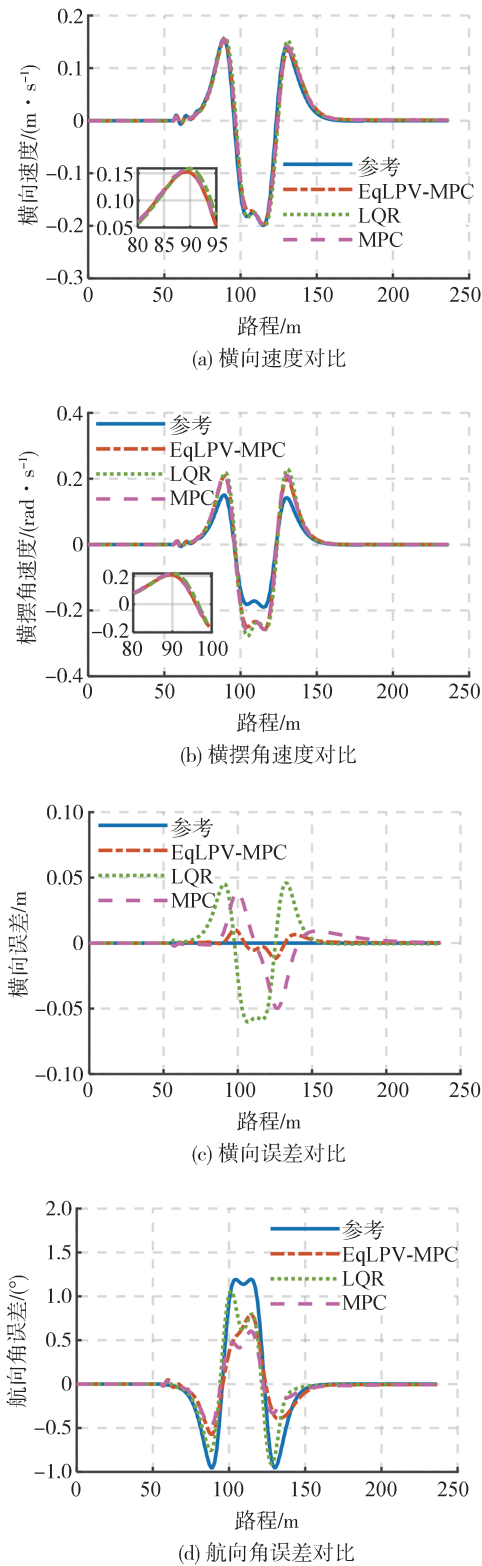


图8 双移线工况状态对比图

根据式(33)计算得到EqLPV-MPC方法、MPC方法、LQR方法的横向误差均方根分别为0.003 1、0.021 2、0.013 7。这表明EqLPV-MPC方法比LQR方法与MPC方法具有良好的跟踪精度。

从图9(a)、图9(b)和图9(c)可以观察到,在双移线工况下,EqLPV-MPC方法的横向稳定性随路程变化的表现。横向车速、横摆角速度和质心侧偏角的变化规律基本一致,并在道路曲率突变处达到最大。

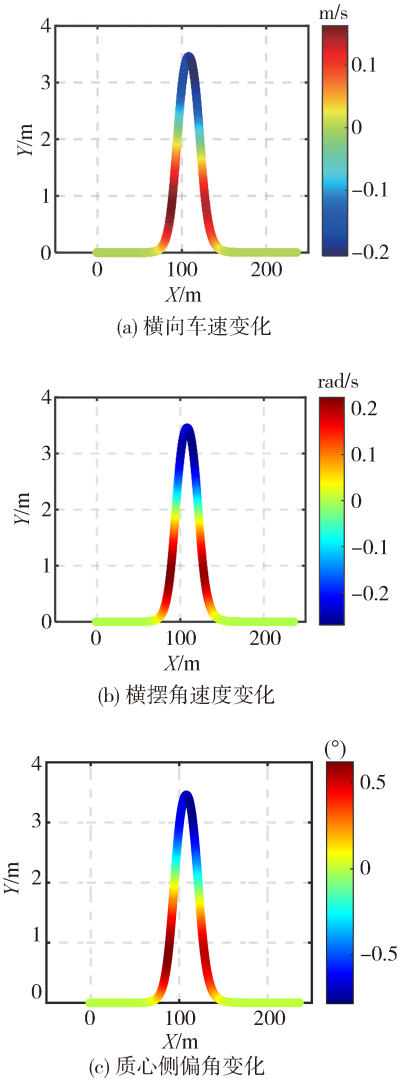


图9 双移线工况动力学特性随轨迹变化图

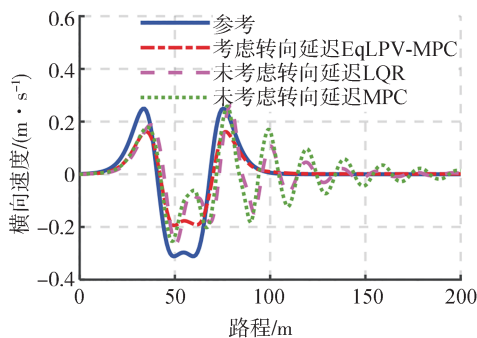
### 3.3 转向延迟特性对比试验

通过对比考虑转向延迟的EqLPV-MPC、未考虑转向延迟的LQR、未考虑转向延迟的MPC,在双移线工况路径跟踪试验进一步了解控制器性能,为利用较大延迟时间研究其产生的影响,将转向延迟惯性延迟时间设为300 ms。

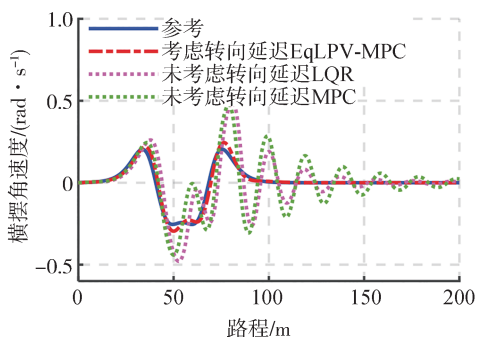
在图 10(a)和图 10(b)中显示出在被控对象具有转向系统延迟的情况下,除考虑转向延迟的 EqLPV-MPC 方法外,LQR 方法和 MPC 方法都未能

良好跟踪期望轨迹。图 10(c)和图 10(d)表明考虑转向延迟的 EqLPV-MPC 方法最大横向误差为 0.085 7 m,最大航向角误差为 0.020 7°;LQR 和 MPC 方法存在响应迟滞使得转向盘反复调整,最终车辆出现摆动现象。

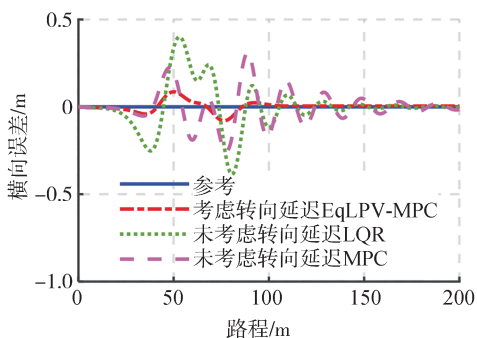
从图 11 中可以看出,考虑转向延迟的 EqLPV-MPC 方法可以很好地跟踪参考前轮转角控制量。然而 LQR 和 MPC 方法的前轮转角控制输入出现反复振荡无法稳定,鲁棒性较差。



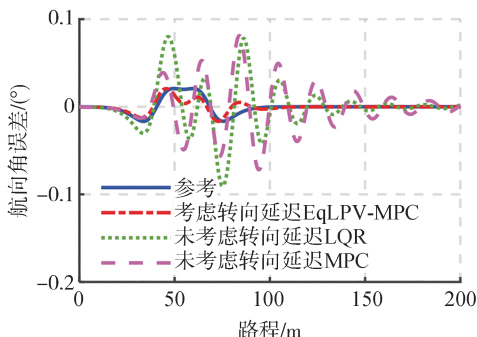
(a) 横向速度对比



(b) 横摆角速度对比



(c) 横向误差对比



(d) 航向角误差对比

图 10 转向延迟双移线工况状态对比

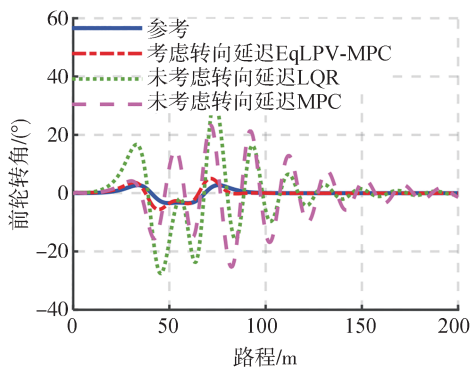


图 11 转向延迟控制量对比

### 4 实车验证分析

如图 12 所示,实车试验平台基于前驱纯电动汽车,搭载 BRAV-7521 工业计算机,通过 CAN-PCIe/402-2 双通道 CAN 卡进行信息交互,配备华测 CGI-220 定位导航设备与千寻 RTK 高精定位服务。由 CAN 总线对车辆线控底盘发送转向盘转角指令与纵

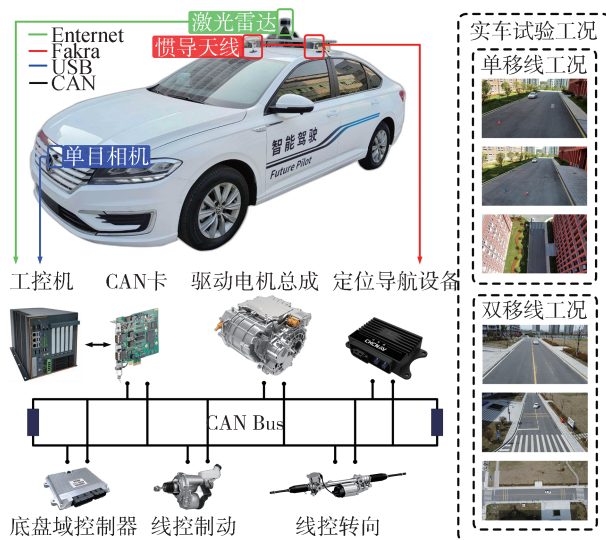


图 12 试验平台硬件配置及试验工况

向加速度指令。

#### 4.1 转向延迟参数整定

对车辆转向盘进行角阶跃输入,辨识纯迟滞环节延时与1阶惯性环节中的时间常数。

测量系统响应如图13所示,通过对延迟环节进行参数辨识,得出转向系统的纯延迟时间约为0.02 s,设定的时间常数为0.33 s。

#### 4.2 双移线工况试验

图14为校园内双移线工况试验曲线图,试验车辆的双移线工况车速为30 km/h。为了验证算法的鲁棒性,设计了考虑转向延迟和时变参考的EqLPV-MPC方法,并与未考虑时变参考和转向延迟的LQR

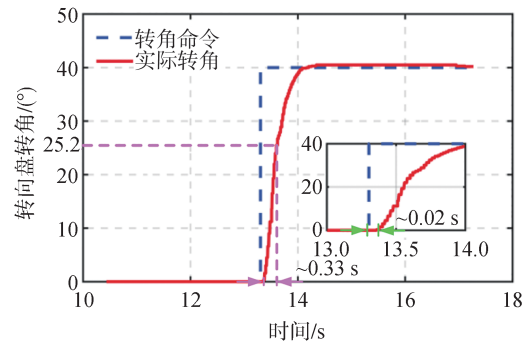
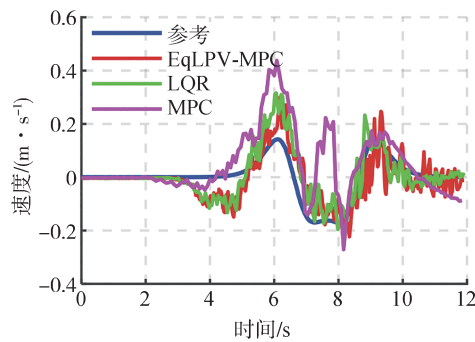
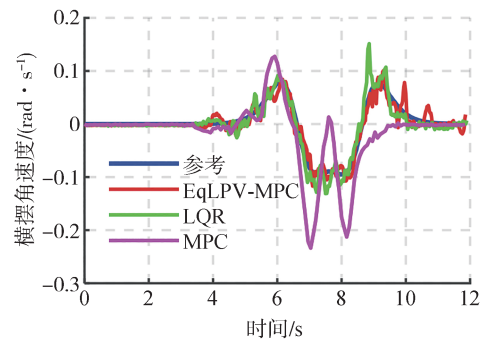


图13 转向延迟特性实车曲线

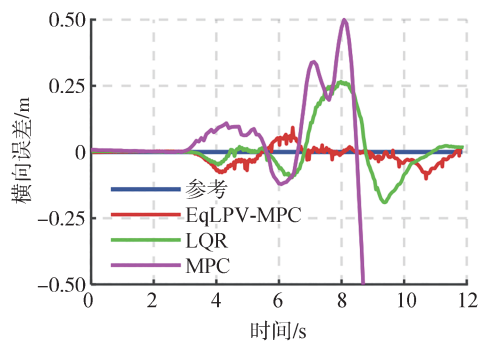
方法及MPC方法进行了对比试验。



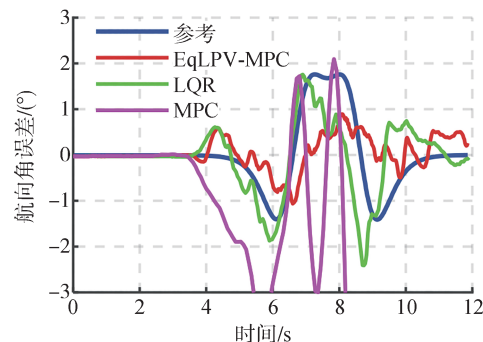
(a) 横向速度对比



(b) 横摆角速度对比



(c) 横向误差对比



(d) 航向角误差对比

图14 实车测试状态对比

实车试验结果表明,在较好地跟踪横向速度和横摆角速度的情况下,考虑转向延迟与时变参考的EqLPV-MPC方法能够将最大横向误差控制在0.1 m以内,航向角误差控制在 $1^\circ$ 以内,并且双移线工况下转向及时响应。相比之下,无法考虑转向延迟和时变参考的LQR控制器,在换道处产生0.26 m的最大横向误差和 $1.85^\circ$ 的最大航向角误差;MPC方法的实时性较差,且稳定裕度不如LQR,最大横向误差超过0.5 m,最大航向角误差超过 $3^\circ$ 。综上所述,考虑转向延迟和时变参考的EqLPV-MPC方法比LQR与

MPC具有更高的跟踪精度。

## 5 结论

本文设计了一种高实时性的EqLPV-MPC控制器,该控制器能够考虑转向延迟和时变参考。将KKT逆矩阵离线计算,并根据车速实时查表,同时仅提取控制时域相关部分到在线求解器中,通过与Hessian矩阵和梯度向量进行矩阵乘法得到控制量,从而降低了优化求解的计算量。这种方法在维持

LQR方法计算复杂度的基础上,解决了LQR方法无法考虑时变参考和转向延迟的问题。

主要研究成果包括:将复杂的KKT矩阵离线计算后根据实时车速查表格,提取控制时域相关部分参与在线计算,减少大量重复性运算,使得控制器能够实时考虑线控系统的转向延迟特性与道路的变曲率。在典型行驶工况中,与不能考虑上述信息的LQR方法和MPC方法相比,被控对象能够快速响应,且具有良好的跟踪精度。

### 参考文献

- [1] XU S, PENG H. Design, analysis, and experiments of preview path tracking control for autonomous vehicles[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2019, 21(1): 48-58.
- [2] QIN Z, CHEN L, HU M, et al. A lateral and longitudinal dynamics control framework of autonomous vehicles based on multi-parameter joint estimation[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2022, 71(6): 5837-5852.
- [3] 陈亮,秦兆博,孔伟伟,等.基于最优前轮侧偏力的智能汽车LQR横向控制[J].清华大学学报(自然科学版),2021,61(9): 906-912.  
CHEN Liang, QIN Zhaobo, KONG Weiwei, et al. Lateral control using LQR for intelligent vehicles based on the optimal front-tire lateral force[J]. Journal of Tsinghua University (Science and Technology), 2021, 61(9): 906-912.
- [4] 胡杰,钟鑫凯,陈瑞楠,等.基于模糊LQR的智能汽车路径跟踪控制[J].汽车工程,2022,44(1):17-25,43.  
HU J, ZHONG X, CHEN R, et al. Path tracking control of intelligent vehicles based on fuzzy LQR[J]. Automotive Engineering, 2022, 44(1): 17-25,43.
- [5] 孟宇,汪钰,顾青,等.基于预见位姿信息的铰接式车辆LQR-GA路径跟踪控制[J].农业机械学报,2018,49(6):375-384.  
MENG Y, WANG Y, GU Q, et al. LQR-GA path tracking control of articulated vehicle based on predictive information[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2018, 49(6): 375-384.
- [6] LEE K, JEON S, KIM H, et al. Optimal path tracking control of autonomous vehicle: adaptive full-state linear quadratic Gaussian (LQG) control[J]. IEEE Access, 2019, 7: 109120-109133.
- [7] ZAKARIA M I, HUSAIN A R, MOHAMED Z, et al. Lyapunov-Krasovskii stability condition for system with bounded delay—an application to steer-by-wire system[C].2015 IEEE International Conference on Control System, Computing and Engineering (ICCSCE). IEEE, 2015: 543-547.
- [8] EL FEZAZI N, TISSIR E H, EL HAOUSSI F, et al. Controller synthesis for steer-by-wire system performance in vehicle[J]. Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Electrical Engineering, 2019, 43(4): 813-825.
- [9] XU L, GE S Q, GUO J Y. Application of self-adaptive TDF-IMC in grinding classification process[C].2018 Chinese Control And Decision Conference (CCDC). IEEE, 2018: 2982-2984.
- [10] 刘文通,陈俐,陈峻.考虑延迟的汽车线控转向系统自适应内模控制[J].上海交通大学学报,2021,55(10):1210-1218.  
LIU Wentong, CHEN Li, CHEN Jun. Adaptive internal model control for automotive steer-by-wire system with time delay[J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University, 2021, 55(10): 1210-1218.
- [11] 吕颖,祁旭,刘秋铮,等.考虑转向延迟特性的自动驾驶车辆路径跟踪控制方法[J].汽车工程,2023,45(12):2234-2241.  
LÜ Ying, QI Xu, LIU Qiuzheng, et al. Path tracking control method with steering lag for autonomous vehicles[J]. Automotive Engineering, 2023, 45(12): 2234-2241.
- [12] LEI Z, MA X, YUAN X, et al. Research on automatic driving path tracking control of open-pit mine transportation vehicles with delay compensation[J]. World Electric Vehicle Journal, 2022, 13(8): 134.
- [13] 王威,陈慧岩,马建昊,等.基于Frenet坐标系和控制延时补偿的智能车辆路径跟踪[J].兵工学报,2019,40(11):2336-2351.  
WANG Wei, CHEN Huiyan, MA Jianhao, et al. Path tracking for intelligent vehicles based on frenet coordinates and delayed control[J]. Acta Armamentarii, 2019, 40(11): 2336-2351.
- [14] GAO F, HAN Y, LI S E, et al. Accurate pseudospectral optimization of nonlinear model predictive control for high-performance motion planning[J]. IEEE Transactions on Intelligent Vehicles, 2022, 8(2): 1034-1045.
- [15] XU S, PENG H, SONG Z, et al. Accurate and smooth speed control for an autonomous vehicle[C].2018 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV). IEEE, 2018: 1976-1982.
- [16] XU S, PENG H, TANG Y. Preview path tracking control with delay compensation for autonomous vehicles[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2020, 22(5): 2979-2989.
- [17] GE L, ZHAO Y, ZHONG S, et al. Motion control of autonomous vehicles based on offset free model predictive control methods[J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2022, 144(11): 111003.
- [18] GE L, ZHAO Y, MA F, et al. Towards longitudinal and lateral coupling control of autonomous vehicles using offset free MPC[J]. Control Engineering Practice, 2022, 121: 105074.
- [19] STANO P, MONTANARO U, TAVERNINI D, et al. Model predictive path tracking control for automated road vehicles: a review[J]. Annual Reviews in Control, 2023, 55: 194-236.