横观各向同性黏弹性岩体位移反分析的唯一性研究*

张志增[1,2]，余浩然[1]，刘晓丽[3]，宋丹青[4]，刘伟建[1]，史砚青[5]，龚凯[5]，葛磊[5]

（1.中原工学院 智能建造与建筑工程学院， 河南 郑州 450007；
2.华北水利水电大学 地球科学与工程学院， 河南 郑州 450046；
3.清华大学 水利水电工程系， 北京 100084；
4.华南理工大学 土木与交通学院， 广东 广州 510640；
5.玉溪市江通高速公路有限公司， 云南省 玉溪市 652600）

摘要：为了研究黏弹性岩体位移反分析的唯一性问题，根据弹性和黏弹性对应原理推导了横观各向同性黏弹性岩体中的圆形巷道的径向位移解析解，根据参数可辨识条件研究了横观各向同性黏弹性岩体位移反分析的唯一性。结果表明：仅知道测点位移不能唯一地反演出全部参数，至少需要已知3个岩体力学参数，才有可能唯一地反演出其他岩体力学参数；竖向初始地应力与横向初始地应力的取值对反分析的唯一性有显著影响；待求参数越少，参数的可辨识性越强；初始地应力参数的辨识性最优，其次是泊松比、各向同性面上的弹性模量和黏性系数，各向同性面法向上的弹性模量与黏性系数最差。研究结果为岩体参数的反分析计算提供了理论依据。

关键词：横观各向同性；黏弹性；位移解析解；位移反分析；唯一性

中图分类号：TD313 **文献标识码**：A **文章编号**：1005-2763(2025)01-0165-13

Uniqueness of Displacement Back Analysis for Transversely Isotropic Viscoelastic Rock Mass

ZHANG Zhizeng[1,2], *YU Haoran*[1], *LIU Xiaoli*[3], *SONG Danqing*[4], *LIU Weijian*[1], *SHI Yanqing*[5], *GONG Kai*[5], *GE Lei*[5]

(1.School of Intelligent Construction and Civil Engineering, Zhongyuan University of Technology, Zhengzhou, Henan 450007, China; 2.College of Geosciences and Engineering, North China University of Water Resources and Electric Power, Zhengzhou, Henan 450046, China; 3.Department of Hydraulic and Hydropower Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China; 4.School of Civil Engineering & Transportation, South China University of Technology, Guangzhou, Guangdong 510640, China; 5.Yuxi Jiangtong Expressway Co., Ltd., Yuxi, Yunnan 652600, China)

Abstract: In order to study the uniqueness of the displacement back analysis of isotropic viscoelastic rock mass, an analytical solution for the radial displacement of a circular roadway in a transversely isotropic viscoelastic rock mass was derived from the principle of elastic and viscoelastic correspondence principle. The uniqueness of the back analysis of displacement in transverse isotropic rock mass was studied according to the identifiable conditions of parameters. The results show that only knowing the displacement of the measuring point can not uniquely invert all the parameters. It is possible to uniquely invert other rock mass mechanical parameters only when at least 3 parameters are known in advance. The values of the vertical ground stress and the transverse ground stress have a significant influence on the identification of back analysis. The fewer the parameters to be solved, the more recognizable the parameters are. The initial ground stress parameters have the best identifiability, followed by Poisson's ratio, modulus of elasticity and viscosity coefficient on the isotropic surface, and the modulus of elasticity and viscosity coefficient normal to the isotropic surface are the worst. The research results provide a theoretical basis for the back analysis calculation of rock mass parameters.

Key words: Transverse isotropy, Viscoelasticity, Displacement analytic solution, Displacement back analysis, Uniqueness

0 引言

采矿工程往往伴随着岩体中巷道开挖、支护等工程活动，因此对巷道围岩岩体的稳定性研究是必不可少的。在计算机技术不断更新进步的今天，数值分析技术广泛应用在岩体稳定性分析领域，数值

* **收稿日期**：2024-01-31
基金项目：河南省自然科学基金面上项目(222300420596)；NSFC-河南人才培养联合基金项目(U1204509)
作者简介：张志增(1980—)，男，河南林州人，博士，教授，主要从事岩土与地下工程的教学和研究工作。E-mail：zhangzhizeng@163.com

模拟计算的精度也越来越高,岩体力学参数的选取决定了数值模拟分析结果的精确性[1]。岩体力学参数是设计施工方案的基础,若选用的岩体参数不准确,轻则工程成本增加,重则发生安全事故。岩体是复杂的地质体,在形成过程中受到长期的地质作用,其力学性质受到多种因素影响,参数不准确已成为岩体力学研究的关键问题[2]。由于传统的岩体力学参数确定方法各有其局限性,人们寻找到了新的途径——岩土工程反分析法[3]。反分析法数据基于工程实测,在采矿工程的设计、变形预警及稳定性评价中发挥着重要作用[4-9]。

20 世纪 70 年代,KAVANAGH 等[10]奠定了位移反分析法的理论基础,随后许多学者取得了令人瞩目的研究成果,涉及弹性岩体,弹塑性岩体,黏弹性岩体等[11-15]。反分析的唯一性是位移反分析研究的重要部分,位移反分析能否成功的前提是反分析结果是否唯一。吕爱钟[16]提出了反分析唯一性的辨识条件,研究了弹性岩体位移反分析的唯一性问题。张路青等[17]分析了弹性岩体中单洞室位移反分析的唯一性。YANG 等[18]通过几何作图的方法验证了图谱反分析的唯一性。张志增等[19]讨论了考虑黏弹性岩体位移反分析的唯一性。

以上研究均假设岩体为各向同性材料,关于各向异性岩体位移反分析的唯一性研究较少。张志增等[20-23]推导出横观各向同性岩体中不同形状巷道的位移解析解,并对其反分析的唯一性进行研究。王少杰等[24]考虑了横观各向同性岩体中特殊形状巷道反分析的唯一性。这些研究虽然考虑了岩体的各向异性,但是没有考虑岩体的流变性。尚未有文献同时考虑岩体的各向异性和流变性,并对岩体位移反分析的唯一性展开研究。层状岩体广泛存在于地表,岩体流变效应也十分普遍,施工建设中会遇到大量的横观各向同性岩体且具有流变性的情况[25]。因此,本文同时考虑岩体的各向异性和流变性,以横观各向同性黏弹性岩体为本构模型,研究岩体中开挖圆形巷道时位移反分析的唯一性。

1 横观各向同性黏弹性岩体的位移解析解

横观各向同性黏弹性岩体模型如图 1 所示。假定 xoy 为横观各向同性面,oz 为横观各向同性面的法线方向,同时为巷道开挖走向。

横观各向同性黏弹性岩体中圆形巷道模型如图 2 所示。

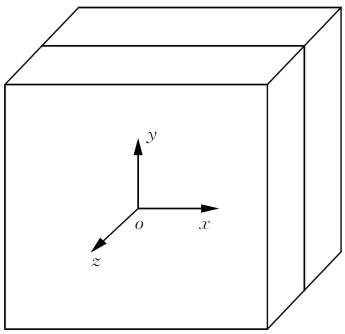


图 1 横观各向同性黏弹性岩体模型

Fig.1 Model of a transversely isotropic viscoelastic rock mass

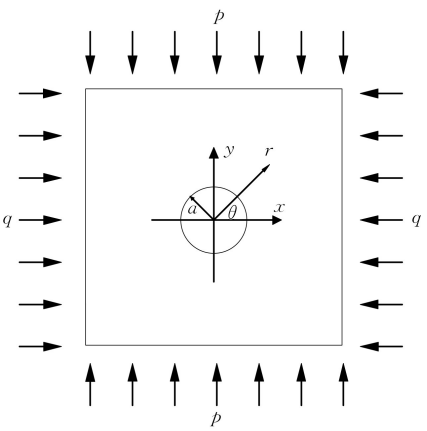


图 2 圆形巷道模型

Fig.2 Model of a deep circular roadway

基于弹性和黏弹性对应原理,在所求问题的弹性解已知时,先对弹性解进行 Laplace 变换,再用对应的拉式空间中的材料多项式替换式中的 E 和 μ,对所得黏弹性解的 Laplace 式做 Laplace 逆变换,即求得对应的黏弹性解[26]。

张志增等[20]已经推导出横观各向同性条件下岩体中圆形巷道位移的弹性解:

$$u_r=\frac{p+q}{2}\frac{a^2}{r}\frac{1+\mu}{E}+\frac{p-q}{2}\left[\frac{a^4}{r^3}\frac{1+\mu}{E}-\frac{4a^2}{r}\left(\frac{1}{E}-\frac{\mu'^2}{E'}\right)\right]\cos 2\theta \quad (1)$$

式中:p 为竖向初始地应力;q 为横向初始地应力;a 为圆形巷道的半径;E 和 μ 分别为横观各向同性面内的弹性模量与泊松比;E'和 μ'为横观各向同性面法向上的弹性模量与泊松比;θ 为该点径向与 x 轴正方向的夹角;r 为测点到圆心的距离。

对式(1)做 Laplace 变换得:

$$L[u_r]=\frac{p+q}{2s}\frac{a^2}{r}\frac{1+\mu}{E}+\frac{p-q}{2s}\left[\frac{a^4}{r^3}\frac{1+\mu}{E}-\frac{4a^2}{r}\left(\frac{1}{E}-\frac{\mu'^2}{E'}\right)\right]\cos 2\theta \tag{2}$$

式中,s 为一个复变量。

薛琳等[27]已给出黏弹性模型在拉式空间中的材料多项式:

$$\left.\begin{aligned}\bar{E}=L[E]=\frac{3g(s)g_1(s)}{2f(s)g_1(s)+f_1(s)g(s)}\\ \bar{\mu}=L[\mu]=\frac{f(s)g_1(s)-f_1(s)g(s)}{2f(s)g_1(s)+f_1(s)g(s)}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

黏弹性模型采用 Maxwell 模型,其微分算子经 Laplace 变换后为:

$$f(s)=\tau s+1 \tag{4}$$

$$f_1(s)=1 \tag{5}$$

$$g(s)=\eta s \tag{6}$$

$$g_1(s)=3K \tag{7}$$

式中:τ 为松弛时间,$\tau=\eta/E$;η 为黏性系数;K 为体积弹性模量,$K=E/3(1-2\mu)$。

将式(4)至式(7)代入式(3)可得:

$$\left.\begin{aligned}\bar{E}=\frac{9\eta sK}{6K\tau s+6K+\eta s}\\ \bar{\mu}=\frac{3K\tau s+3K-\eta s}{6K\tau s+6K+\eta s}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{E}'=\frac{9\eta' sK'}{6K'\tau' s+6K'+\eta' s}\\ \bar{\mu}'=\frac{3K'\tau s'+3K'-\eta' s}{6K'\tau' s+6K'+\eta' s}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式中,$\tau'=\eta'/E'$,$K'=E'/3(1-2\mu')$,τ'、η' 与 K' 为横观各向同性面法向上的松弛时间、黏性系数与体积模量。

根据对应原理将式(8)、式(9)替换式(2)中的弹性参数,再做 Laplace 逆变换得到横观各向同性黏弹性岩体的位移解析解:

$$u_r=\frac{a^2}{2r}\left(\frac{1}{E}+\frac{t}{\eta}\right)\left[(p+q)+(p-q)\frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta\right]+\frac{3a^2}{E'r}(p-q)(1-2\mu')\left[\frac{1-2\mu'}{3-2\mu'}\exp\left(-\frac{2E't}{(3-2\mu')\eta'}\right)-\frac{5}{9}\right]\cos 2\theta-\frac{4a^2}{3rE}(p-q)(1-2\mu)\cos 2\theta+\frac{a^2}{3r}(p-q)\left[\frac{t}{\eta'}+\frac{1}{E'}-4\left(\frac{t}{\eta}+\frac{1}{E}\right)\right]\cos 2\theta \tag{10}$$

式中,有 p、q、E、u、η、E'、μ' 和 η' 等 8 个岩体参数,t 为时间。

令 $E=E'$、$\mu=\mu'$、$\eta=\eta'$ 时,退化为各向同性黏弹性岩体位移解析解[24],验证了本文推导的解析解的正确性。

2 参数可辨识条件

吕爱钟[16]提出了参数可辨识条件,在测量范围内,如果待求参数的灵敏系数线性无关,则测点位移值可以唯一地辨识出所有参数;反之,如果待求参数的灵敏系数线性相关,则不能唯一地辨识出所有参数。判断公式为:

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial\alpha_1}C_1+\frac{\partial\omega_i}{\partial\alpha_2}C_2+\cdots+\frac{\partial\omega_i}{\partial\alpha_m}C_m=0,(i=0,1,2,\cdots,n) \tag{11}$$

式中:ω_i 为第 i 个测点位移值;α_j 为第 j 个要反分析的参数;X_i 为 α_j 关于位移输出 ω_i 的灵敏系数,$X=\partial\omega_i/\partial\alpha_j$;$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为所求的 m 个参数;C_1,$C_2,\cdots,C_m$ 为变量;$n(n\geqslant m)$为测点数量。

若 $i=0,1,2,\cdots,n$,至少有一个 C_j 非零使式(11)成立,则表明灵敏系数线性相关;若 $i=0,1,2,\cdots,n$,仅当 C_j $(j=0,1,2,\cdots,m)$都为 0 时式(11)才成立,则表明灵敏系数线性无关。

3 反分析的唯一性研究

横观各向同性黏弹性岩体的泊松比变化范围较小时,其对岩体变形的影响也很小,且待反演参数的减少能够显著提升反分析的效果,因此本文假设各向同性面上的泊松比与法线方向的泊松比相等[28]。令 $\mu=\mu'$时,则横观各向同性黏弹性的位移解析简化为:

$$u_r=\frac{a^2}{2r}\left(\frac{1}{E}+\frac{t}{\eta}\right)\left[(p+q)+(p-q)\frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta\right]+\frac{a^2}{3r}(p-q)\left[\frac{t}{\eta'}+\frac{1}{E'}-4\left(\frac{t}{\eta}+\frac{1}{E}\right)\right]\cos 2\theta+\frac{3a^2}{E'r}(p-q)(1-2\mu)\left[\frac{1-2\mu}{3-2\mu}\exp\left(-\frac{2E't}{(3-2\mu)\eta'}\right)-\frac{5}{9}\right]\cos 2\theta-\frac{4a^2}{3rE}(p-q)(1-2\mu)\cos 2\theta \tag{12}$$

式中,有 p、q、E、μ、η、E'和 η'等 7 个岩体参数。

由式(12)可求得各参数的灵敏系数：

$$\frac{\partial u_r}{\partial p}=\frac{a^2}{2r}\left(\frac{1}{E}+\frac{t}{\eta}\right)\left[1+\frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta\right]+\frac{a^2}{3r}\left[\frac{t}{\eta'}+\frac{1}{E'}-4\left(\frac{t}{\eta}+\frac{1}{E}\right)\right]\cos 2\theta+$$
$$\frac{4a^2}{3rE}(2\mu-1)\cos 2\theta-\frac{3a^2}{E'r}(2\mu-1)\left[\frac{2\mu-1}{2\mu-3}\exp\left(\frac{2E't}{(2\mu-3)\eta'}\right)-\frac{5}{9}\right]\cos 2\theta \tag{13}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial q}=\frac{a^2}{2r}\left(\frac{1}{E}+\frac{t}{\eta}\right)\left[1-\frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta\right]-\frac{a^2}{3r}\left[\frac{t}{\eta'}+\frac{1}{E'}-4\left(\frac{t}{\eta}+\frac{1}{E}\right)\right]\cos 2\theta+$$
$$\frac{3a^2}{r}\frac{1}{E'}(2\mu-1)\cos 2\theta\left[\frac{2\mu-1}{2\mu-3}\exp\left(\frac{2E't}{(2\mu-3)\eta'}\right)-\frac{5}{9}\right]-\frac{4a^2}{3rE}(2\mu-1)\cos 2\theta \tag{14}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial E}=-\frac{a^2}{2rE^2}\left[(p+q)+(p-q)\frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta\right]+\frac{4a^2}{3rE^2}(p-q)\cos 2\theta-\frac{4a^2}{3rE^2}(p-q)(2\mu-1)\cos 2\theta \tag{15}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial \mu}=-\frac{6a^2}{E'r}(p-q)\cos 2\theta\left[\left(\frac{2\mu-1}{2\mu-3}\exp\left(\frac{2E't}{(2\mu-3)\eta'}\right)-\frac{5}{9}\right)\right]-\frac{3a^2}{E'r}\cos 2\theta(2\mu-1)+$$
$$\frac{8a^2}{3rE}(p-q)\cos 2\theta(p-q)\left(\left(\frac{2}{2\mu-3}-\frac{2(2\mu-1)}{(2\mu-3)^2}\right)\exp\left(\frac{2E't}{(2\mu-3)\eta'}\right)-\frac{4E't(2\mu-1)}{\eta'(2\mu-3)^3}\exp\left(\frac{2E't}{(2\mu-3)\eta'}\right)\right) \tag{16}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial \eta}=-\frac{a^2t}{2r\eta^2}\left[(p+q)+(p-q)\frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta\right]+\frac{4a^2t}{3r\eta^2}(p-q) \tag{17}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial E'}=-\frac{a^2}{3rE'^2}(p-q)\cos 2\theta+\frac{3a^2}{rE'^2}(p-q)(2\mu-1)\left(\frac{2\mu-1}{2\mu-3}\exp\left(\frac{2E't}{(2\mu-3)\eta'}\right)-\frac{5}{9}\right)-$$
$$\frac{3a^2}{rE'}\frac{2t}{\eta'}(p-q)\frac{(2\mu-1)^2}{(2\mu-3)^2}\exp\left(\frac{2E't}{(2\mu-3)\eta'}\right) \tag{18}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial \eta'}=-\frac{a^2}{3r}\frac{t}{\eta'^2}(p-q)\cos 2\theta+\frac{3a^2}{r}\frac{2t}{\eta'^2}(p-q)\left(\frac{2\mu-1}{2\mu-3}\right)^2\exp\left(\frac{2E't}{(2\mu-3)\eta'}\right) \tag{19}$$

将式(13)至式(19)代入式(11)可得：

$$\frac{\partial u_r}{\partial p}C_1+\frac{\partial u_r}{\partial q}C_2+\frac{\partial u_r}{\partial E}C_3+\frac{\partial u_r}{\partial \mu}C_4+\frac{\partial u_r}{\partial \eta}C_5+\frac{\partial u_r}{\partial E'}C_6+\frac{\partial u_r}{\partial \eta'}C_7=0 \tag{20}$$

展开整理可得：

$$\begin{aligned}&\frac{a^2}{2r}\left\{\left(\frac{1}{E}+\frac{t}{\eta}\right)C_1+\left(\frac{1}{E}+\frac{t}{\eta}\right)C_2-\left(\frac{p+q}{E^2}\right)C_3-\frac{t}{\eta^2}(p+q)C_5\right\}+\\&\frac{3a^2(2\mu-1)\cos 2\theta}{r}\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{E'}\left(\frac{2\mu-1}{2\mu-3}G-\frac{5}{9}\right)C_1+\frac{1}{E'}\left(\frac{2\mu-1}{2\mu-3}G-\frac{5}{9}\right)C_2\\\left[-\frac{2(p-q)}{E'}\left(\frac{2\mu-1}{2\mu-3}G-\frac{5}{9}\right)+\frac{2(p-q)G}{(2\mu-3)E'}\left[\frac{2\mu-1}{2\mu-3}+\frac{2E't(2\mu-1)}{\eta(2\mu-3)^2}-1\right]\right]C_4\\\left[\frac{1}{E'^2}(p-q)\left(\frac{2\mu-1}{2\mu-3}G-\frac{5}{9}\right)-\frac{2t(p-q)(2\mu-1)}{E'\eta(2\mu-3)^2}G\right]C_6+\left(\frac{2t(2\mu-1)(p-q)}{\eta'^2(2\mu-3)^2}G\right)C_7\end{array}\right\}+\\&\frac{a^2\left(\frac{a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta}{2r}\left\{\left(\frac{1}{E}+\frac{t}{\eta}\right)C_1-\left(\frac{1}{E}+\frac{t}{\eta}\right)C_2-\left(\frac{p-q}{E^2}\right)C_3-\left(\frac{t(p-q)}{\eta^2}\right)C_5\right\}+\\&\frac{a^2\cos 2\theta}{3r}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{t}{\eta'}+\frac{1}{E'}-\frac{4t}{\eta}+\frac{8(\mu-1)}{E}\right)C_1-\left(\frac{t}{\eta'}+\frac{1}{E'}-\frac{4t}{\eta}+\frac{8(\mu-1)}{E}\right)C_2+\\\frac{8(1-\mu)(p-q)}{E^2}C_3+\frac{8(p-q)}{E}C_4+\frac{4t(p-q)}{\eta^2}C_5-\frac{p-q}{E'^2}C_6-\frac{t}{\eta'^2}(p-q)C_7\end{array}\right\}=0\end{aligned} \tag{21}$$

式中，$G=\exp\left(\frac{2E't}{(2\mu-3)\eta'}\right)$。

忽略测点选择的影响，式(21)中的 r 和 θ 均为变量，则由式(21)可得方程组：

$$\left\{\begin{array}{l}
-\dfrac{1}{E'}\left(\dfrac{2\mu-1}{2\mu-3}G-\dfrac{5}{9}\right)C_1+\dfrac{1}{E'}\left(\dfrac{2\mu-1}{2\mu-3}G-\dfrac{5}{9}\right)C_2 \\
\left[-\dfrac{2(p-q)}{E'}\left(\dfrac{2\mu-1}{2\mu-3}G-\dfrac{5}{9}\right)+\dfrac{2(p-q)G}{(2\mu-3)E'}\left[\dfrac{2\mu-1}{2\mu-3}+\dfrac{2E't(2\mu-1)}{\eta'(2\mu-3)^2}-1\right]\right]C_4 \\
\left[\dfrac{1}{E'^2}(p-q)\left(\dfrac{2\mu-1}{2\mu-3}G-\dfrac{5}{9}\right)-\dfrac{2t(p-q)(2\mu-1)}{E'\eta'(2\mu-3)^2}G\right]C_6+ \\
\left(\dfrac{2t(2\mu-1)(p-q)}{\eta'^2(2\mu-3)^2}G\right)C_7=0 \\
\left(\dfrac{1}{E}+\dfrac{t}{\eta}\right)C_1+\left(\dfrac{1}{E}+\dfrac{t}{\eta}\right)C_2-\left(\dfrac{p+q}{E^2}\right)C_3-\dfrac{t}{\eta^2}(p+q)C_5=0 \\
\left(\dfrac{1}{E}+\dfrac{t}{\eta}\right)C_1-\left(\dfrac{1}{E}+\dfrac{t}{\eta}\right)C_2-\left(\dfrac{p-q}{E^2}\right)C_3-\left(\dfrac{t(p-q)}{\eta^2}\right)C_5=0 \\
\left(\dfrac{t}{\eta'}+\dfrac{1}{E'}-\dfrac{4t}{\eta}+\dfrac{8(\mu-1)}{E}\right)C_1-\left(\dfrac{t}{\eta'}+\dfrac{1}{E'}-\dfrac{4t}{\eta}+\dfrac{8(\mu-1)}{E}\right)C_2+ \\
\dfrac{8(1-\mu)(p-q)}{E^2}C_3+\dfrac{8(p-q)}{E}C_4+\dfrac{4t(p-q)}{\eta^2}C_5-\dfrac{p-q}{E'^2}C_6-\dfrac{t}{\eta'^2}(p-q)C_7=0
\end{array}\right. \tag{22}$$

其对应的系数矩阵式为：

$$\begin{pmatrix}
-\dfrac{1}{E'}N & \dfrac{1}{E'}N & 0 & M & 0 & H & D \\
\dfrac{1}{E}+\dfrac{t}{\eta} & \dfrac{1}{E}+\dfrac{t}{\eta} & -\dfrac{p+q}{E^2} & 0 & -\dfrac{t(p+q)}{\eta^2} & 0 & 0 \\
\dfrac{1}{E}+\dfrac{t}{\eta} & -\left(\dfrac{1}{E}+\dfrac{t}{\eta}\right) & -\dfrac{p-q}{E^2} & 0 & \dfrac{t(p+q)}{\eta^2} & 0 & 0 \\
B & -B & \dfrac{8(1-\mu)(p-q)}{E^2} & \dfrac{8(p-q)}{E} & \dfrac{4t(p-q)}{\eta^2} & -\dfrac{p-q}{E'^2} & -\dfrac{t(p-q)}{\eta'^2}
\end{pmatrix} \tag{23}$$

式(23)中：$M=\left[-\dfrac{2(p-q)}{E'}\left(\dfrac{2\mu-1}{2\mu-3}G-\dfrac{5}{9}\right)+\dfrac{2(p-q)}{(2\mu-3)E'}G\left[\dfrac{2\mu-1}{2\mu-3}+\dfrac{2E't(2\mu-1)}{\eta'(2\mu-3)^2}-1\right]\right]$；$N=\left(\dfrac{2\mu-1}{2\mu-3}\cdot\exp\left(\dfrac{2E't}{(2\mu-3)\eta'}\right)-\dfrac{5}{9}\right)$；$H=\dfrac{(p-q)}{E'^2}N-\dfrac{2t(p-q)(2\mu-1)}{E'\eta'(2\mu-3)^2}G$；$D=\dfrac{2t(2\mu-1)(p-q)}{\eta'^2(2\mu-3)^2}G$；$B=\dfrac{t}{\eta'}+\dfrac{1}{E'}-\dfrac{4t}{\eta}+\dfrac{8(\mu-1)}{E}$。

由式(22)可知，方程组有4个方程，7个未知数(C_1,…,C_7)，则方程组最多可以得出的解有4个未知数，仅增加测点数量不能唯一反分析出全部参数，至少已知3个岩体参数，才可能唯一地反分析出其他参数。

为更好表述分析结果，提出3个概念：条件唯一，是指参数之间满足某种关系时，反分析才唯一；绝对唯一是参数取任意值，反分析恒唯一；不唯一是指参数取任意值，反分析恒不唯一。

3.1 已知3个参数

已知3个参数，反分析另外4个参数时，有4个方程，4个未知数，若有不为零的解使方程式成立，表明灵敏系数线性相关，反分析不唯一，则其秩$R<4$；若只有零解使方程组成立，表明灵敏系数线性无关，反分析唯一，则其秩$R=4$。下文举例分析。

(1) 例1：已知参数p、q和E，反分析μ、η、E'和η'，此时可知$\partial u_r/\partial p$、$\partial u_r/\partial q$和$\partial u_r/\partial E$都等于0，则方程组消去有C_1、C_2和C_3的项，矩阵中只余C_4、C_5、C_6和C_7对应的4列：

$$\begin{pmatrix}
M & 0 & \dfrac{(p-q)}{E'^2}N-\dfrac{2t(p-q)(2\mu-1)}{E'\eta(2\mu-3)^2}G & \dfrac{2t(2\mu-1)(p-q)}{\eta'^2(2\mu-3)^2}G \\
0 & -\dfrac{t(p+q)}{\eta^2} & 0 & 0 \\
0 & \dfrac{t(p-q)}{\eta^2} & 0 & 0 \\
\dfrac{8(p-q)}{E} & \dfrac{4t(p-q)}{\eta^2} & -\dfrac{p-q}{E'^2} & -\dfrac{t(p-q)}{\eta'^2}
\end{pmatrix} \tag{24}$$

由矩阵式(24)可知,当 $p=q$ 时,矩阵式的秩为 $R=2$;当 $p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时,矩阵的秩为 $R=3$,故不能唯一地反分析出 μ、η、E' 和 η' 等 4 个参数。因此,例 1 反分析 μ、η、E' 和 η' 等 4 个参数为不唯一。

(2) 例 2:已知参数 E、E' 和 η',反分析 p、q、μ 和 η,此时 $\partial u_r/\partial E$、$\partial u_r/\partial \eta$ 和 $\partial u_r/\partial E'$ 都等于 0,则方程组消去有 C_3、C_6 和 C_7 的项,矩阵中只余 C_1、C_2、C_4 和 C_5 对应的 4 列:

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{E'}N & \dfrac{1}{E'}N & M & 0 \\ \dfrac{1}{E}+\dfrac{t}{\eta} & \dfrac{1}{E}+\dfrac{t}{\eta} & 0 & -\dfrac{t(p+q)}{\eta^2} \\ \dfrac{1}{E}+\dfrac{t}{\eta} & -\dfrac{1}{E}+\dfrac{t}{\eta} & 0 & \dfrac{t(p-q)}{\eta^2} \\ \dfrac{t}{\eta'}+\dfrac{1}{E'}-\dfrac{4t}{\eta}+\dfrac{8(\mu-1)}{E} & \dfrac{t}{\eta'}+\dfrac{1}{E'}-\dfrac{4t}{\eta}+\dfrac{8(\mu-1)}{E} & \dfrac{8(p-q)}{E} & \dfrac{4t(p-q)}{\eta^2} \end{pmatrix} \tag{25}$$

由矩阵式(25)可知,当 $p=q$ 时,矩阵式秩 $R=3$,此时不能唯一地反分析出 p、q、μ 和 η 等 4 个参数;当 $p\neq q$ 时,矩阵式秩为 $R=4$,可以唯一地反分析出 p、q、μ 和 η 等 4 个参数,例 2 反分析为条件唯一。

已知 3 个参数,反演另外 4 个参数,有 $C_7^3=35$ 种组合,按照上述分析方法得出其余反分析结果见表 1,统计结果见表 2。

表 1 已知 3 个参数时的反分析唯一性

Table 1 Uniqueness of back analysis when 3 parameters are known

编号	p	q	E	μ	η	E'	η'	反分析结果	注释
1	?	?	?	?	√	√	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=3$;$p\neq q$ 时 $R=4$
2	?	?	?	√	?	√	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$;$p\neq q$ 时 $R=4$
3	?	?	?	√	√	?	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$;$p\neq q$ 时 $R=4$
4	?	?	?	√	√	√	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$;$p\neq q$ 时 $R=4$
5	?	?	√	?	√	?	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=3$;$p\neq q$ 时 $R=4$
6	?	?	√	?	√	√	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=3$;$p\neq q$ 时 $R=4$
7	?	?	√	√	?	?	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=3$;$p\neq q$ 时 $R=4$
8	?	?	√	√	?	√	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$;$p\neq q$ 时 $R=4$
9	?	?	√	√	?	√	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$;$p\neq q$ 时 $R=4$
10	?	?	√	√	√	?	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$;$p\neq q$ 时 $R=4$
11	?	√	?	?	?	√	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=3$;$p\neq q$ 或 $q=0$ 时 $R=4$
12	?	√	?	?	√	?	√	条件唯一	$p=q$ 或 $q=0$ 时 $R=3$;$p\neq q$ 时 $R=4$
13	?	√	?	?	√	√	?	条件唯一	$p=q$ 或 $q=0$ 时 $R=3$;$p\neq q$ 时 $R=4$
14	?	√	?	√	?	?	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 时 $R=4$
15	?	√	?	√	?	√	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 时 $R=4$
16	?	√	?	√	√	?	?	条件唯一	$p=q$ 或 $q=0$ 时 $R<4$;$p\neq q$ 时 $R=4$
17	?	√	√	?	?	?	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=3$;$p\neq q$ 或 $q=0$ 时 $R=4$
18	?	√	√	?	?	√	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=3$;$p\neq q$ 或 $q=0$ 时 $R=4$
19	?	√	√	?	√	?	?	不唯一	$p=q$ 时 $R=2$;$p\neq q$ 或 $q=0$ 时 $R=3$
20	?	√	√	√	?	?	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R<4$;$p\neq q$ 或 $q=0$ 时 $R=4$
21	√	?	?	?	?	√	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=3$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 时 $R=4$
22	√	?	?	?	√	?	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=3$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 时 $R=4$
23	√	?	?	?	√	√	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=3$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 时 $R=4$
24	√	?	?	√	?	√	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 时 $R=4$
25	√	?	?	√	√	?	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 时 $R=4$
26	√	?	?	√	√	?	?	条件唯一	$p=q$ 或 $p=0$ 时 $R<4$;$p\neq q$ 时 $R=4$
27	√	?	√	?	?	?	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=3$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 时 $R=4$
28	√	?	√	?	?	√	?	条件唯一	$p=q$ 或 $p=0$ 时 $R<4$;$p\neq q$ 时 $R=4$
29	√	?	√	?	√	?	?	不唯一	$p=q$ 时 $R=2$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 时 $R=3$
30	√	?	√	√	?	?	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R<4$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 时 $R=4$
31	√	√	?	?	?	?	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=4$
32	√	√	?	?	?	√	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=4$
33	√	√	?	?	√	?	?	不唯一	$p=q$ 时 $R=2$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=3$
34	√	√	?	√	?	?	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=1$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=4$
35	√	√	√	?	?	?	?	不唯一	$p=q$ 时 $R=2$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=3$

注:“√”为已知参数,“?”表示未知参数。

表 2 已知 3 个参数时的反分析结果总计

Table 2 Statistical results of back analysis when 3 parameters are known

待反演参数	反演次数	不唯一次数	条件唯一次数	绝对唯一次数
p	20	1	19	0
q	20	1	19	0
E	20	1	19	0
μ	20	4	16	0
η	20	1	19	0
E'	20	4	16	0
η'	20	4	16	0

由表 1 和表 2 可知,35 种组合中,4 种反分析不唯一,31 种反分析条件唯一。参数 p 和 q 对唯一性有较大的影响,条件唯一时,当 $p=q$ 时反分析结果不唯一,$p\neq q$ 时反分析结果唯一。相比较来看,p、q、E 和 η 的可辨识性较优,μ、E' 和 η' 可辨识性较差。

3.2 已知 4 个参数

已知 4 个参数,有 4 个方程,3 个未知数,反分析不唯一,则其秩 $R<3$;反分析唯一,则其秩 $R=3$。下文举例分析。

(1) 例 3:已知参数 p、q、E 和 μ,反分析 η、E' 和 η'。此时 $\partial u_r/\partial p$、$\partial u_r/\partial q$、$\partial u_r/\partial E$ 和 $\partial u_r/\partial \mu$ 都等于 0,则方程组消去有 C_1、C_2、C_3 和 C_4 的项,矩阵中余 C_5、C_6 和 C_7 对应的 3 列:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{(p-q)}{E'^2}N-\dfrac{2t(p-q)(2\mu-1)}{E'\eta(2\mu-3)^2}G & \dfrac{2t(2\mu-1)(p-q)}{\eta'^2(2\mu-3)^2}G \\ -\dfrac{t(p+q)}{\eta^2} & 0 & 0 \\ \dfrac{t(p-q)}{\eta^2} & 0 & 0 \\ \dfrac{4t(p-q)}{\eta^2} & -\dfrac{p-q}{E'^2} & -\dfrac{t(p-q)}{\eta'^2} \end{pmatrix} \tag{26}$$

由矩阵式(26)可知,当 $p=q$ 时,秩为 $R=1$,故不能唯一地反分析出 η、E' 和 η' 等 3 个参数;当 $p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=3$,可以唯一地反分析出 η、E' 和 η' 等 3 个参数,例 3 反分析条件唯一。

(2) 例 4:已知参数 q、E、E' 和 η',反分析 p、μ 和 η。此时 $\partial u_r/\partial q$、$\partial u_r/\partial E$、$\partial u_r/\partial E'$ 和 $\partial u_r/\partial \eta'$ 都为 0,则方程组消去有 C_2、C_3、C_6 和 C_7 的项,矩阵中余 C_1、C_4 和 C_5 对应的 3 列:

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{E'}N & M & 0 \\ \dfrac{1}{E}+\dfrac{t}{\eta} & 0 & -\dfrac{t(p+q)}{\eta^2} \\ \dfrac{1}{E}+\dfrac{t}{\eta} & 0 & \dfrac{t(p-q)}{\eta^2} \\ \dfrac{t}{\eta'}+\dfrac{1}{E'}-\dfrac{4t}{\eta}+\dfrac{8(\mu-1)}{E} & \dfrac{8(p-q)}{E} & \dfrac{4t(p-q)}{\eta^2} \end{pmatrix} \tag{27}$$

由矩阵式(27)可知,秩为 $R=3$,例 4 反分析为绝对唯一。

已知 4 个参数,反演另外 3 个参数,有 $C_7^4=35$ 种组合,按照上述分析方法得出其余反分析结果见表 3,统计结果见表 4。

表 3 已知 4 个参数时的反分析唯一性

Table 3 Uniqueness of back analysis when 4 parameters are known

编号	p	q	E	μ	η	E'	η'	反分析结果	注释
1	?	?	?	√	√	√	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$;$p\neq q$ 时 $R=3$
2	?	?	√	?	√	√	√	绝对唯一	$R=3$
3	?	?	√	√	?	√	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$;$p\neq q$ 时 $R=3$
4	?	?	√	√	√	?	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$;$p\neq q$ 时 $R=3$
5	?	?	√	√	√	√	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$;$p\neq q$ 时 $R=3$
6	?	√	?	?	√	√	√	绝对唯一	$R=3$
7	?	√	?	√	?	√	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$;$p\neq q$ 或 $q=0$ 时 $R=3$
8	?	√	?	√	√	?	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$;$p\neq q$ 或 $q=0$ 时 $R=3$
9	?	√	?	√	√	√	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$;$p\neq q$ 或 $q=0$ 时 $R=3$
10	?	√	√	?	?	√	√	绝对唯一	$R=3$
11	?	√	√	?	√	?	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$;$p\neq q$ 或 $q=0$ 时 $R=3$

（续表）

编号	p	q	E	μ	η	E'	η'	反分析结果	注释
12	?	√	√	?	√	√	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$；$p\neq q$ 或 $q=0$ 时 $R=3$
13	?	√	√	√	?	?	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$；$p\neq q$ 或 $q=0$ 时 $R=3$
14	?	√	√	√	?	√	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$；$p\neq q$ 或 $q=0$ 时 $R=3$
15	?	√	√	√	√	?	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=1$；$p\neq q$ 或 $q=0$ 时 $R=3$
16	√	?	?	?	√	√	√	绝对唯一	$R=3$
17	√	?	?	√	?	√	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$；$p\neq q$ 或 $p=0$ 时 $R=3$
18	√	?	?	√	√	?	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$；$p\neq q$ 或 $p=0$ 时 $R=3$
19	√	?	?	√	√	√	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$；$p\neq q$ 或 $p=0$ 时 $R=3$
20	√	?	√	?	?	√	√	绝对唯一	$R=3$
21	√	?	√	?	√	?	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$；$p\neq q$ 或 $p=0$ 时 $R=3$
22	√	?	√	?	√	√	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$；$p\neq q$ 或 $p=0$ 时 $R=3$
23	√	?	√	√	?	?	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$；$p\neq q$ 或 $p=0$ 时 $R=3$
24	√	?	√	√	?	√	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$；$p\neq q$ 或 $p=0$ 时 $R=3$
25	√	?	√	√	√	?	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=1$；$p\neq q$ 或 $p=0$ 时 $R=3$
26	√	?	√	√	?	?	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$；$p\neq q$ 或 $p=0$ 时 $R=3$
27	√	?	√	√	?	√	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$；$p\neq q$ 或 $p=0$ 时 $R=3$
28	√	√	?	?	?	√	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$；$p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=3$
29	√	√	?	?	√	?	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=1$；$p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=3$
30	√	√	?	?	√	√	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=1$；$p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=3$
31	√	√	?	√	?	?	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=1$；$p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=3$
32	√	√	?	√	?	√	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$；$p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=3$
33	√	√	√	?	?	?	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=2$；$p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=3$
34	√	√	√	?	?	√	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=1$；$p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=3$
35	√	√	√	?	√	?	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=1$；$p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=3$

注：“√”为已知参数，“?”表示未知参数。

表 4 已知 4 个参数时的反分析结果总计

Table 4 Statistical results of back analysis when 4 parameters are known

待反演参数	反演次数	不唯一次数	条件唯一次数	绝对唯一次数
p	15	0	12	3
q	15	0	12	3
E	15	0	12	3
μ	15	0	10	5
η	15	0	13	2
E'	15	0	15	0
η'	15	0	15	0

由表 3 和表 4 可知，35 种组合中，有 5 种反分析绝对唯一，30 种反分析条件唯一。参数 p 和 q 对唯一性有较大的影响，条件唯一时，当 $p=q$ 时反分析结果恒不唯一，$p\neq q$ 时反分析结果唯一。相比较来看，μ 的可辨识性最优，p、q 和 E 稍差，η、E' 和 η' 最差。

3.3 已知 5 个参数

已知 5 个参数，有 4 个方程，2 个未知数，下文举例分析。

例 5：已知参数 p、q、E、μ 和 E'，反分析 η 和 η'，此时 $\partial u_r/\partial p$、$\partial u_r/\partial q$、$\partial u_r/\partial E$、$\partial u_r/\partial \mu$ 和 $\partial u_r/\partial E'$ 都为 0，则方程组消去有 C_1、C_2、C_3、C_4 和 C_6 的项，矩阵中余 C_5 和 C_7 对应的 2 列：

$$\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{2t(2\mu-1)(p-q)}{\eta'^2(2\mu-3)^2}G \\ -\dfrac{t(p+q)}{\eta^2} & 0 \\ \dfrac{t(p+q)}{\eta^2} & 0 \\ \dfrac{4t(p-q)}{\eta^2} & -\dfrac{t(p-q)}{\eta'^2} \end{pmatrix} \tag{28}$$

由矩阵式(28)可知，当 $p=q$ 时秩 $R=1$，故不能唯一地反分析出 η 和 η' 两个参数；当 $p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=2$，可以唯一地反分析出 η 和 η' 两个参数，例 5 反分析条件唯一。

已知 5 个参数，反演另外 2 个参数，共有 $C_7^5=21$ 种组合，按照上述分析方法得出其余反分析结果见表 5，统计结果见表 6。

表 5 已知 5 个参数时的反分析唯一性

Table 5 Uniqueness of back analysis when 5 parameters are known

编号	p	q	E	μ	η	E'	η'	反分析结果	注释
1	?	?	√	√	√	√	√	绝对唯一	$R=2$
2	?	√	?	√	√	√	√	绝对唯一	$R=2$
3	?	√	√	?	√	√	√	绝对唯一	$R=2$
4	?	√	√	√	?	√	√	绝对唯一	$R=2$
5	?	√	√	√	√	?	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=1$;$p\neq q$ 或 $q=0$ 时 $R=2$
6	?	√	√	√	√	√	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=1$;$p\neq q$ 或 $q=0$ 时 $R=2$
7	√	?	?	√	√	√	√	绝对唯一	$R=2$
8	√	?	√	?	√	√	√	绝对唯一	$R=2$
9	√	?	√	√	?	√	√	绝对唯一	$R=2$
10	√	?	√	√	√	?	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=1$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 时 $R=2$
11	√	?	√	√	√	√	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=1$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 时 $R=2$
12	√	√	?	?	√	√	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=1$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=2$
13	√	√	?	√	?	√	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=1$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=2$
14	√	√	?	√	√	?	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=1$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=2$
15	√	√	?	√	√	√	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=1$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=2$
16	√	√	√	?	?	√	√	绝对唯一	$R=2$
17	√	√	√	?	√	?	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=1$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=2$
18	√	√	√	?	√	√	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=1$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=2$
19	√	√	√	√	?	?	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=1$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=2$
20	√	√	√	√	?	√	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=1$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=2$
21	√	√	√	√	√	?	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=0$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=2$

注:“√”为已知参数,“?”表示未知参数。

表 6 已知 5 个参数时的反分析结果总计

Table 6 Statistical results of back analysis when 5 parameters are known

待反演参数	反演次数	不唯一次数	条件唯一次数	绝对唯一次数
p	6	0	2	4
q	6	0	2	4
E	6	0	4	2
μ	6	0	3	3
η	6	0	3	3
E'	6	0	6	0
η'	6	0	6	0

由表 5 和表 6 可知,21 种组合中,有 13 种反分析条件唯一,8 种反分析绝对唯一。参数 p 和 q 对唯一性有较大的影响,当 $p=q$ 时反分析结果恒不唯一,$p\neq q$时反分析结果唯一。相比较来看,p 和 q 可辨识性最优,μ 和 η 较优,E、E'和 η'的可辨识性最差。

3.4 已知 6 个参数

已知 6 个参数,有 4 个方程,1 个未知数,下文举例分析。

例 6:已知参数 p、q、E、μ、η 和 E',反分析 η',此时$\partial u_r/\partial p$、$\partial u_r/\partial q$、$\partial u_r/\partial E$、$\partial u_r/\partial \mu$、$\partial u_r/\partial \eta$ 和 $\partial u_r/\partial E'$都为 0,则方程组消去有 C_1、C_2、C_3、C_4、C_5 和 C_6 的项,矩阵中余 C_7 对应的 1 列:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2t(2\mu-1)(p-q)}{\eta'^2\,(2\mu-3)^2}G \\ 0 \\ 0 \\ -\dfrac{t(p-q)}{\eta'^2} \end{pmatrix} \tag{29}$$

由矩阵式(29)可知,当 $p=q$ 时,秩 $R=0$;当 $p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=1$,可以唯一地反分析出 η',例 6 反分析为条件唯一。

其余 $C_7^6=7$ 种反分析结果见表 7,统计结果见表 8。

表 7 已知 6 个参数时的反分析唯一性

Table 7 Uniqueness of back analysis when 6 parameters are known

编号	p	q	E	μ	η	E'	η'	反分析结果	注释
1	?	√	√	√	√	√	√	绝对唯一	$R=1$
2	√	?	√	√	√	√	√	绝对唯一	$R=1$
3	√	√	?	√	√	√	√	绝对唯一	$R=1$
4	√	√	√	?	√	√	√	绝对唯一	$R=1$
5	√	√	√	√	?	√	√	绝对唯一	$R=1$
6	√	√	√	√	√	?	√	条件唯一	$p=q$ 时 $R=0$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=1$
7	√	√	√	√	√	√	?	条件唯一	$p=q$ 时 $R=0$;$p\neq q$ 或 $p=0$ 或 $q=0$ 时 $R=1$

注:“√”为已知参数,“?”表示未知参数。

表 8 已知 6 个参数时的反分析结果总计

Table 8 Statistical results of back analysis when 6 parameters are known

待反演参数	反演次数	不唯一次数	条件唯一次数	绝对唯一次数
p	1	0	0	1
q	1	0	0	1
E	1	0	0	1
μ	1	0	0	1
η	1	0	0	1
E'	1	0	1	0
η'	1	0	1	0

由表 7 和表 8 可知,7 种组合中,有 2 种反分析条件唯一,5 种反分析绝对唯一。参数 p 和 q 对唯一性有较大的影响,当 $p=q$ 时反分析结果恒不唯一,$p\neq q$ 时反分析结果唯一。相比较来看,p、q、E、μ 和 η 的可辨识性较优,E' 和 η' 的可辨识性最差。

3.5 两种材料模型对比

为了直观地说明考虑横观各向同性法向上的弹性模量与黏性系数对反分析唯一性的影响,与文献[19]的反分析结果进行对比,见表 9。

由表 9 可知,相比各向同性黏弹性模型,横观各向同性黏弹性模型反分析的不唯一比例减少 11.9 个百分点,条件唯一比例增加 13.5 个百分点,绝对唯一比例减少 1.6 个百分点。总体分析可知,相比较各向同性黏弹性岩体,虽然岩体力学参数增加,但反分析的总体唯一性比例增加了 11.9 个百分点,增加了反分析的总体唯一性。

表 9 两种材料模型对比

Table 9 Comparison of two material models

材料模型	不唯一		条件唯一		绝对唯一	
	次数/次	占比/%	次数/次	占比/%	次数/次	占比/%
各向同性黏弹性	4	16.0	16	64.0	5	20.0
横观各向同性黏弹性	4	4.1	76	77.5	18	18.4

4 案例分析

已知 E、μ、η、E' 和 η' 等 5 个参数,根据测点位移实测值反分析参数 p 和 q,由表 5 可知反分析结果绝对唯一。将测点 $C_1(2,0°)$ 和 $C_2(2,45°)$ 的实测位移值 u_1 和 u_2 代入式(12)可得 p 和 q 的表达式:

$$\left.\begin{aligned} p&=\frac{F_2u_1-F_1u_2}{F_2E_1-F_1E_2}\\ q&=\frac{E_2u_1-E_1u_2}{F_1E_2-F_2E_1}\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

E_1、F_1、E_2、F_2 表达式如下:

$$\left.\begin{aligned} E_1&=\frac{a^2}{2r_1}\left(\frac{1}{E}+\frac{t}{\eta}\right)+\left[\frac{a^4}{2r_1^3}\left(\frac{1}{E}+\frac{t}{\eta}\right)+\frac{a^2}{3r_1}\left[\frac{t}{\eta'}+\frac{1}{E'}-4\left(\frac{t}{\eta}+\frac{1}{E}\right)\right]+(1-2\mu)\left(\frac{3a^2}{E'r_1}N-\frac{4a^2}{3Er_1}\right)\right]\cos 2\theta_1\\ F_1&=\frac{a^2}{2r_1}\left(\frac{1}{E}+\frac{t}{\eta}\right)-\left[\frac{a^4}{2r_1^3}\left(\frac{1}{E}+\frac{t}{\eta}\right)+\frac{a^2}{3r_1}\left[\frac{t}{\eta'}+\frac{1}{E'}-4\left(\frac{t}{\eta}+\frac{1}{E}\right)\right]+(1-2\mu)\left(\frac{3a^2}{E'r_1}N-\frac{4a^2}{3Er_1}\right)\right]\cos 2\theta_1\\ E_2&=\frac{a^2}{2r_2}\left(\frac{1}{E}+\frac{t}{\eta}\right)+\left[\frac{a^4}{2r_2^3}\left(\frac{1}{E}+\frac{t}{\eta}\right)+\frac{a^2}{3r_2}\left[\frac{t}{\eta'}+\frac{1}{E'}-4\left(\frac{t}{\eta}+\frac{1}{E}\right)\right]+(1-2\mu)\left(\frac{3a^2}{E'r_2}N-\frac{4a^2}{3Er_2}\right)\right]\cos 2\theta_2\\ F_2&=\frac{a^2}{2r_2}\left(\frac{1}{E}+\frac{t}{\eta}\right)-\left[\frac{a^4}{2r_2^3}\left(\frac{1}{E}+\frac{t}{\eta}\right)+\frac{a^2}{3r_2}\left[\frac{t}{\eta'}+\frac{1}{E'}-4\left(\frac{t}{\eta}+\frac{1}{E}\right)\right]+(1-2\mu)\left(\frac{3a^2}{E'r_2}N-\frac{4a^2}{3Er_2}\right)\right]\cos 2\theta_2\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

将已知参数和测点位移代入式(30)中,可以反演出 p 和 q,下面根据某工程实例反演计算。

某圆形巷道开挖于均质的横观各向同性岩层中,开挖方向与横观各向同性面法向方向同向,岩体符合 Maxwell 流变模型,初始竖向地应力为 $p=10$ MPa,初始横向地应力为 $q=20$ MPa,$E=1$ GPa,$\mu=0.3$,$\eta=5\times10^3$ MPa·h,$E'=0.8$ GPa,$\eta'=6\times10^3$ MPa·h,巷道半径为 2 m,已知巷道中 2 个测点 $C_1(2,0°)$ 和 $C_2(2,45°)$ 的位移测量值 $u_1=0.267$ m,$u_2=0.153$ m,位置如图 3 所示,$t=24$ h 时测点的位移解析值与位移测量值见表 10。将反分析出的 p 和 q 与已知参数对比,见表 11。

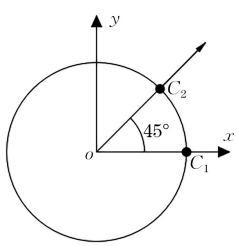


图 3 巷道的测点布置

Fig.3 Measuring point arrangement of roadway

表 10 测点位移值

Table 10 Displacement values of measuring point

测点	位移解析值/m	位移测量值/m	绝对误差/m	相对误差/%
$C_1(2,0°)$	0.272	0.267	0.005	1.8
$C_2(2,45°)$	0.150	0.153	0.003	2.0

表 11 地应力的反分析结果

Table 11 Results of displacement back analysis for initial ground stresses

测点	位移解析值/m	位移测量值/m	反分析结果/MPa		相对误差/%	
			p	q	p	q
$C_1(2,0°)$	0.272	0.267	10.72	19.68	7.2	1.6
$C_2(2,45°)$	0.150	0.153				

由表 11 可知,可以唯一地反分析出 p 和 q,验证了表 5 结果的正确性。位移测量值的误差会引起反分析计算结果的误差,地应力的反演值与解析值相差小于 8%,位移测量值对地应力的反分析精度较高,可以用于指导工程设计与计算。

5 结论

(1) 根据弹性和黏弹性对应原理推导了符合 Maxwell 流变模型的横观各向同性黏弹性岩体圆形巷道的径向位移解析解,为进一步研究位移反分析的唯一性提供了依据。

(2) 仅知道测点位移不能唯一地反分析出全部参数,至少已知 3 个岩体力学参数,才可能唯一地反分析出另外 4 个岩体力学参数。统计了所有反分析组合,为参数选取提供参考。

(3) 反分析中,竖向初始地应力 p 与横向初始地应力 q 的取值对反分析的唯一性影响显著;在条件唯一中 $p=q$ 时反分析结果均为不唯一,$p\neq q$ 时反分析结果为唯一。待求参数越少,越容易辨识出岩体参数。综合分析,初始地应力参数 p 和 q 的辨识性最优,其次是 μ、E、η,E'和 η'的辨识性最差。

(4) 相比各向同性黏弹性模型,横观各向同性黏弹性模型反分析的不唯一比例减少 11.9 个百分点,条件唯一比例增加 13.5 个百分点,绝对唯一比例减少 1.6 个百分点。增加横观各向同性法向上的弹性模量与黏性系数两个岩体参数后,反分析的总体唯一性比例增加。

参考文献(References):

[1] 钱家欢,殷宗泽.土工原理与计算[M].北京:中国水利水电出版社,1996.
QIAN Jiahuan, YIN Zongze. Principle and calculation of geotechnical engineering[M]. Beijing: China Water Power Press,1996.

[2] 冯夏庭,杨成祥.智能岩石力学(2):参数与模型的智能辨识[J].岩石力学与工程报,1999(3):350-353.
FENG Xiating, YANG Chengxiang. Intelligent rock mechanics(2): intelligent recognition of input parameters and constitutive models[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering,1999(3):350-353.

[3] 杨志法.岩土工程反分析的发展及展望[C]//中国岩石力学与工程学会.全国岩土工程反分析学术研讨会暨黄岩石窟(锦绣黄岩)岩石力学问题讨论会文集.北京:地震出版社,2006:8-18.
YANG Zhifa. Development and prospect of back analysis in geotechnical engineering[C]//Chinese Society for Rock Mechanics & Engineering. Symposium of the national conference on back analysis of geotechnical engineering and discussion on rock Machanics of Huangyan Caves(Jinxiu Huangyan). Beijing: Seismological Press,2006:8-18.

[4] 戴张俊,郭建华,周哲,等.川中红层高铁路基长时上拱变形反演与预测[J].岩石力学与工程学报,2020,39(增刊 2):3538-3548.
DAI Zhangjun, GUO Jianhua, ZHOU Zhe, et al. Inversion and prediction of long-term uplift deformation of high-speed railway subgrade in central Sichuan red-bed[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering,2020,39(Suppl. 2):3538-3548.

[5] 吴根水,余伟健,刘泽,等.软岩巷道岩体力学参数反演方法及工程应用[J].工矿自动化,2018,44(11):41-48.
WU Genshui, YU Weijian, LIU Ze, et al. Inversion method of mechanical parameters of rock mass in soft rock roadway and its engineering application[J]. Journal of Mine Automation,2018,44(11):41-48.

[6] 王东,宋伟豪,姜聚宇,等.边坡岩体抗剪强度参数多重反演方法研究与应用[J].安全与环境学报,2021,21(6):2557-2563.
WANG Dong, SONG Weihao, JIANG Juyu, et al. Application of multiple inversion method for shear strength parameters of slope rock mass[J]. Journal of Safety Science Journal,2021,21(6):2557-2563.

[7] 王凤林,王东明,杨天鸿,等.抚顺西露天矿软硬岩互层反倾岩体边坡稳定性分析及治理[J].金属矿山,2022(1):162-169.
WANG Fenglin, WANG Dongming, YANG Tianhong, et al. Stability analysis and treatment of anti-dip rock slope interbedded with soft and hard rock in fushun west open-pit mine[J]. Metal Mine,2022(1):162-169.

[8] 廖小辉,王雅南,刘浩,等.关于龙游石窟 23 号古地下洞室 23-1 号斜坡柱稳定问题的讨论[J].工程地质学报,2020,28(6):1406-1414.
LIAO Xiaohui, WANG Ya'nan, LIU Hao, et al. The engineering scientific of the No.23-1 inclined rock pillar in No.23 cavern in the ancient underground rock caverns in Longyou[J]. Journal of Engineering Geology,2020,28(6):1406-1414.

[9] 刘诗音,肖洪天,谢云跃,等.微风化岩体隧道开挖反分析及围岩稳定性评价[J].铁道标准设计,2020,64(3):112-117.
LIU Shiyin, XIAO Hongtian, XIE Yunyue, et al. Inversion analysis of tunnel excavation and surrounding rock stability in weakly weathered rock mass [J]. Railway Standard Design,2020,64(3):112-117.

[10] KAVANAGH K T, CLOUGH R W. Finite element application in the characterization of elastic solids [J]. International Journal of Solids & Structures,1971,7(1):11-23.

[11] 吴成滨,林川,曾树元,等.基于改进果蝇算法的危岩体弹性模量反演计算[J].水利水电技术,2016,47(10):115-118.
WU Chengbin, LIN Chuan, ZENG Shuyuan, et al. Improved FOA-based inversed calcultion on elastic modulus of dangerous rock mass [J]. Water Resources and Hydropower Engineering,2016,47(10):115-118.

[12] 郭凌云,肖明.地下工程岩体参数场反演分析应用研究[J].岩石力学与工程学报,2008(增刊 2):3822-3826.
GUO Lingyun, XIAO Ming. Back-analysis and application study on surrounding rock parameter field of underground engineering[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering,2008(Suppl.2):3822-3826.

[13] 孙钱程,李邵军,赵洪波,等.基于位移和松弛深度的岩体参数概率反分析方法[J].岩石力学与工程学报,2019,38(9):1884-1894.
SUN Qiancheng, LI Shaojun, ZHAO Hongbo, et al. Probabilistic back analysis of rock mechanical parameters based on displacement and relaxation depth [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering,2019,38(9):1884-1894.

[14] 王军祥,姜谙男,宋战平.岩石弹塑性应力-渗流-损伤耦合模型研究(Ⅱ):参数反演及数值模拟[J].岩土力学,2015,36(12):3606-3614.
WANG Junxiang, JIANG Annan, SONG Zhanping. An elastoplastic stress-seepage-damage coupling model of rock (Ⅱ): parametric inversion and numerical simulation [J]. Rock and Soil Mechanics,2015,36(12):3606-3614.

[15] 伍振志,王泉.基于改进遗传算法的粘弹性岩体力学参数反演[J].煤田地质与勘探,2006(3):44-46.
WU Zhenzhi, WANG Quan. Back analysis of viscoelastic rock mass parameters based on improved genetic algorithm [J].Coal Geology & Exploration,2006(3):44-46.

[16] 吕爱钟.巷道围岩参数及地应力可辨识性的探讨[J].岩石力学与工程学报,1988(2):155-164.
LYU Aizhong. Discussion on parameters of surrounding rocks during tunnel excavation and discrimination of ground stress [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering,1988,7(2):155-164.

[17] 张路青,贾正雪.弹性位移反分析对地应力、弹模的反演唯一性[J].岩土工程学报,2001(2):172-177.
ZHANG Luqing, JIA Zhengxue. Inversion uniqueness of elastic displacement back-analysis for ground stress, elastic modulus and poisson's ratio [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering,2001(2):172-177.

[18] YANG Z F, LEE C F, WANG S J. Three-dimensional back-analysis of displacements in exploration edits-principles and application[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences,2000,37(3):525-533.

[19] 张志增,尹晨旭,刘晓丽,等.黏弹性岩体中圆形巷道位移反分析的唯一性研究[J].中国矿业,2022,31(5):163-170+180.
ZHANG Zhizeng, YIN Chenxu, LIU Xiaoli, et al. Study on uniqueness of displacement back analysis of circular roadway in viscoelastic rock mass[J].China Mining Magazine,2022,31(5):163-170+180.

[20] 张志增,李仲奎.横观各向同性岩体中圆形巷道反分析的惟一性[J].岩土力学,2011,32(7):2066-2072.
ZHANG Zhizeng, LI Zhongkui. Uniqueness of displacement back analysis of a circular tunnel in transversely isotropic rock mass [J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, 32(7): 2066-2072.

[21] ZHANG Zhizeng, ZHANG Jinhu, HOU Dongqi, et al. Displacement analytic solution of a deep ellipitical tunnel in transversely isotropic rock mass [J]. Advanced Materials Research,2012,402:593-597.

[22] ZHANG Zhizeng, LI Xiaochang, LI Yongtao. Uniqueness of displacement back analysis of a deep tunnel with arbitrary cross section in teansversely isotropic rock[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences,2017,(97):110-121.

[23] 张志增,李小昌,王克忠.考虑剪应力作用时横观各向同性岩体中圆形巷道位移反分析的惟一性[J].岩土力学,2016,37(增刊 2):449-460.
ZHANG Zhizeng, LI Xiaochang, WANG Kezhong. Uniqueness of displacement back analysis of circular tunnel in transversely isotropic rock mass when considering shear stress[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, 37(Suppl.2): 449-460.

[24] 王少杰,吕爱钟,张晓莉.横观各向同性岩体中马蹄形隧洞的位移反分析方法[J].岩土力学,2018,39(增刊 1):495-504.
WANG Shaojie, LYU Aizhong, ZHANG Xiaoli. Analytical method of displacement back analysis for horseshoe tunnel excavated in transverse isotropic rock mass[J]. Rock and Soil Mechanics,2018,39(Suppl.1):495-504.

[25] 吴世勇,王鸽.锦屏二级水电站深埋长隧洞群的建设和工程中的挑战性问题[J].岩石力学与工程学报,2010,29(11):2161-2171.
WU Shiyong, WANG Ge. Challenge issues in construction and project of large-scale deep-buried tunnel group of Jinping Ⅱ hydropower station [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering,2010,29(11):2161-2171.

[26] 薛琳,杨志法.关于符合马克斯威尔、鲍埃丁-汤姆逊和 H-K 模型的粘弹性岩体的位移反分析原理[J].青岛建筑工程学院学报,1988(1):79-88.
XUE Lin, YANG Zhifa. The principle of back analysis from displacements for viscoelastic rock mass represented by Maxwell, Poyting-Thomson, and H-K body[J]. Journal of Qingdao University of Technology,1988(1):79-88.

[27] 薛琳,郅玉亭,杨志法.确定流变岩体的参数及地应力的位移反分析法[J].地质科学,1986(4):371-380.
XUE Lin, QIE Yuting, YANG Zhifa. Back-analysis method from displacements for determining parameters of rheological rock mass and initial stress[J]. Chinese Journal of Geology (Scientia Geologica Sinica),1986(4):371-380.

[28] 沈振中.三峡大坝和基岩施工期变形分析及其反分析模型[D].南京:河海大学,1995.
SHEN Zhenzhong. Deformation analysis and back analysis model of three gorges dam and bedrock in construction stage [D]. Nanjing:HoHai University,1995.