

含时滞的半主动悬架系统稳定性时频分析

王策 罗晓亮 张洋瑞

(重庆交通大学, 机电与车辆工程学院, 重庆 400074)

【摘要】为研究悬架时滞对车辆的影响,以含时滞的1/4半主动悬架系统为研究对象,利用时滞系统稳定性条件,求解可调节阻尼的稳定区间,对于在稳定区间外的情况,求解临界时滞点,并在离散冲击路面下进行了数值仿真,结果表明:在稳定区间内时,合理选取时滞可提高平顺性和操纵稳定性;在稳定区间外时,通过选取时滞临界点及附近点对悬架性能指标进行时频分析,时滞小于临界时滞点时,系统仍保持稳定,时滞大于临界时滞点时,系统发散不稳定,车辆的平顺性和操纵稳定性恶化,且随着时滞的增加,悬架性能指标的功率逐渐增大,且低频段悬架性能指标功率明显大于其他频段悬架性能指标功率。

关键词:半主动悬架 时滞 临界点 时频分析 平顺性 操纵稳定性

中图分类号:U463.3 **文献标志码:**A **DOI:** 10.20104/j.cnki.1674-6546.20230269

Time-Frequency Stability Analysis of Semi-Active Suspension System

Wang Ce, Luo Xiaoliang, Zhang Yangrui

(School of Mechanotronics and Vehicle Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074)

【Abstract】In order to study the influence of suspension time delay on the vehicle, the 1/4 semi-active suspension system with time delay was taken as the research object. The stability condition of the time-delay system was used to solve the stability interval of the adjustable damping. For the case outside the stability interval, the critical time delay point was solved, and the numerical simulation was carried out under the discrete impact road surface. The results show that when the time delay is reasonably selected in the stability interval, the ride comfort and handling stability can be improved. When the stability interval is outside, the time-frequency analysis of the suspension performance index is carried out by selecting the critical point of time delay and the nearby points. When the time delay is less than the critical time delay point, the system remains stable. When it is greater than the critical time delay point, the system diverges and is unstable, and the ride comfort and handling stability of the vehicle deteriorate. With the increase of time delay, the power of the suspension performance index gradually increases, and the power of the suspension performance index in the low frequency band is significantly greater than that in other frequency bands.

Key words: Semi-active suspension, Time delay, Critical point, Time-frequency analysis, Smoothness, Handling stability

【引用格式】王策, 罗晓亮, 张洋瑞. 含时滞的半主动悬架系统稳定性时频分析[J]. 汽车工程师, 2023(8): 21-29.

WANG C, LUO X L, ZHANG Y R. Time-Frequency Stability Analysis of Semi-Active Suspension System[J]. Automotive Engineer, 2023(8): 21-29.

1 前言

汽车悬架的作用是减少车辆行驶时的冲击,然而,悬架的阻尼器在响应上存在时滞,可能导致悬架系统失稳,出现危及车辆行驶安全的分岔现象,严重影响车辆的乘坐舒适性。因此,合理的时滞设

计可以提高车辆的稳定性。

对于悬架系统的时滞稳定性分析,学者们开展了大量研究。汪若尘等^[1]基于多项式判别理论,研究了含时滞的半主动悬架系统的失稳机理,得到了悬架系统的失稳条件和临界时滞,为半主动悬架系统的时滞控制研究提供了基础。邵素娟等^[2]运用广

义施图姆(Sturm)准则推导了时滞无关稳定区域的临界增益和稳定性开关的临界时滞。庞辉等^[3]基于时滞开关天棚控制的半主动悬架模型和时滞微分方程理论,提出了利用李雅普诺夫稳定性理论求解悬架控制系统临界时滞的理论分析和数值计算方法,结果表明,当时滞达到临界值时,悬架系统的稳定性将严重恶化。闫光辉等^[4]利用劳斯-赫尔维茨(Routh-Hurwitz)稳定性准则分析了模型的稳定性条件,并计算了系统的临界时滞,计算分析和仿真结果表明,Routh-Hurwitz稳定性准则可以为主动悬架的设计和滞后不稳定机制奠定理论基础。Chu等^[5]研究了时滞对受控质量阻尼单自由度系统稳定性的影响和修正问题,求解了导致系统失稳的临界时滞的显式解和数值解。Yan等^[6]基于稳定性切换理论,推导了含时滞的主动悬架系统稳定性条件,并通过状态变换和优化方法设计了最优控制策略,仿真结果表明,该策略下悬架系统保持稳定,性能得到改善。

上述研究中时滞方程理论繁琐复杂,难以理解,需简化处理,且未针对特定工况讨论不同时滞的影响,未确定稳定条件下的较优时滞。由于含时滞的1/4半主动悬架系统的特征方程较为复杂,本文将利用滞后理论的全时滞稳定代数判据和稳定性临界点分析半主动悬架系统的稳定性,得到系统全时滞稳定条件和稳定性临界点,通过数值仿真,在特定工况下讨论时滞对系统的影响,并通过时频分析,研究不同时滞点在不同频段对悬架系统稳定性的影响。

2 含时滞的半主动悬架建模

车身的垂向振动主要影响车辆行驶的平顺性,而车辆的结构又相当复杂,本文忽略系统的车身俯仰运动和侧倾运动,建立如图1所示的含时滞的1/4半主动悬架模型^[7]。其中, m_1 、 m_2 分别为簧上质量、簧下质量, k_2 、 c_2 分别为悬架系统的刚度和减振器基值阻尼, k_1 为轮胎刚度, z_2 、 z_1 分别为簧上质量和簧下质量的位移, q 为路面输入, τ 为时滞, $F(t-\tau)$ 为减振器的时滞阻尼力(主要为响应时滞产生的阻尼力)。

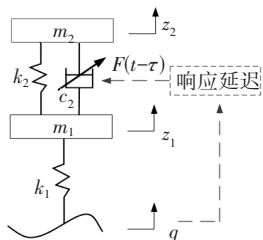


图1 含时滞的1/4半主动悬架模型

悬架减振器的阻尼可分为基值阻尼 c_2 和可调节阻尼 c_r 。考虑到半主动悬架是较为复杂的系统,存在许多时间上的滞后,例如,由作动器引起的响应时间滞后、测量信号在传输上的传输时间滞后和单片机的计算时间滞后均可能影响系统的稳定性。然而,与响应时间滞后相比,计算时间滞后和传输时间滞后非常小,对系统的影响较小,因此本文主要研究减振器内部特性的响应时间滞后对系统稳定性的影响^[8]。

含时滞的1/4半主动悬架模型的动力学方程为:

$$\begin{cases} m_2 \ddot{z}_2 + k_2(z_2 - z_1) + c_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + F(t - \tau) = 0 \\ m_1 \ddot{z}_1 - k_2(z_2 - z_1) - c_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + k_1(z_1 - q) - F(t - \tau) = 0 \\ F(t - \tau) = c_r[\dot{z}_2(t - \tau) - \dot{z}_1(t - \tau)] \end{cases} \quad (1)$$

3 时滞稳定条件下可调阻尼和临界时滞的求解

3.1 时滞系统稳定条件下可调阻尼 c_r 求解

根据时滞微分方程理论,悬架系统的微分方程通解的形式为:

$$z_i(t) = Z_i(s)e^{st}, \quad i=1,2 \quad (2)$$

式中, $Z_i(s)$ 为 $z_i(t)$ 经过拉氏变换的解; s 为特征值; t 为时间。

将式(2)代入式(1)得到特征方程:

$$D(s, \tau) = \begin{vmatrix} m_1 s^2 + c_r s e^{-s\tau} + k_1 + k_2 & -c_2 - c_r s e^{-s\tau} - k_2 \\ -c_2 - c_r s e^{-s\tau} - k_2 & m_1 s^2 + c_r s e^{-s\tau} + k_2 \end{vmatrix} \quad (3)$$

即

$$D(s, \tau) = m_1 m_2 s^4 + (m_1 + m_2)(c_2 + c_r e^{-s\tau})s^3 + (m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2)s^2 + k_1(c_2 + c_r e^{-s\tau})s + k_1 k_2 \quad (4)$$

要使含有时滞的系统稳定,特征方程 $D(s, \tau) = 0$ 需满足以下条件^[9]:

- a. 特征方程 $D(s, \tau) = 0$ 的解皆有负实部;
- b. 特征方程 $D(s, \tau) \neq 0$ 恒成立。

在条件a下,当 $\tau = 0$ 时,特征方程为:

$$D(s, 0) = m_1 m_2 s^4 + (m_1 + m_2)(c_2 + c_r)s^3 + (m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2)s^2 + k_1(c_2 + c_r)s + k_1 k_2 = 0 \quad (5)$$

对于条件a,式(5)的所有解均有负实部。然而,在实际悬架系统中,系统的各参数均不可能为负数,因此式(5)各项的系数均大于0。当 $s=0$ 时, $D(0,0) = k_1 k_2$,显然恒大于0;方程的最高次项的幂为偶数,因此,不论 s 趋于 ∞ 或 $-\infty$,方程 $D(s,0) > 0$ 恒成立,所以,对 $\forall s \in [0, +\infty)$,式(5)中各项的系数均为正,方程 $D(s,0) > 0$ 。根据劳斯(Routh)判据判断系统稳定性的充要条件:特征方程所有项的系数均为正数,

且Routh表中第1列数均大于0,如表1所示;式(5)的系数满足表1所示的关系。

表1 条件a的Routh判据表

项	多项式系数			
s^4	$m_1 m_2$	$m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_1$	$k_1 k_2$	0
s^3	$(m_1 + m_2)(c_2 + c_\tau)$	$k_1(c_2 + c_\tau)$	0	0
s^2	a_0	b_0	0	
s^1	c_0	0	0	
s^0	d_0	0		

表1中 a_0, b_0, c_0, d_0 可表示为:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{(m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2)(m_1 + m_2)(c_2 + c_\tau) - m_1 m_2 k_1 (c_2 + c_\tau)}{(m_1 + m_2)(c_2 + c_\tau)} \\ c_0 = \frac{b_0(m_1 + m_2)(c_2 + c_\tau) - a_0(m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2)}{a_0} \\ b_0 = k_1 k_2 \\ d_0 = b_0 \end{cases} \quad (6)$$

因此,满足条件a的公式为:

$$\begin{cases} m_1 m_2 > 0 \\ (m_1 + m_2)(c_2 + c_\tau) > 0 \\ a_0 > 0 \\ c_0 > 0 \\ d_0 > 0 \end{cases} \quad (7)$$

根据式(6)和式(7)可以求解出满足条件的可调阻尼 c_τ 的取值范围。簧上质量 m_2 、簧下质量 m_1 、轮胎刚度 k_1 、悬架弹簧刚度 k_2 、减振器基值阻尼 c_2 、减振器可调阻尼 c_τ 均为正值,故式(7)恒成立,可调阻尼 c_τ 皆满足条件a。

对于条件b,要使特征方程 $D(s, \tau) \neq 0$ 恒成立,令 $s = iy$,且 $\forall y \in \mathbf{R}^+$ 及 $\forall \tau \in \mathbf{R}^+$,则特征方程 $D(s, \tau) \neq 0$ 恒成立等价于 $D(iy, \tau) \neq 0$ 恒成立, y 为不等于0的实数, z 为实数,可利用分线式映照处理方程中含时滞的指数项^[9]:

$$\omega = (1+z)/(1-z) \quad (8)$$

集合 $\{\omega = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$ 与 $\{z = iy, y \in \mathbf{R}\}$ 之间构成一一对应关系,式(4)可表示为:

$$\begin{aligned} D(z, y) = &[-(m_1 + m_2)c_2 y^3 + (m_1 + m_2)c_\tau y^3 + k_1 c_2 y - \\ &k_1 c_\tau y]z + m_1 m_2 y^4 - (m_2 k_1 + m_2 k_2 + \\ &m_1 k_2)y^2 + k_1 k_2 + \{[-m_1 m_2 y^4 + (m_2 k_1 + \\ &m_2 k_2 + m_1 k_2)y^2 - k_1 k_2]z + k_1 c_2 y - \\ &(m_1 + m_2)c_2 y^3 - (m_1 + m_2)c_\tau y^3 + k_1 c_\tau y\}i \end{aligned} \quad (9)$$

将式(9)中的实部和虚部分开,实部用 $f(z, y)$ 表示,虚部用 $g(z, y)$ 表示:

$$\begin{cases} f(z, y) = [-(m_1 + m_2)c_2 y^3 + (m_1 + m_2)c_\tau y^3 + \\ k_1 c_2 y - k_1 c_\tau y]z + m_1 m_2 y^4 - (m_2 k_1 + \\ m_2 k_2 + m_1 k_2)y^2 + k_1 k_2 \\ g(z, y) = [-m_1 m_2 y^4 + (m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2)y^2 - \\ k_1 k_2]z + k_1 c_2 y - (m_1 + m_2)c_2 y^3 - \\ (m_1 + m_2)c_\tau y^3 + k_1 c_\tau y \end{cases} \quad (10)$$

根据式(10)可以求解其结式 $R(f, g)$:

$$\begin{aligned} R(f, g) = &m_1^2 m_2^2 y^8 + [(m_1 + m_2)^2 (c_2 + c_\tau)(c_2 - c_\tau) - \\ &2m_1 m_2 (m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2)]y^6 + \\ &[(m_1 + m_2)k_1 (c_2 + c_\tau)(c_\tau - c_2) + \\ &(m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2)k_1 k_2 + \\ &(m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2)^2 + m_1 m_2 k_1 k_2]y^4 + \\ &[k_1^2 (c_2 + c_\tau)(c_2 - c_\tau) - 2(m_2 k_1 + m_2 k_2 + \\ &m_1 k_2)k_1 k_2]y^2 + k_1^2 k_2^2 \end{aligned} \quad (11)$$

令

$$\begin{cases} a = m_1^2 m_2^2 \\ b = [(m_1 + m_2)^2 (c_2 + c_\tau)(c_2 - c_\tau) - \\ 2m_1 m_2 (m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2)] \\ c = [2(m_1 + m_2)k_1 (c_2 + c_\tau)(c_\tau - c_2) + \\ (m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2)^2 + 2m_1 m_2 k_1 k_2] \\ d = [k_1^2 (c_2 + c_\tau)(c_2 - c_\tau) - 2(m_2 k_1 + \\ m_2 k_2 + m_1 k_2)k_1 k_2] \\ e = k_1^2 k_2^2 \end{cases} \quad (12)$$

则

$$R(f, g) = ay^8 + by^6 + cy^4 + dy^2 + e \quad (13)$$

令

$$M(y) = y^8 + \frac{b}{a}y^6 + \frac{c}{a}y^4 + \frac{d}{a}y^2 + \frac{e}{a} \quad (14)$$

根据 $M(y) = 0$ 无实根即等价于条件b的解,可求解出稳定条件下可调阻尼 c_τ 的取值范围。

综合条件a和条件b可求解可调阻尼 c_τ 的取值范围。

3.2 时滞临界点的求解

时滞位移反馈控制会扰动悬架系统。为保证系统的稳定性,本文采用特征根和稳定临界点的方法分析时滞系统的稳定性。时滞独立稳定区是根据悬架系统参数确定的,系统的稳定性不受时滞的影响。

含单个时滞的常系数时滞微分系统的特征方程具有以下一般形式^[10]:

$$D(s, \tau) = P_\tau(s) + Q_\tau(s)e^{-s\tau} = 0 \quad (15)$$

其中, $P_\tau(s)$ 的次数较 $Q_\tau(s)$ 高,时滞 $\tau \geq 0$,结合式(4)可得到多项式 $P_\tau(s)$ 和 $Q_\tau(s)$:

$$P_T(s) = m_1 m_2 s^4 + (m_1 c_2 + m_2 c_2) s^3 + k_1 c_2 s + k_1 k_2 + (m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2) s^2 \quad (16)$$

$$Q_T(s) = (m_1 + m_2) c_\tau s^3 + k_1 c_\tau s \quad (17)$$

由时滞稳定性理论可知,时滞系统渐近稳定的充分条件是特征方程的特征解均含负实部。当特征根包含纯虚数时,系统处于稳定与不稳定的边界。假设特征方程存在虚根 $s = \pm i\omega (\omega > 0)$ 到达虚轴时,才可能发生稳定性切换,稳定性切换点应满足 $D(i\omega, \tau) = 0$,用欧拉公式 $e^{-i\omega} = \cos(\omega\tau) - i \cdot \sin(\omega\tau)$,则式(15)可表示为^[11]:

$$D(i\omega, \tau) = P_R(\omega) + iP_I(\omega) + [Q_R(\omega) + iQ_I(\omega)][\cos(\omega\tau) - i \cdot \sin(\omega\tau)] = 0 \quad (18)$$

其中:

$$\begin{cases} P_R(\omega) = \text{Re}(P(i\omega)) = m_1 m_2 \omega^4 - (m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2) \omega^2 + k_1 k_2 \\ P_I(\omega) = \text{Im}(P(i\omega)) = -(m_1 c_2 + m_2 c_2) \omega^3 + k_1 c_2 \omega \\ Q_R(\omega) = \text{Re}(Q(i\omega)) = 0 \\ Q_I(\omega) = \text{Im}(Q(i\omega)) = -(m_1 c_\tau + m_2 c_\tau) \omega^3 + k_1 c_\tau \omega \end{cases} \quad (19)$$

为了使 $D(i\omega, \tau) = 0$, 必须将多项式中的实部与虚部分离。由于式(18)的实部和虚部均为0,可得到:

$$\begin{cases} Q_R \cos(\omega\tau) + Q_I \sin(\omega\tau) = -P_R \\ Q_I \cos(\omega\tau) - Q_R \sin(\omega\tau) = -P_I \end{cases} \quad (20)$$

根据 $\sin^2(\omega\tau) + \cos^2(\omega\tau) = 1$, 消除三角函数项,得到关于 ω 的多项式方程 $F(\omega)$:

$$F(\omega) = P_R^2 + P_I^2 - (Q_R^2 + Q_I^2) = \omega^{2n} + b_1 \omega^{2(n-1)} + b_2 \omega^{2(n-2)} + b_3 \omega^{2(n-3)} + \dots + b_{n-1} \omega^2 + b_n \quad (21)$$

式中, n 为多项式的项数。

根据式(19)可得:

$$F(\omega) = m_1^2 m_2^2 \omega^8 + (m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2)^2 \omega^4 + k_1^2 k_2^2 - 2m_1 m_2 (m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2) \omega^6 - 2k_1 k_2 (m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2) \omega^2 + 2m_1 m_2 k_1 k_2 \omega^4 + (m_1 c_2 + m_2 c_2)^2 \omega^6 + k_1^2 c_2^2 \omega^2 - 2k_1 c_2 (m_1 c_2 + m_2 c_2) \omega^4 - [(m_1 c_\tau + m_2 c_\tau)^2 \omega^6 + k_1^2 c_\tau^2 \omega^2 - 2k_1 c_\tau (m_1 c_\tau + m_2 c_\tau) \omega^4] \quad (22)$$

综上所述, $D(i\omega, \tau) = 0$ 即可等价于 $F(\omega) = 0$ 。

系统稳定性切换点在时滞无关稳定性区域外时,系统稳定性是不固定的。特征根的实部会随着时滞的增加而改变符号,这意味着会通过改变时滞来改变系统的稳定性。假设方程实根 ω 为正,则 ω 下的一系列临界时滞可由式(23)求解:

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{-P_R Q_I + P_I Q_R}{Q_R^2 + Q_I^2} \\ \cos \theta = \frac{-P_R Q_R - P_I Q_I}{Q_R^2 + Q_I^2} \end{cases} \quad (23)$$

其中, $\theta = \omega\tau$, θ 的取值可由式(23)、式(19)求解,取值范围为 $[0, 2\pi]$, 因此,一系列的临界时滞点为^[12]:

$$\tau_k = \frac{\arctan \frac{m_1 m_2 \omega^4 - (m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2) \omega^2 + k_1 k_2}{-(m_1 c_2 + m_2 c_2) \omega^3 + k_1 c_2 \omega} + 2k\pi}{\omega} = \frac{\theta + 2k\pi}{\omega}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (24)$$

得到临界时滞点后,需要判断每个临界时滞点对应的特征根实部的变化,从而判断系统稳定性的变化情况。式(18)可以视为 s 对 τ 的函数,通过求导可得到特征根实部对临界时滞点的变化趋势,由 T 表示:

$$T = \text{sgn} \left\{ \text{Re} \left(\frac{ds}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_k, s=i\omega} \right) \right\} \quad (25)$$

由式(15)可得:

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{sQ(s)}{P'(s)e^{s\tau} + Q'(s) - \tau Q(s)} \quad (26)$$

从而得到:

$$\begin{aligned} T &= \text{sgn} \left\{ \text{Re} \left(\frac{ds}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_k, s=i\omega} \right) \right\} = \text{sgn} \left\{ \text{Re} \left(\frac{d\tau}{ds} \Big|_{\tau=\tau_k, s=i\omega} \right) \right\} \\ &= \text{sgn} \left\{ \text{Re} \left(-\frac{P'(i\omega)}{i\omega P(i\omega)} + \frac{Q'(i\omega)}{i\omega Q(i\omega)} \right) \right\} \\ &= -\text{sgn} \left\{ \text{Im} \left(-\frac{P'(i\omega)}{\omega P(i\omega)} - \frac{Q'(i\omega)}{\omega Q(i\omega)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} &= -\text{sgn} \left\{ \text{Im} \left(-\frac{P'(i\omega) \bar{P}(i\omega)}{\omega |P(i\omega)|^2} - \frac{Q'(i\omega) \bar{Q}(i\omega)}{\omega |Q(i\omega)|^2} \right) \right\} \\ &= -\text{sgn} \left\{ \text{Im} (P'(i\omega) \bar{P}(i\omega) - Q'(i\omega) \bar{Q}(i\omega)) \right\} \end{aligned}$$

式中^[13]:

$$\begin{aligned} &-\text{Im} (P'(i\omega) \bar{P}(i\omega) - Q'(i\omega) \bar{Q}(i\omega)) \\ &= 2(P_R P'_R + P_I P'_I - Q_R Q'_R - Q_I Q'_I) \end{aligned} \quad (28)$$

根据式(21)可得:

$$F'(\omega) = 2(P_R P'_R + P_I P'_I - Q_R Q'_R - Q_I Q'_I) \quad (29)$$

因此:

$$\begin{aligned} T &= \text{sgn} F'(\omega) \\ &= \text{sgn} [8m_1^2 m_2^2 \omega^7 - 12m_1 m_2 (m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2) \omega^5 + 4(m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2 + 2m_1 m_2 k_1 k_2) \omega^3 + 4k_1 k_2 (m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2) \omega + 6(m_1 c_2 + m_2 c_2)^2 \omega^5 - 8k_1 c_2 (m_1 c_2 + m_2 c_2) \omega^3 + 2k_1^2 c_2^2 \omega - 6(m_1 c_\tau + m_2 c_\tau)^2 \omega^5 + 8k_1 c_\tau (m_1 c_\tau + m_2 c_\tau) \omega^3 - 2k_1^2 c_\tau^2 \omega] \end{aligned} \quad (30)$$

从方程 $F(\omega)=0$ 中解得的简单正根为:

$$\omega_1 > \omega_2 > \omega_3 > \dots > \omega_m > 0 \quad (31)$$

相应地得到一系列的临界时滞点 $\tau_{i,k}(i=1,2,\dots, m; k=0,1,2,\dots)$,且有:

$$\tau_{i,0} < \tau_{i,1} < \tau_{i,2} < \tau_{i,3} < \tau_{i,4} \dots \quad (32)$$

由于多项式 $F(\omega)$ 的第1项的系数大于0,有:

$$\begin{aligned} F'(\omega_1) > 0, F'(\omega_2) < 0, \\ F'(\omega_3) > 0, F'(\omega_4) < 0, \dots \end{aligned} \quad (33)$$

和

$$\begin{aligned} \tau_{i,k+1} - \tau_{i,k} &= \frac{2\pi}{\omega_i} < \tau_{i+1,k+1} - \tau_{i+1,k} \\ &= \frac{2\pi}{\omega_{i+1}} (i=1,2,3,\dots,m-1; k=0,1,2,3,\dots) \end{aligned} \quad (34)$$

特征根实部的变化可以由式(25)确定: $T=1$ 表示随着时滞 τ 的增加,特征根 s 的实部在复平面内由左向右穿过虚轴,系统从稳定切换到不稳定; $T=-1$ 表示随着时滞 τ 的增加,特征根 s 的实部由右向左穿过虚轴,系统从不稳定切换到稳定。如果方程没有正的实根,则系统不进行稳定性切换,即无论 τ 如何取值,系统都是稳定的。如果方程有正的实根,则系统将进行有限次的稳定性切换,最终变得不稳定。因此,利用正实根数量的变化,可以求解系统的临界时滞。

4 时频分析

仿真工况设置为以10 km/h的车速过减速带,通过分析时频特性研究时滞对系统的影响。表2所示为悬架各参数取值。

表2 悬架各参数取值

悬架参数	取值
簧上质量 m_2/kg	350
簧下质量 m_1/kg	40
悬架弹簧刚度 $k_2/\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$	27 000
轮胎刚度 $k_1/\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$	254 000
减振器基值阻尼 $c_2/\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$	1 000

根据表2和前文的求解,取可调阻尼 $c_c=800 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$,分别比较时滞为0 s、0.4 s、0.8 s、1.2 s条件下过减速带时悬架性能指标的变化情况,分析时滞在不同工况下对系统的影响。

若可调阻尼 c_c 不在时滞稳定调节范围内,取可调阻尼 $c_c=1\ 300 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$,此时悬架各参数不满足时滞稳定条件,根据式(22)求解得到仅有的4组正实根分别为 $\omega_1=7.415\ 6$ 、 $\omega_2=9.338\ 4$ 、 $\omega_3=74.163\ 1$ 、

$\omega_4=95.380\ 42$ 。

当 $\omega_1=7.415\ 6$ 时,临界时滞点为:

$$\begin{cases} \tau_{1,k} = \frac{\theta_1 + 2k\pi}{\omega_1} (k=0,1,2,3,\dots) \\ \cos \theta_1 = -0.719\ 2 \\ \sin \theta_1 < 0 \\ \theta_1 \in [0,2\pi] \end{cases} \quad (35)$$

当 $\omega_2=9.338\ 4$ 时,临界时滞点为:

$$\begin{cases} \tau_{2,k} = \frac{\theta_2 + 2k\pi}{\omega_2} (k=0,1,2,3,\dots) \\ \cos \theta_2 = -0.719\ 2 \\ \sin \theta_2 > 0 \\ \theta_2 \in [0,2\pi] \end{cases} \quad (36)$$

当 $\omega_3=74.163\ 1$ 时,临界时滞点为:

$$\begin{cases} \tau_{3,k} = \frac{\theta_3 + 2k\pi}{\omega_3} (k=0,1,2,3,\dots) \\ \cos \theta_3 = -0.719\ 2 \\ \sin \theta_3 < 0 \\ \theta_3 \in [0,2\pi] \end{cases} \quad (37)$$

当 $\omega_4=95.380\ 42$ 时,临界时滞点为:

$$\begin{cases} \tau_{4,k} = \frac{\theta_4 + 2k\pi}{\omega_4} (k=0,1,2,3,\dots) \\ \cos \theta_4 = -0.719\ 2 \\ \sin \theta_4 > 0 \\ \theta_4 \in [0,2\pi] \end{cases} \quad (38)$$

经求解对比,得到系统的稳定临界时滞点为 $\tau=0.025\ \text{s}$,因此,稳定性区间为0~0.025 s。在 $\tau=0.025\ \text{s}$ 附近分别取 $\tau=0.024\ \text{s}$ 和 $\tau=0.026\ \text{s}$,观察稳定临界点与附近点悬架系统的稳定性和性能指标的变化情况。

本文采用过减速带时轮胎受到的激励为车辆过离散路面的冲击激励,路面减速带模型如图2所示。为方便分析,将激励模型用三角函数表征^[14-15]。

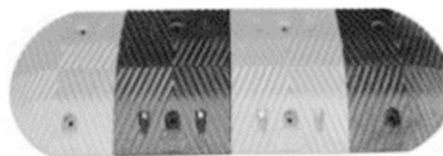


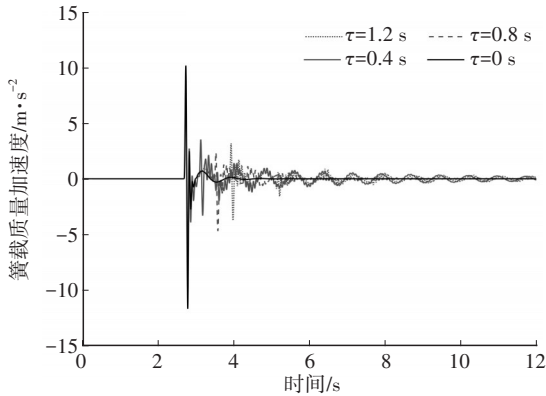
图2 减速带激励模型

减速带激励的数学模型表示为:

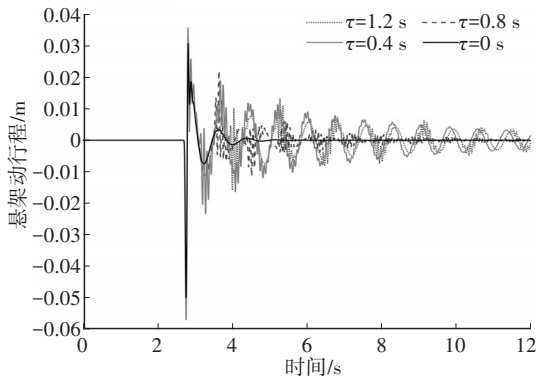
$$\begin{cases} \omega_r = \frac{h(1 - \cos 2\pi ft)}{2} \\ f = \frac{v}{L} \end{cases} \quad (39)$$

式中, h 、 L 分别为减速带的高度和宽度; v 为车辆行驶的速度; f 为减速带的激励频率; ω_r 为减速带激励函数。

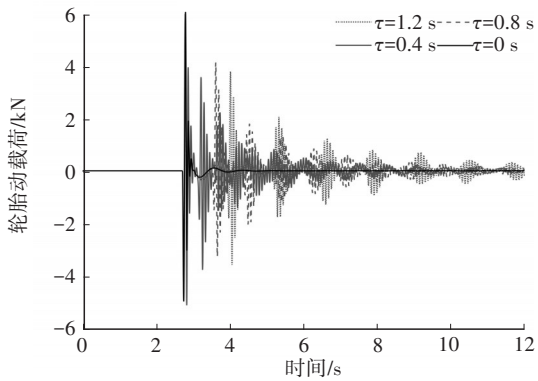
在时滞稳定条件下,选取不同时滞,在稳态条件下进行仿真,结果如图3所示。由图3可知,时滞为0 s、0.4 s、0.8 s、1.2 s时,系统均处于稳定状态,没有发散现象。时滞为0 s时,相对于其余时滞,悬架性能指标的第一峰恶化,但通过减速带后,余颤收敛快;表3所示为时滞稳定条件下不同时滞对应的悬架性能指标均方根,结合表3分析,簧载质量加速度均方根在时滞为0.8 s时最小,悬架动行程和轮胎动载荷的均方根在时滞为0 s时最小。因此,在离散冲击路面下合理选取时滞,可以提高车辆行驶的平顺性和操纵稳定性。



(a)簧载质量加速度



(b)悬架动行程



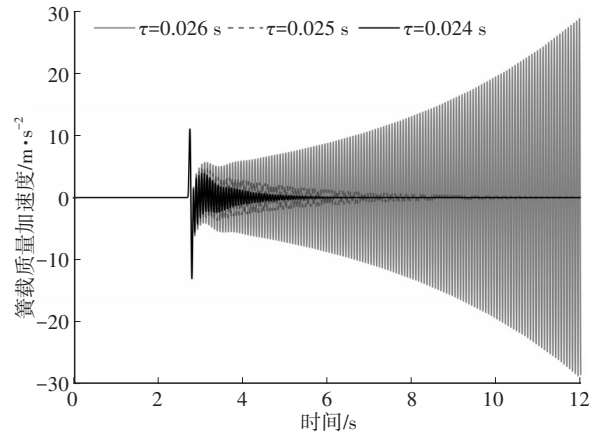
(c)轮胎动载荷

图3 时滞稳定条件下悬架性能指标时域响应

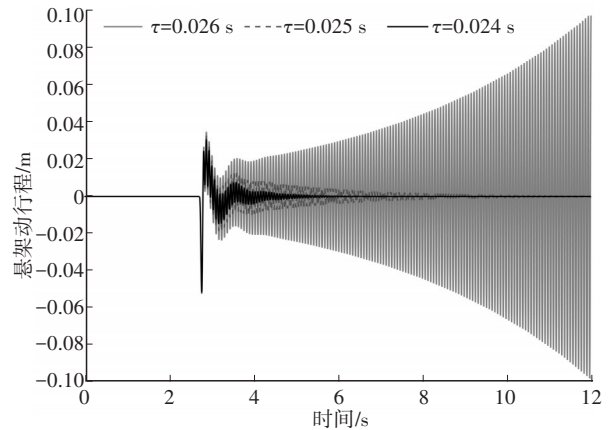
表3 时滞稳定条件下不同时滞对应的悬架性能指标均方根

悬架性能指标	$\tau=0\text{ s}$	$\tau=0.4\text{ s}$	$\tau=0.8\text{ s}$	$\tau=1.2\text{ s}$
簧载质量加速度均方根 $\alpha_1/m \cdot s^{-2}$	0.755 4	0.726 0	0.673 1	0.689 6
悬架动行程均方根 α_2/m	0.003 6	0.006 1	0.004 6	0.005 3
轮胎动载荷均方根 α_3/N	381.316 5	588.017 7	587.275 7	587.343 3

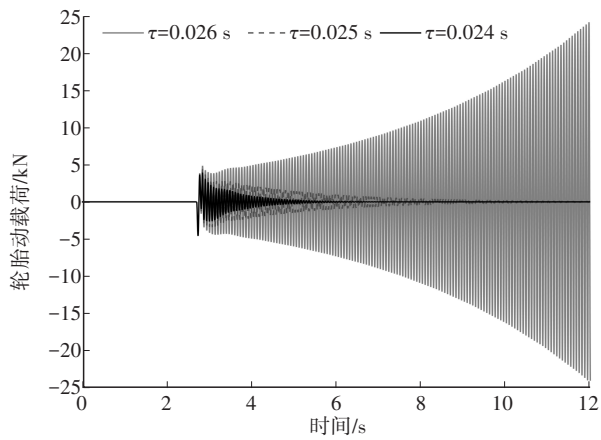
图4所示为时滞非稳定条件下悬架性能指标时域响应,从图4中明显可以看出,时滞为0.024 s和0.025 s时,在通过减速带后,簧载质量加速度、悬架动行程、轮胎动载荷存在明显的收敛趋势,且时滞为0.024 s时的收敛速度比0.025 s时的收敛速度快,更加稳定,当时滞为0.026 s时,系统明显发散,处于失稳状态;表4所示为临界时滞点及附近点悬架性能指标均方根,由表4可知,在时滞为0.025 s时,悬架性能指标均方根相对于时滞为0.024 s时的悬架性能指标数值增大,但不会呈倍数增长,而达到失稳时滞0.026 s时,悬架性能指标呈倍数增长,造成对系统不利影响。



(a)簧载质量加速度



(b)悬架动行程



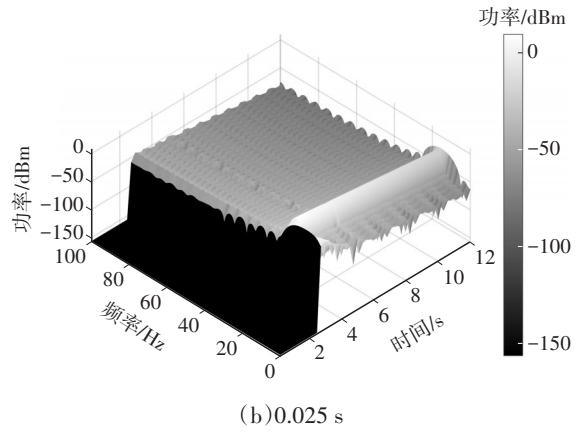
(c) 轮胎动载荷

图4 时滞非稳定条件下悬架性能指标时域响应

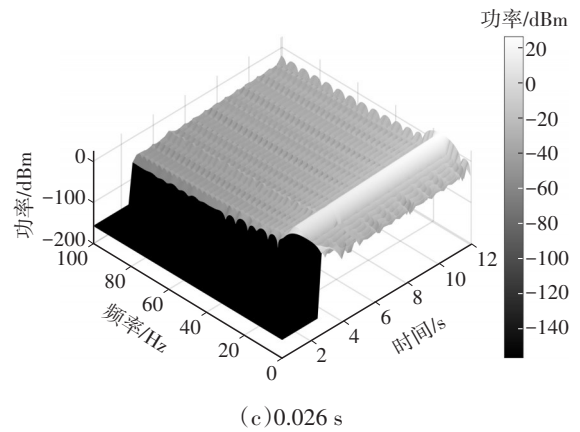
表4 临界时滞点及附近点悬架性能指标均方根

指标	$\tau=0.024\text{ s}$	$\tau=0.025\text{ s}$	$\tau=0.026\text{ s}$
簧载质量加速度均方根 $\alpha_1/m \cdot s^{-2}$	1.002 1	1.308 4	9.339 3
增幅/%		30.57	831.97
悬架动行程均方根 α_2/m	0.003 8	0.004 7	0.031 7
增幅/%		23.68	734.21
轮胎动载荷均方根 α_3/N	503.240 6	841.082 1	7 747.000
增幅/%		67.13	1 439.42

图5~图7所示为时滞非稳定条件下的悬架性能指标时频图,由图5~图7可知,在通过减速带后,时滞为0.024 s和0.025 s时,簧载质量加速度、轮胎动载荷、悬架动行程在各频段下的功率随时间的变化而逐渐减小,且在0~20 Hz频段内的功率明显大于其他频段的功率,随着时滞的增加,其他频段的功率略有增加;时滞为0.026 s时,簧载质量加速度、轮胎动载荷、悬架动行程在各频段下功率会随时间的变化而逐渐增大,且在0~20 Hz频段下的功率远大于其他频段的功率,相对于时滞为0.024 s和0.025 s,其他频段的功率也明显增加。功率的持续增加,会给车辆造成不利影响,严重影响车辆的行驶安全性。

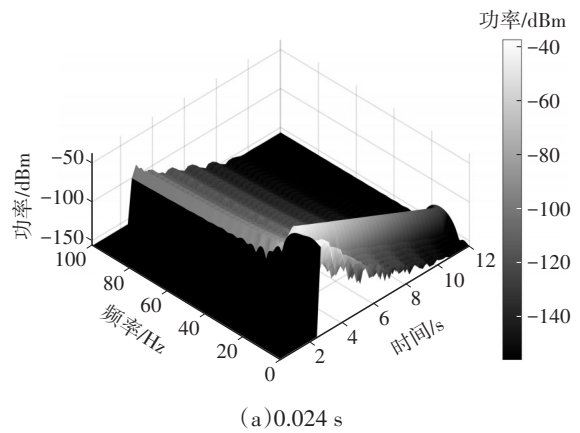


(b) 0.025 s

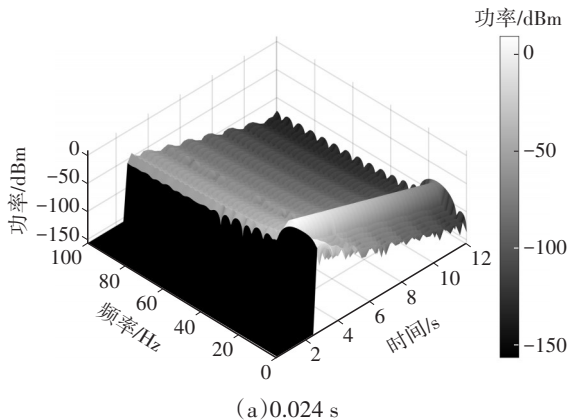


(c) 0.026 s

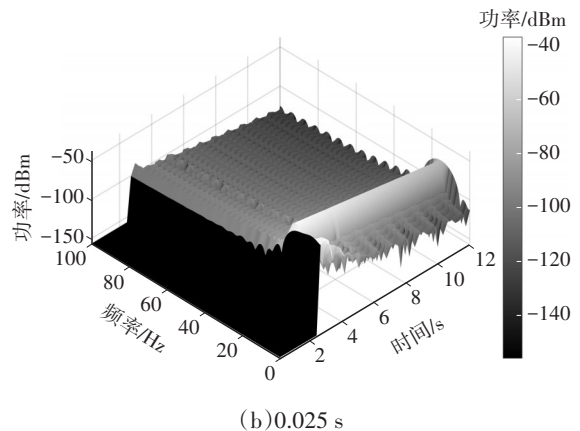
图5 不同时滞下簧载质量加速度时频图



(a) 0.024 s



(a) 0.024 s



(b) 0.025 s

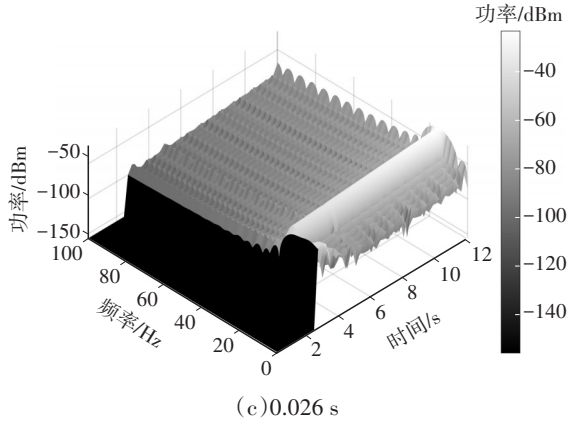


图6 不同时滞下悬架动行程时频图

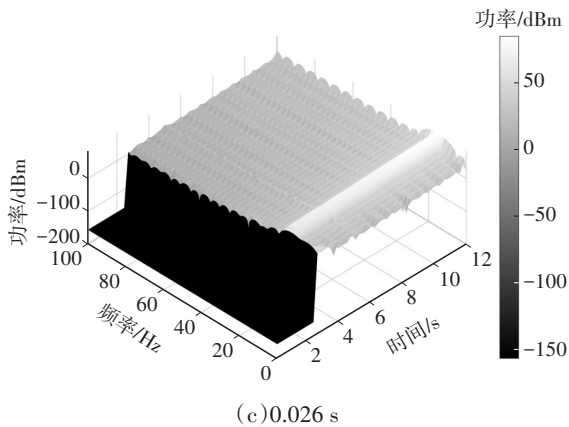
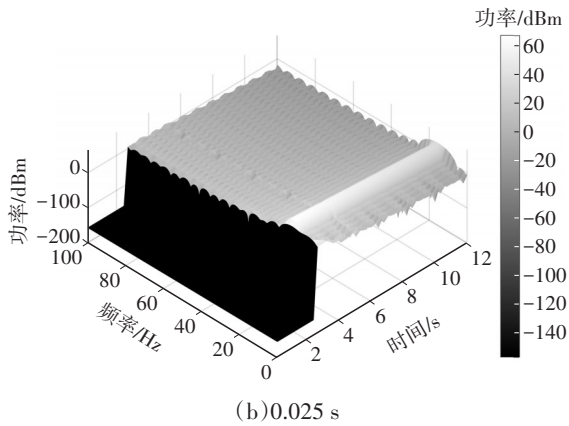
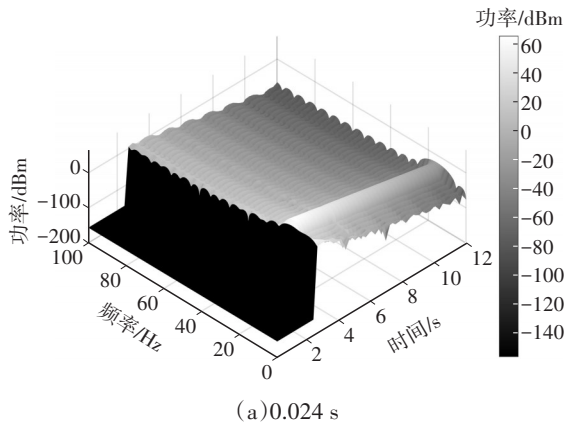


图7 不同时滞下轮胎动载荷时频图

综上所述,在离散冲击路面下,时滞为0.024 s和0.025 s时,系统均不会失去稳定性,时滞为0.026 s时,系统发散,明显失稳,降低了行驶安全性,且0~20 Hz频段的功率明显大于其他频段的功率。时滞稳定时,不同时滞下的悬架性能指标均方根不尽相同。因此,合理选择时滞,可以提高车辆的平顺性和行驶稳定性。

5 结束语

本文通过建立含时滞的1/4半主动悬架系统,利用时滞微分方程理论,通过分析全时滞稳定性的充要条件,求解可调阻尼 c_r 的稳定区间范围,对系统特征方程进行分析变换,求解临界时滞点,通过求解得到可调阻尼 c_r 的稳定区间以及时滞临界点,代入模型进行仿真,在离散冲击路面的条件下,得到以下结论:

a. 时域上,当可调阻尼 c_r 在稳定区间内时,不同时滞下的悬架性能指标不同,但系统均稳定,因此,合理选取时滞有利于提高车辆平顺性和操纵稳定性。当可调阻尼 c_r 在稳定区间外时,求解得到临界时滞为0.025 s;当时滞为临界时滞和小于临界时滞时,系统仍保持稳定,且时滞小于临界时滞时的悬架性能指标均方根小于时滞为临界时滞时的数据;当时滞大于临界时滞时,系统发散失稳,车辆的平顺性和操纵稳定性恶化。

b. 频域上,通过对临界时滞点附近的悬架性能指标进行时频分析可以发现,随着时滞的增加,悬架性能指标的功率逐渐增大,这一情况与时域分析结果相符,并且低频段功率明显大于其他频段功率,功率的持续增加,会给车辆造成不利影响,严重影响车辆的行驶安全性。

参考文献

[1] 汪若尘,陈龙,江浩斌. 基于多项式判别理论时滞半主动悬架稳定性研究[J]. 中国机械工程, 2006, 17(24): 2628-2631.
WANG R C, CHEN L, JIANG H B. Study on the Stability of Time-Delay Semi-Active Suspension Based on Polynomial Discriminant Theory[J]. China Mechanical Engineering, 2006, 17(24): 2628-2631.

[2] 邵素娟,任传波,荆栋,等. 具有时滞反馈控制的非线性主动悬架系统的稳定性、分岔和混沌[J]. 振动与冲击, 2021, 40(7): 281-290.
SHAO S J, REN C B, JING D, et al. Stability, Bifurcation and Chaos of Nonlinear Active Suspension Systems with

- Time-Delayed Feedback Control[J]. *Vibration and Shock*, 2021, 40(7): 281-290.
- [3] 庞辉,付文强,刘凯,等.基于天棚控制的半主动悬架建模及稳定性分析[J].*汽车工程*, 2015, 37(10): 1167-1173.
PANG H, FU W Q, LIU K, et al. Modeling and Stability Analysis of Semi-Active Suspension Based on Skyhook Control[J]. *Automotive Engineering*, 2015, 37(10): 1167-1173.
- [4] 闫光辉,关志伟,杜峰,等.基于时滞稳定的车辆主动悬架控制研究[J].*机械强度*, 2014, 36(5): 682-686.
YAN G H, GUAN Z W, DU F, et al. Research on Vehicle Active Suspension Control Based on Time-Delay Stability [J]. *Mechanical Strength*, 2014, 36(5): 682-686.
- [5] CHU S Y, SOONG T T, LIN C C, et al. Time-Delay Effect and Compensation on Direct Output Feedback Controlled Mass Damper Systems[J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2002, 31(1): 121-137.
- [6] YAN G, FANG M X, XU J. Analysis and Experiment of Time-Delayed Optimal Control for Vehicle Suspension System[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, 446: 144-158.
- [7] 闫盖,方明霞.车辆悬架系统时滞速度反馈控制[J].*科学技术与工程*, 2020, 20(20): 8367-8372.
YAN G, FANG M X. Delayed Speed Feedback Control of Vehicle Suspension System[J]. *Science and Technology and Engineering*, 2020, 20(20): 8367-8372.
- [8] 汪若尘,陈龙,江浩斌.时滞半主动悬架模糊神经网络控制[J].*农业机械学报*, 2007, 38(7): 10-12+48.
WANG R C, CHEN L, JIANG H B. Fuzzy Neural Network Control of Semi-Active Suspension with Time Delay[J]. *Journal of Agricultural Machinery*, 2007, 38(7): 10-12+48.
- [9] 张作元.滞后型方程 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau)$ 全时滞稳定的代数判据[J].*科学通报*, 1986(23): 1768-1771.
ZHANG Z Y. Algebraic Criteria for Total Delay Stability of Delay Type Equation $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau)$ [J]. *Scientific Bulletin*, 1986(23): 1768-1771.
- [10] 徐旭,杨晓峰,沈钰杰,等.基于滞后型系统理论的半主动悬架控制系统稳定性分析[J].*振动与冲击*, 2021, 40(7): 208-215.
XU X, YANG X F, SHEN Y J, et al. Stability Analysis of Semi-Active Suspension Control System Based on Lag System Theory[J]. *Vibration and Shock*, 2021, 40(7): 208-215.
- [11] MA K H, ZHANG Y G, REN C B, et al. Effect of Time-Delay Feedback Control on Vehicle Seat Vibration Reduction and Suspension Performance[J]. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 2022, 41(3): 1214-1233.
- [12] 徐旭.时滞系统的稳定性分析及其在ISD半主动悬架控制策略中的应用[D].镇江:江苏大学,2021.
XU X. Stability Analysis of Time-Delay Systems and Its Application in ISD Semi-Active Suspension Control Strategy [D]. Zhenjiang: Jiangsu University, 2021.
- [13] 郑远广.含时滞的奇异摄动系统的非线性动力学[D].南京:南京航空航天大学,2009.
ZHENG Y G. Nonlinear Dynamics of Singularly Perturbed Systems with Time Delay[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2009.
- [14] 蔡强.基于整车模型的混合模式磁流变悬架结构优化方法研究[D].重庆:重庆交通大学,2021.
CAI Q. Research on Structural Optimization Method of Hybrid Mode Magnetorheological Mount Based on Vehicle Model[D]. Chongqing: Chongqing Jiaotong University, 2021.
- [15] 杨青桦.基于整车振动控制的多模式磁流变悬架结构多目标优化[D].重庆:重庆交通大学,2020.
YANG Q H. Multi-Objective Optimization of Multi-Mode Magnetorheological Mount Structure Based on Vehicle Vibration Control[D]. Chongqing: Chongqing Jiaotong University, 2020.

(责任编辑 斛 畔)

修改稿收到日期2023年6月25日。