

# 变中径螺旋弹簧稳态横向刚度的解析计算及仿真

耿向明<sup>1</sup> 周长城<sup>1</sup> 阚世超<sup>1</sup> 张云山<sup>2</sup> 郑伟<sup>1</sup>

(1.山东理工大学,淄博 255000;2.山东汽车弹簧厂淄博有限公司,淄博 255000)

**【摘要】**为获得考虑变中径弹簧端部约束的稳态横向刚度的可靠解析计算方法,根据变中径弹簧的力学模型,运用莫尔积分,得到了弹簧端部约束弯矩的解析计算式。基于变中径弹簧的约束弯矩,推导了其稳态横向柔度、刚度解析计算公式。通过实例对变中径弹簧的稳态横向刚度进行解析计算和仿真验证,解析计算结果与仿真结果均吻合,柔度、刚度相对偏差均在0.21%以内,结果表明所建立的解析计算方法正确。最后,基于变中径螺旋弹簧稳态横向刚度建立了弹簧受横向载荷任意位置的横向挠度解析计算式,与仿真值偏差在0.21%以内,表明弹簧的相对横向挠度解析计算式正确。

**关键词:**变中径弹簧 莫尔积分 横向刚度 变形

**中图分类号:**U463.1 **文献标识码:**A **DOI:** 10.19620/j.cnki.1000-3703.20220282

## Analytical Calculation and Simulation of Steady Lateral Stiffness for Variable Diameter Spring

Geng Xiangming<sup>1</sup>, Zhou Changcheng<sup>1</sup>, Kan Shichao<sup>1</sup>, Zhang Yunshan<sup>2</sup>, Zheng Wei<sup>1</sup>

(1. Shandong University of Technology, Zibo 255000; 2. Zibo Company Limited, Shandong Automobile Spring Factory, Zibo 255000)

**【Abstract】**In order to obtain reliable analytical calculation methods for the steady-state lateral stiffness considering the end constraints of variable diameter springs, the analytical calculation formulas of spring end restraint moment were obtained by using Moore integral according to the mechanical model of variable diameter spring. Based on the restraint moment of variable diameter spring, the analytical calculation formulas of steady-state lateral flexibility and stiffness of variable diameter spring were derived. With a case study, the steady-state lateral stiffness of variable diameter spring was analyzed and simulated, the calculated values are consistent with the simulated values, the relative deviations of flexibility and stiffness are within 0.21%, which means that the analytical formulas are correct. Finally, based on the steady-state lateral stiffness of variable diameter spring, the analytical calculation formula of transverse deflection of variable diameter spring at any position under transverse load was established, the deviation between the calculated value and the simulation value is within 0.21%, indicating that the analytical formula of the relative lateral deflection of the spring is correct.

**Key words:** Variable diameter spring, Moore integral, Lateral stiffness, Shape change

**【引用格式】**耿向明,周长城,阚世超,等.变中径螺旋弹簧稳态横向刚度的解析计算及仿真[J].汽车技术,2023(4):57-62.

GENG X M, ZHOU C C, KAN S C, et al. Analytical Calculation and Simulation of Steady Lateral Stiffness for Variable Diameter Spring[J]. Automobile Technology, 2023(4): 57-62.

## 1 前言

螺旋弹簧是一种基本的弹性元件,是车辆悬架的重要组成部分<sup>[1]</sup>。螺旋弹簧种类很多,与普通圆柱弹簧相比,变中径螺旋弹簧具有更加良好的性能。

文献[2]、文献[3]给出的弹簧横向刚度计算方法仅适用于计算普通圆柱弹簧的横向刚度。米彩盈<sup>[4-6]</sup>利用圆柱弹簧计算高度的一半,导出了圆柱弹簧的横向刚度计算式,但不适用于变中径弹簧的横向刚度计算。

肖维雄<sup>[7]</sup>采用有限元方法对普通圆柱螺旋弹簧的刚度进行了计算。阳光武<sup>[8]</sup>比较分析了几种圆柱弹簧横向刚度计算方法,确定了计算圆柱弹簧计算高度的方法。林炳宏<sup>[9]</sup>分析计算了变中径弹簧的垂向刚度,但未计算其横向刚度。肖光育<sup>[10]</sup>计算了腰鼓型变刚度螺旋弹簧的垂向刚度,但没有计算其横向刚度。张名杨<sup>[11]</sup>修正了在静载作用下的克雷特克(Krettek)公式,计算了普通圆柱弹簧的横向刚度。丘盛昌<sup>[12]</sup>对圆柱弹簧进行力学研究,建立了其横向刚度计算模型,但未约束圆柱

弹簧端部。方子帆<sup>[13]</sup>计算了多段式组合变刚度悬架螺旋弹簧的垂向刚度,但未计算弹簧的横向刚度。张英会<sup>[14]</sup>在弹簧手册中计算了变中径弹簧的垂向刚度及圆柱弹簧的稳态横向刚度,但未计算变中径弹簧的稳态横向刚度。

通过目前对变中径弹簧刚度的研究分析可知,暂无变中径弹簧的稳态横向刚度准确计算方法。为此,本文通过力学分析,运用莫尔积分推导变中径弹簧端部稳态约束弯矩计算公式、基于约束弯矩的弹簧稳态横向刚度计算公式,运用有限元仿真验证公式的正确性,并基于稳态横向刚度推导出变中径弹簧任意位置稳态挠度的理论计算式。

## 2 弹簧端部稳态约束弯矩的解析计算

### 2.1 变中径弹簧基本参数

变中径弹簧的投影轮廓如图1所示。

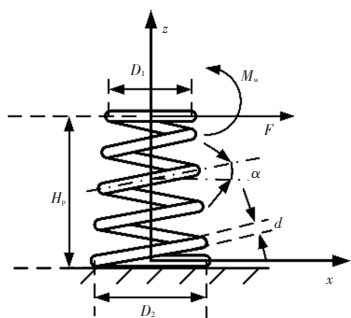


图1 变中径弹簧参数示意

图中,  $H_s$  为弹簧计算高度,  $D_1$ 、 $D_2$  分别为弹簧小圈、大圈直径,  $\alpha$  为弹簧的螺旋角,  $d$  为弹簧的簧丝直径,  $F$  为弹簧端部受到的横向载荷,  $M_w$  为使弹簧端部保持水平的约束弯矩, 即弹簧端部稳态约束弯矩。当变中径弹簧端部受到横向载荷作用时, 弹簧端部保持水平, 则端部必然受到稳态约束弯矩, 因此, 在计算变中径弹簧稳态横向刚度时, 应考虑此弯矩。

### 2.2 变中径弹簧端部约束弯矩的解析计算

#### 2.2.1 变中径弹簧受力分析

变中径弹簧端部在单位横向力  $F_x$  作用下, 产生一偏角  $\gamma_{F_x}$ , 如图2所示。假设在弹簧端部仅作用一单位弯矩  $M=1 \text{ N}\cdot\text{m}$ , 此时弹簧端部产生的偏角为  $\gamma_M$ 。

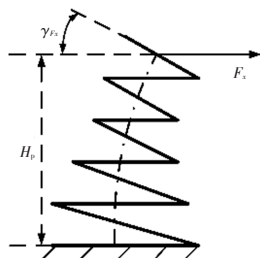


图2 弹簧受单位横向力示意

在单位横向力作用下, 受力分析模型如图3所示。变中径弹簧端部施加一水平单位力  $F_x$ , 在角度为  $\theta$  处, 横向力  $F_x$  在丝径竖直截面产生弯矩  $M_1$ 、 $M_2$ 。

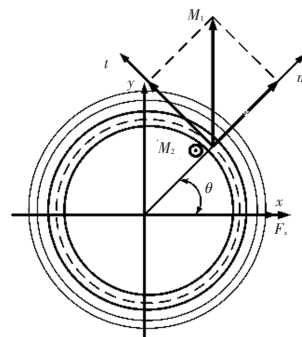


图3 弹簧轴向投影力学模型

$M_1$ 、 $M_2$  可分解为绕  $t$  轴的扭矩、绕  $b$  轴的弯矩和绕  $m$  轴的弯矩。在考虑螺旋角  $\alpha$  的情况下, 丝径竖直截面与斜截面夹角如图4所示, 将竖直截面上的力矩投影到斜截面, 可以求得斜截面上沿各轴的力矩。

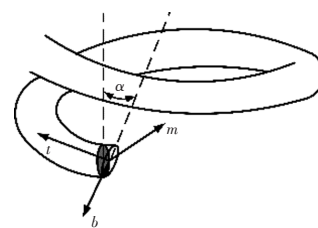


图4 截面坐标系示意

#### 2.2.2 变中径弹簧约束弯矩的解析计算

变中径弹簧弹簧圈半径表达式为:

$$R = a + k_0 \theta \quad (1)$$

式中,  $a = D_1/2$  为弹簧小圈半径;  $k_0 = (D_2 - D_1)/(4n\pi)$  为弹簧半径变化率;  $n$  为弹簧的有效圈数。

丝径斜截面上沿各轴的力矩表达式为:

$$\begin{cases} T_t = \frac{H_p}{2n\pi} \theta \cos \theta \cos \alpha - R \sin \theta \sin \alpha \\ M_m = \frac{H_p}{2n\pi} \theta \sin \theta \\ M_b = -R \sin \theta \cos \alpha - \frac{H_p}{2n\pi} \theta \cos \theta \sin \alpha \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $T_t$  为绕  $t$  轴的扭矩;  $M_b$  为绕  $b$  轴的弯矩;  $M_m$  为绕  $m$  轴的弯矩。

同理, 在变中径弹簧端部施加单位弯矩, 在考虑螺旋角  $\alpha$  的情况下, 可以求得斜截面上沿各轴的力与力矩:

$$\begin{cases} T_{M_t} = \cos \theta \cos \alpha \\ M_{M_m} = \sin \theta \\ M_{M_b} = -\cos \theta \sin \alpha \end{cases} \quad (3)$$

式中,  $T_{M_t}$  为绕  $t$  轴的扭矩;  $M_{M_b}$  为绕  $b$  轴的弯矩;  $M_{M_m}$  为绕  $m$  轴的弯矩。

根据莫尔积分,可以求得变中径弹簧端部在单位横向力、单位弯矩下的转角 $\gamma_{F_x}$ 和 $\gamma_M$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma_{F_x} &= \int_0^{2n\pi} \frac{T_l T_{Ml}}{GI_p} \frac{R}{\cos \alpha} d\theta + \int_0^{2n\pi} \frac{M_m M_{Mm}}{EI_n} \frac{R}{\cos \alpha} d\theta + \\ &\quad \int_0^{2n\pi} \frac{M_b M_{Mb}}{EI_b} \frac{R}{\cos \alpha} d\theta \\ \gamma_M &= \int_0^{2n\pi} \frac{T_l^2}{GI_p} \frac{R}{\cos \alpha} d\theta + \int_0^{2n\pi} \frac{M_m^2}{EI_n} \frac{R}{\cos \alpha} d\theta + \\ &\quad \int_0^{2n\pi} \frac{M_b^2}{EI_b} \frac{R}{\cos \alpha} d\theta \end{aligned} \right. \quad (4)$$

式中, $G=E/[2(1+\mu)]$ 、 $E$ 分别为切变模量和弹性模量; $\mu$ 为弹簧材料的泊松比; $A$ 为弹簧丝径截面的面积; $I_p=\pi d^4/32$ 为弹簧丝径截面的极惯性矩; $I_n=\pi d^4/64$ 、 $I_b=\pi d^4/64$ 分别为弹簧丝径截面对 $n$ 轴、 $b$ 轴的惯性矩。

变中径弹簧端部保持水平,在受到单位横向载荷 $F_x$ 时,会产生稳态约束弯矩 $M_w$ , $M_w$ 的数值大小为 $Q$ ,其表达式为:

$$Q=\gamma_{F_x}/\gamma_M \quad (5)$$

根据式(1)~式(5),可以求得稳态约束弯矩为:

$$M_w = \left( C_a \frac{4n\pi a - k_D + 8k_D n^2 \pi^2}{8} + k_D C_c \frac{a + 2k_D n\pi}{4} \right) \left[ \sin(4n\pi) + \cos(4n\pi)(n\pi \cdot \frac{C_a k_D - k_D C_c (a + 2k_D n\pi)}{2} - C_c \left( \frac{a^2}{4} - \frac{k_D^2}{8} \right)) \right] - \left[ \sin^2(2n\pi) \frac{a C_a}{4} + n^2 \pi^2 C_b \left( a + k_D \frac{4n\pi}{3} \right) + C_c \left( \frac{a^2}{4} - \frac{k_D^2}{8} \right) \cdot [C_d (a + k_D n\pi) + C_e \left( \sin(4n\pi) \frac{a + 2n\pi k_D}{4} - k_D \frac{\sin^2(2n\pi)}{4} \right)] \right]^{-1} \quad (6)$$

式中,

$$\left\{ \begin{aligned} C_a &= \frac{H_p}{2n\pi} \left( \frac{\cos \alpha}{GI_p} + \frac{\sin^2 \alpha}{EI_b \cos \alpha} \right) - \frac{H_p}{2EI_n n\pi \cos \alpha} \\ C_b &= \frac{H_p}{2n\pi} \left( \frac{\cos \alpha}{GI_p} + \frac{\sin^2 \alpha}{EI_b \cos \alpha} \right) + \frac{H_p}{2EI_n n\pi \cos \alpha} \\ C_c &= \frac{\sin \alpha}{GI_p} + \frac{\sin \alpha}{EI_b} \\ C_d &= \frac{\cos \alpha}{GI_p} + \frac{\sin^2 \alpha}{EI_b \cos \alpha} + \frac{1}{EI_n \cos \alpha} \\ C_e &= \frac{\cos \alpha}{GI_p} + \frac{\sin^2 \alpha}{EI_b \cos \alpha} - \frac{1}{EI_n \cos \alpha} \end{aligned} \right. \quad (7)$$

### 3 变中径弹簧稳态横向柔度及稳态横向刚度的解析计算

基于求得的 $M_w$ ,在 $F_x$ 和 $M_w$ 共同作用下,通过力学分析,可以求得斜截面沿各轴上的力与力矩:

$$\left\{ \begin{aligned} T_{F_x M_l} &= \left( \frac{H_p}{2n\pi} \theta - M_w \right) \cos \theta \cos \alpha + R \sin \theta \sin \alpha \\ M_{F_x M_m} &= \left( \frac{H_p}{2n\pi} \theta - M_w \right) \sin \theta \\ M_{F_x M_b} &= -R \sin \theta \cos \alpha - \left( \frac{H_p}{2n\pi} \theta - M_w \right) \cos \theta \sin \alpha \end{aligned} \right. \quad (8)$$

式中, $T_{F_x M_l}$ 为绕 $l$ 轴的扭矩; $M_{F_x M_b}$ 为绕 $b$ 轴的弯矩; $M_{F_x M_m}$ 为绕 $m$ 轴的弯矩。

根据莫尔积分,在弹簧端部施加单位横向载荷 $F_{x0}$ ,力与力矩的表达式为:

$$\left\{ \begin{aligned} T_{F_{x0} M_l} &= \frac{H_p}{2n\pi} \theta \cos \theta \cos \alpha + R \sin \theta \sin \alpha \\ M_{F_{x0} M_m} &= \frac{H_p}{2n\pi} \theta \sin \theta \\ M_{F_{x0} M_b} &= -R \sin \theta \sin \alpha - \frac{H_p}{2n\pi} \theta \cos \theta \sin \alpha \end{aligned} \right. \quad (9)$$

式中, $T_{F_{x0} M_l}$ 为绕 $l$ 轴的扭矩; $M_{F_{x0} M_b}$ 为绕 $b$ 轴的弯矩; $M_{F_{x0} M_m}$ 为绕 $m$ 轴的弯矩。

根据莫尔积分,可求得变中径弹簧稳态横向柔度 $R_w$ :

$$R_w = \int_0^{2n\pi} \frac{T_{F_{x0} M_l} T_{F_x M_l}}{GI_p} \frac{R}{\cos \alpha} d\theta + \int_0^{2n\pi} \frac{M_{F_{x0} M_m} M_{F_x M_m}}{EI_n} \frac{R}{\cos \alpha} d\theta + \int_0^{2n\pi} \frac{M_{F_{x0} M_b} M_{F_x M_b}}{EI_b} \frac{R}{\cos \alpha} d\theta \quad (10)$$

根据式(8)~式(10),若弹簧螺旋角较小,即 $\cos \alpha \approx 1$ 、 $\sin \alpha \approx 0$ ,可求得变中径螺旋弹簧稳态横向柔度为:

$$R_w = \sin(4n\pi) \left( C_{ar} \frac{4n\pi a - k_D + 8k_D n^2 \pi^2}{8} - C_{er} \frac{2n\pi + a}{4} + C_{er} \frac{(8k_D n^2 \pi^2 - 1)(2k_D n\pi + a) - 4n\pi k_D}{8} \right) + \cos(4n\pi) \left( \frac{n\pi}{2} (C_{ar} k_D + C_{er} a) + C_{er} k_D \frac{24n^2 \pi^2 - 3}{16} \right) + \frac{\sin^2(2n\pi)}{4} (C_{er} k_D - C_{ar} a) + n^2 \pi^2 \left( \frac{4}{3} n\pi (C_{br} k_D + C_{dr} a) + C_{br} a + C_{er} k_D + n^2 \pi^2 2C_{dr} k_D \right) + C_{er} n\pi + \frac{3C_{er} k_D}{16} \quad (11)$$

式中,

$$\left\{ \begin{aligned} C_{er} &= \frac{H_p M_w}{2n\pi GI_p} + \frac{H_p M_w}{2n\pi EI_n} - \frac{2ak_D}{EI_b} \\ C_{br} &= \frac{H_p M_w}{2n\pi GI_p} - \frac{H_p M_w}{2n\pi EI_n} + \frac{2ak_D}{EI_b} \\ C_{dr} &= \frac{H_p^2}{4n^2 \pi^2 EI_n} + \frac{k_D^2}{EI_b} - \frac{H_p^2}{4n^2 \pi^2 GI_p} \\ C_{dr} &= \frac{H_p^2}{4n^2 \pi^2 EI_n} + \frac{k_D^2}{EI_b} + \frac{H_p^2}{4n^2 \pi^2 GI_p} \\ C_{er} &= \frac{a^2}{EI_b} \end{aligned} \right. \quad (12)$$

柔度的倒数即为刚度,即变中径稳态横向刚度:

$$K_w = 1/R_w \quad (13)$$

## 4 实例计算

### 4.1 约束弯矩及刚度计算

已知某变中径弹簧的主要参数如下:弹簧小圈半径  $R_1=65$  mm,大圈半径  $R_2=85$  mm,丝径  $d=13$  mm,计算高度  $H_p=352$  mm,有效圈数  $n=4$  圈,弹性模量  $E=206$  GPa,泊松比  $\nu=0.3$ ,弹簧受到的横向载荷  $F_x=300$  N。

将弹簧实际参数代入式(6),可以求得在单位横向力作用下的稳态横向约束弯矩为  $0.1837$  N·m,将弹簧的实际参数代入式(11)、式(13),可以求得稳态横向刚度为  $10.437$  N/mm。

### 4.2 变中径螺旋弹簧稳态横向刚度的ANSYS仿真实验验证

根据弹簧的实际参数,在UG中建立弹簧的三维模型,将模型导入ANSYS Workbench中的静态结构(Static Structural)模块,进行静力学特性仿真分析。对弹簧的底部施加固定约束,对弹簧的端部施加大小为  $300$  N的横向载荷以及位移约束,对4组不同网格尺寸的弹簧挠度进行仿真,分析模型的网格收敛性,结果如表1所示。

表1 网格收敛性分析

编号	网格数量/个	挠度/mm	刚度/N·mm <sup>-1</sup>
1	5 225	28.805	10.414 9
2	14 996	28.764	10.429 7
3	22 329	28.762	10.430 4
4	79 296	28.763	10.430 1

由表1可知,弹簧的挠度几乎不随网格数量而改变,证明模型具有较好的网格收敛性。弹簧仿真结果云图如图5所示。由图5可知,弹簧最大挠度值为  $28.806$  mm,刚度为  $10.415$  N/mm,与计算值偏差仅为  $0.21\%$ ,表明本文所建立的变中径螺旋弹簧稳态横向刚度的解析计算式是正确的。

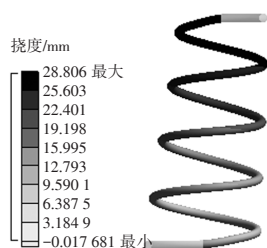


图5 弹簧变形云图

## 5 变中径螺旋弹簧相对横向挠度的解析计算

### 5.1 弹簧等效悬臂杆等效丝径的计算

为了计算变中径螺旋弹簧受横向力后,弹簧任意位置的

稳态挠度,将弹簧等效为一悬臂杆,如图6所示,并建立坐标系。其中,  $F_x$  为作用在悬臂杆端部且平行于  $x$  轴的单位横向力。考虑变中径弹簧与等效悬臂杆的刚度相等,运用莫尔积分,可以求得等效悬臂杆的丝径  $d_c$ 。莫尔积分可以表达为:

$$R_w = \int_0^{H_p} \frac{(y + M_w)^2}{EI_{mR}} dy \quad (14)$$

式中,  $I_{mR} = \pi d_c^4 / 64$  为等效悬臂杆丝径截面对  $m$  轴的惯性矩;  $y$  为等效悬臂杆任意位置的纵坐标。

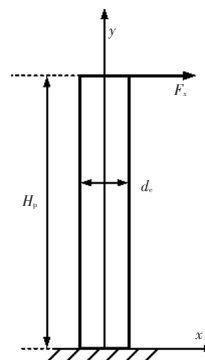


图6 等效悬臂杆参数

将式(13)代入式(14),可以求得积分结果为:

$$\frac{1}{K_w} = \frac{H_p(H_p^2 - 3H_p M_w + 3M_w^2)}{3EI_{mR}} \quad (15)$$

将  $I_{mR}$  代入式(15),可以求得  $d_c$  的表达式为:

$$d_c = \sqrt[4]{\frac{64K_w H_p (H_p^2 + 3H_p M_w + 3M_w^2)}{3E\pi}} \quad (16)$$

将弹簧的实际参数代入式(16),可以求得等效悬臂杆的丝径  $d_c=15$  mm。

### 5.2 不同弹簧位置角处的稳态相对横向柔度计算

基于前文建立的等效悬臂杆,杆的端部在单位横向力作用下,应用莫尔积分,可以求得不同位置  $y_0$  处的横向稳态相对柔度  $R_{wy}$ :

$$R_{wy} = \int_0^{H_p} \frac{(y + M_w)(y - y_0 + M_w)}{EI_{mR}} dy \quad (17)$$

将等效悬臂杆换为弹簧,弹簧任意位置的稳态柔度可以用  $\theta_R$  表示,以  $\theta_R$  为坐标,对上述表达式进行坐标变换,令  $y = H_p \theta_R / (2n\pi)$ ,  $y_0 = H_p \varphi / (2n\pi)$ 。

可以求得积分结果为:

$$R_{w\varphi} = 4H_p(\varphi - 2n\pi) \left( H_p^2 \varphi^2 + 2n\pi H_p^2 \varphi - 8n^2 \pi^2 H_p^2 - 24n^2 \pi^2 H_p M_w - 24n^2 \pi^2 M_w^2 \right) \cdot (3Ed_c^4 n^3 \pi^4)^{-1} \quad (18)$$

式中,  $R_{w\varphi}$  为弹簧位置角  $\varphi$  处的稳态相对横向柔度。

根据弹簧所受横向力  $F$ ,可以求得任意位置角处的横向挠度  $f_{w\varphi}$ :

$$f_{w\varphi} = FR_{w\varphi} \quad (19)$$

结合式(18)、式(19),可以得到变中径弹簧任意位置的稳态横向挠度为:

$$f_{w\varphi} = F \cdot \left[ 4H_p(\varphi - 2n\pi)(H_p^2\varphi^2 + 2n\pi H_p^2\varphi - 8n^2\pi^2 H_p^2 - 24n^2\pi^2 H_p M_w - 24n^2\pi^2 M_w^2) \right] \cdot (3Ed_c^4 n^3 \pi^4)^{-1} \quad (20)$$

将弹簧的实际参数代入式(20),在弹簧端部施加300 N的横向载荷,可求得位置角为0处即弹簧端部的稳态挠度 $f_{w\varphi}=28.7439$  mm,与仿真结果偏差仅为0.21%,表明上述理论分析正确。利用MATLAB绘制弹簧在横向载荷 $F=300$  N作用下任意位置处的稳态横向挠度,如图7所示。

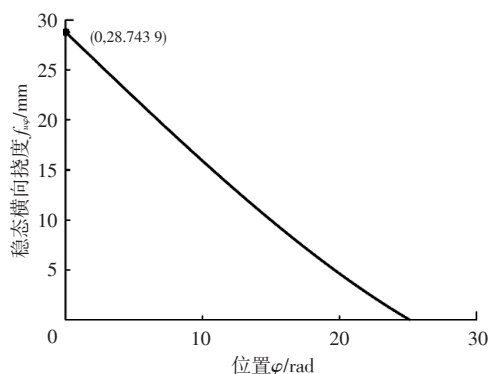


图7 弹簧横向挠度示意

### 5.3 基于稳态相对横向挠度的弹簧形状计算

根据弹簧不同位置角 $\theta$ 处的坐标,可以表达出其空间形状,即弹簧沿坐标轴 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 的表达式为:

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \\ z = \frac{H_p}{2n\pi} \theta \end{cases} \quad (21)$$

根据式(20)求解可得弹簧任意位置处的横向挠度,因此,可以求得弹簧变形后沿 $x$ 轴的表达式为:

$$x = R \cos \theta + f_{w\varphi} \quad (22)$$

根据式(21)、式(22),可将弹簧初始状态和受载状态绘制在同一图中,如图8所示。

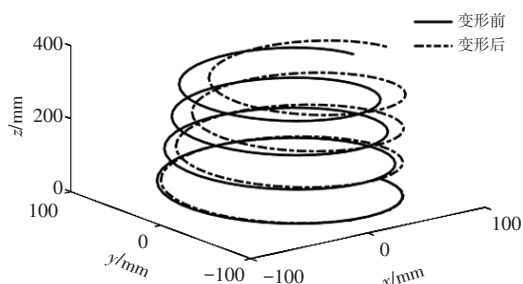


图8 弹簧变形示意

通过上述理论分析,可以正确计算变中径弹簧任意位置的横向挠度。其中,弹簧端点处最大稳态横向

挠度为28.7439 mm,弹簧终点处最小稳态横向挠度为0 mm。

## 6 结束语

在一定计算高度下,本文针对变中径弹簧一端固定、另一端在稳态弯矩约束下受横向载荷的情况进行了力学研究,通过力学分析,建立了弹簧端部稳态约束弯矩、稳态横向刚度的计算式,结合具体的变中径弹簧计算实例,与ANSYS仿真结果进行比较,其稳态横向刚度偏差在0.21%以内,表明所建立的变中径弹簧稳态横向刚度计算方法可靠,实现了对变中径弹簧稳态横向刚度的准确计算。最后,建立了弹簧稳态相对横向挠度表达式,可以计算出其任意位置的横向挠度,结合实际计算,弹簧任意位置处的横向挠度计算值与仿真值吻合,偏差在0.21%以内,表明变中径弹簧稳态相对挠度计算公式是正确的。

本文所建立的变中径弹簧端部约束弯矩、稳态横向刚度、稳态相对挠度表达式经仿真验证是准确可靠的,可为变中径弹簧的横向分析、机车动力学分析提供一定参考。对于多段组合螺旋弹簧的稳态横向刚度还有待进一步研究。

### 参 考 文 献

- [1] 安琦, 顾大强. 机械设计[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 400-420.  
AN Q, GU D Q. Machine Design[M]. Beijing: Science Press, 2008: 400-420.
- [2] YANG G W, XIAO S N. Study on Lateral Stiffness for Flexicoil Circle Springs with Rubber Pads[J]. Advanced Materials Research, 2010, 118: 902-906.
- [3] JIANG Y P. Lateral Stiffness Simplified Calculation for Flexicoil Spring with Rubber Pad on One End of Railway Locomotive and Rolling Stock[J]. Applied Mechanics and Materials, 2014, 525: 214-217.
- [4] 米彩盈. 一种确定高圆弹簧横向刚度的有效方法[J]. 西南交通大学学报, 1998(3): 62-66.  
MI C Y. A Method for Analyzing the Lateral Stiffness of Flexicoil Springs[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 1998(3): 62-66.
- [5] 米彩盈, 李芾. 轴箱螺旋压缩圆弹簧横向刚度分析[J]. 铁道机车车辆, 2003(5): 33-35.  
MI C Y, LI F. Lateral Stiffness Analysis of Axle-Box Spring for Rail Vehicles[J]. Railway Locomotive & Car, 2003(5): 33-35.
- [6] 郑李雄, 米彩盈. 铁道车辆转向架摇动台悬挂系统横向刚度研究[J]. 电力机车与城轨车辆, 2016, 39(1): 35-37.  
ZHENG L X, MI C Y. Transverse Stiffness Research of

- Swing Bolster Bogie Suspension of Rolling Stock[J]. Electric Locomotives & Mass Transit Vehicles, 2016, 39(1): 35-37.
- [7] 肖绯雄, 樊光建. 机车车辆中螺旋弹簧刚度计算[J]. 内燃机车, 2006(4): 10-11+14+49.
- XIAO F X, FAN G J. Stiffness Calculation of Coil Spring Used in Locomotive and Rolling Stock[J]. Railway Locomotive and Motor Car, 2006(4): 10-11+14+49.
- [8] 阳光武, 肖守讷, 张卫华. 螺旋圆弹簧的横向刚度分析[J]. 中国铁道科学, 2010, 31(4): 59-62.
- YANG G W, XIAO S N, ZHANG W H. Analysis on the Lateral Stiffness of the Helical Circle Spring[J]. China Railway Science, 2010, 31(4): 59-62.
- [9] 林柄宏, 黄志辉, 王玉辉, 等. 异形汽车座椅弹簧的刚度及应力分析[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2021, 42(6): 720-724.
- LIN B H, HUANG Z H, WANG Y H, et al. Research on Stiffness and Stress of Special - Shaped Automobile Seat Spring[J]. Journal of Huaqiao University (Natural Science), 2021, 42(6): 720-724.
- [10] 肖光育, 周磊, 金敏楨. 腰鼓型变刚度螺旋弹簧的设计[J]. 时代汽车, 2019(12): 73-75.
- XIAO G Y, ZHOU L, JIN M Z. Design of Waist Drum Type Variable Stiffness Coil Spring[J]. Auto Time, 2019(12): 73-75.
- [11] 张名扬, 张开林, 姚远. 螺旋弹簧横向静刚度计算及动刚度频变分析[J]. 机械制造与自动化, 2021, 50(3): 28-32.
- ZHANG M Y, ZHANG K L, YAO Y. Lateral Static Stiffness Calculation and Dynamic Stiffness Frequency Variety Analysis of Helical Spring[J]. Machine Building & Automation, 2021, 50(3): 28-32.
- [12] 丘盛昌, 安琦. 圆柱螺旋弹簧横向刚度的计算方法[J]. 华东理工大学学报(自然科学版), 2015, 41(6): 846-851.
- QIU S C, AN Q. Calculation Method of Lateral Stiffness of Cylindrical Helical Spring[J]. Journal of East China University of Science and Technology (Natural Science), 2015, 41(6): 846-851.
- [13] 方子帆, 郑小伟, 何孔德, 等. 多段式组合变刚度悬架螺旋弹簧设计与研究[J]. 机械设计与研究, 2018, 34(6): 75-79.
- FANG Z F, ZHENG X W, HE K D, et al. Design and Research of Multi - Stage Combined Variable Stiffness Suspension Spiral Spring[J]. Machine Design & Research, 2018, 34(6): 75-79.
- [14] 张英会. 弹簧手册[M]. 北京: 机械工业出版社, 2017: 401-409.
- ZHANG Y H. Spring Manual[M]. Beijing: Machinery Industry Press, 2017: 401-409.

(责任编辑 斛 畔)

修改稿收到日期为2022年5月31日。

## 《汽车工程师》征稿启事

《汽车工程师》于1974年创刊,是由中国第一汽车集团有限公司主管、中国第一汽车股份有限公司主办的、国内外公开发行的汽车应用技术类学术期刊,国家新闻出版广电总局第一批认定的学术期刊。

《汽车工程师》以报道汽车产品开发领域的成果为主,专注于技术开发与应用,提供汽车设计创新解决方案。《汽车工程师》将把握电动化、智能化、网联化、共享化的汽车技术主流发展趋势,努力在电池技术、电驱技术、电控技术、高压技术、补能技术、燃料电池技术、智慧控制、智能驾驶、智享座舱、智能悬架、线控转向、线控制动、NVH、功能安全、预期功能安全、信息安全、数据安全、被动安全、高效动力、高效传动、智能管理、低风阻、低滚阻、轻量化领域吸收优质稿源,为我国汽车工程技术创新能力提升贡献力量。

热忱欢迎汽车行业的专家学者不吝赐稿,反映国家重点扶持项目、自然科学基金项目和其他重点项目等研究成果的稿件将优先发表,我们期待与您共同践行“把论文写在祖国大地上”的指示精神,为强大中国汽车工业作贡献!

《汽车工程师》编辑部