下向进路顶板充填体承载层与接顶层强度设计*

郑聪[1],乔登攀[1],龙赣[1],李子彬[1],李勇明[2],廉柏栋[3],杨天雨[1]

(1.昆明理工大学 国土资源工程学院, 云南 昆明 650093;
2.云南磷化集团有限公司, 云南 昆明 650600;
3.栾川龙宇钼业有限公司, 河南 洛阳市 471500)

摘要:下向进路充填采矿法中,充填体顶板通常分为承载层与接顶层,其强度是保证进路回采过程中顶板稳定的关键因素。对下向矩形进路进行了受力分析,在考虑进路两侧均为充填体的情况下,结合复变函数矩形孔口应力求解方法与充填体单轴压缩变形试验、剪切强度试验,分别对进路充填体承载层与接顶层的强度进行了设计,并在云南某金属矿山开展现场工业应用以验证设计强度的合理性。结果表明,充填体侧压系数为0.29时,取矩形巷道宽高比为1.0,以安全系数 $f=1.5$ 设计承载层抗拉强度 $\sigma_t=0.26$ MPa、接顶层抗压强度 $\sigma_c=2.88$ MPa,井下采场回采与充填过程中未出现充填体侧向垮塌与顶板冒落现象,设计强度能够满足现场安全作业要求,预计可为矿山节约充填成本558万元/a。

关键词:下向进路充填采矿法;复变函数;承载层;接顶层;充填体强度

中图分类号:TD853.34 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-2763(2025)11-0071-07

Strength Design of Bearing Layer and Capping Layer of Backfill on the Roof of Downward Drift

ZHENG Cong[1], *QIAO Dengpan*[1], *LONG Gan*[1], *LI Zibing*[1], *LI Yongming*[2], *LIAN Baidong*[3], *YANG Tianyu*[1]

(1.Faculty of Land Resources Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming, Yunnan 650093, China;
2.Yunnan Phosphate Chemical Group Co., Ltd., Kunming, Yunnan 650600, China;
3.Luanchuan Longyu Molybdenum Industry Co., Ltd., Luoyang, Henan 471500, China)

Abstract: In the downward drift filling mining method, the roof backfill is usually divided into a bearing layer and a capping layer, and their strength is a key factor to ensure roof stability during the drift mining process. Force analysis was carried out on the downward rectangular drift. Considering that both sides of the drift were backfill, the strengths of the bearing layer and capping layer of the drift backfill were designed respectively by combining the stress solution method for rectangular openings based on complex functions with the unconfined compressive deformation test and shear strength test of backfill. An on-site industrial application was carried out in a metal mine in Yunnan to verify the rationality of the designed strength. The results show that when the lateral pressure coefficient of the backfill is 0.29, and the height-width ratio of the rectangular roadway is set to 1.0, the tensile strength of the bearing layer is designed as $\sigma_t=0.26$ MPa and the compressive strength of the capping layer as $\sigma_c=2.88$ MPa with a safety factor of $f=1.5$. During the mining and filling process of the underground stope, no phenomena of lateral collapse of the backfill or roof caving are observed. The designed strength meets the requirements of on-site safe operation, and it is estimated to save the mine a filling cost of 5.58 million yuan per year.

Key words: Downward drift filling mining method, Complex function, Bearing layer, Capping layer, Backfill strength

0 引言

充填采矿法作为矿山深部开采的关键技术之一,在复杂矿体的开采中发挥着重要作用[1]。其中,下向进路式充填采矿法被广泛用于开采围岩与矿体稳定性差、矿石价值高的矿体[2-3]。胶结充填体作为进路回采的顶板,其强度的合理性不仅关乎矿山充填成本,还直接决定着井下回采作业的安全[4-5]。

* **收稿日期**:2024-12-17
基金项目:云南省基础研究专项-青年项目(202301AU070185)
作者简介:郑聪(1997—),男,云南昭通人,硕士,主要从事现代采矿理论与技术研究。E-mail:zhengcong@stu.kust.edu.cn
通信作者:乔登攀(1969—),男,甘肃白银人,博士,教授,主要从事现代采矿工艺及理论研究。E-mail:1215550723@qq.com

巷道围岩应力分布极大影响了顶板的稳定性。20 世纪 50 年代,MUSKHELISHVILI[6] 利用复变函数提出了求解非圆形孔口问题的原理及一般解法。刘洪涛等[7] 通过正交数值模拟试验、讨论了围岩强度、埋深、断面形状、高宽比及侧压系数 5 种因素对巷道围岩稳定性的影响,研究了椭圆形巷道与矩形巷道围岩的应力演化规律,分析得到巷道高宽比较优方案,设计了圆角矩形巷道。杨宁等[8] 基于复变函数理论,分析了矩形巷道不同埋深、不同宽高比及不同围岩力学参数下围岩应力分布特征,提出了针对顶板与巷帮的支护优化方案。此外,薄板理论与中厚板理论也被众多学者用于充填顶板的设计。杨胜利等[9] 以赵固二矿为背景,基于 Reissner 中厚板理论、PFC3D 数值模拟与工程实测等手段,研究顶板在动载冲击下的变形、应力特征及破坏模式,提出了动载作用下顶板控制方法。王俊等[10] 基于厚板理论提出了下向充填假顶的强度模型,通过该模型计算强度,推荐相应充填配合比,并在矿山进行了实践应用。陈庆港等[11] 考虑顶板岩层的分层特性,根据 Reissner 厚板理论建立了互层顶板应力计算模型,得到了不同条件下互层顶板应力规律及其变形破坏特征。周玉成等[12] 通过薄板理论计算出了下向进路人工假顶的合适厚度及强度。李启月等[13] 为保证采空区顶板安全,利用弹性薄板理论推导了顶板护顶层安全厚度计算式。

上述研究大多是通过分析巷道围岩应力对巷道或顶板进行支护,鲜有通过围岩应力分布直接对顶板充填体进行设计的研究。此外,对顶板的分析主要是通过中厚板理论与薄板理论建立计算模型,并分析其稳定性。本文从巷道围岩应力分布规律出发,分析进路开采围岩情况,考虑充填体承载层与接顶层强度差异,分别对承载层与接顶层强度进行设计,并借助工程应用验证设计的合理性。

1 矩形巷道围岩应力解析

1.1 矩形巷道力学模型

矩形巷道开挖完成后,巷道周边围岩原有应力平衡被破坏,其应力会调整至新的平衡状态[14-15]。巷道在无支护条件下,周边围岩的所处空间可看作无限大区域,建立的矩形巷道力学计算模型如图 1 所示。其中,巷道宽与高分别为 $2a$、$2b$,σ_v 为巷道所受垂直应力,σ_h 为巷道所受水平应力。

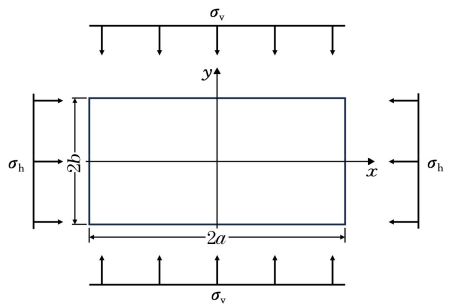


图 1 矩形巷道力学模型

Fig.1 Mechanical model of rectangular roadway

1.2 巷道围岩应力解析

由弹性力学理论[16] 可知,复变函数求解矩形巷道围岩应力的表达式在极坐标系下可表示为:

$$\begin{cases}\sigma_\theta+\sigma_\rho=2[\Phi(\zeta)+\overline{\Phi(\zeta)}]=4\mathrm{Re}[\Phi(\zeta)]\\ \sigma_\theta-\sigma_\rho+2i\tau_{\rho\theta}=\dfrac{2\zeta^2}{\rho^2\,\overline{\omega'(\zeta)}}\cdot\\ \quad[\overline{\omega(\zeta)}\Phi'(\zeta)+\omega'(\zeta)\Psi(\zeta)]\end{cases}\tag{1}$$

其中:

$$\begin{cases}\varphi_1(\zeta)=\varphi(z)=\varphi[\omega(\zeta)]\\ \psi_1(\zeta)=\psi(z)=\psi[\omega(\zeta)]\\ \Phi(\zeta)=\varphi'(z)=\varphi'_1(\zeta)/\omega'(\zeta)\\ \Psi(\zeta)=\psi'(z)=\psi'_1(\zeta)/\omega'(\zeta)\end{cases}\tag{2}$$

式中:σ_θ、σ_ρ 与 $\tau_{\rho\theta}$ 为极坐标下弹性体的应力分量,ρ 为极径,θ 为极角,通过保角映射与 z 平面的物理区域关联;Re 表示复变函数的实部;i 为虚数单位;$\Phi(\zeta)$、$\Psi(\zeta)$ 为辅助复变函数;$\omega(\zeta)$ 为保角映射函数;$\varphi(z)$、$\psi(z)$ 为与复变量 z 相关的解析函数;$\varphi_1(\zeta)$、$\psi_1(\zeta)$ 为由 $z=\omega(\zeta)$ 推导得到的辅助解析函数;"′" 表示函数的一阶导数;上标"—" 表示函数的共轭。

取 $Z=\omega(\zeta)$ 前 3 项进行计算,可满足矩形巷道映射精度[17-19],则:

$$Z=\omega(\zeta)=R(\zeta^{-1}+c_1\zeta+c_3\zeta^3)\tag{3}$$

式中:R、$c_i(i=1,2,3)$ 均为实数,与矩形巷道宽高比有关。

对于矩形巷道的平面应变问题,解析函数表达式为:

$$\begin{cases}\varphi_1(\zeta)=\dfrac{1+\mu'}{8\pi}(A_x+iB_y)\ln\zeta+C\omega(\zeta)+\varphi_0(\zeta)\\ \psi_1(\zeta)=\dfrac{\mu'-3}{8\pi}(A_x-iB_y)\ln\zeta+\\ \quad(C'+iD')\omega(\zeta)+\psi_0(\zeta)\end{cases}\tag{4}$$

$$\begin{cases}\varphi_0(\zeta)=\dfrac{1}{2\pi i}\left[\displaystyle\int_r^{\infty}\frac{f_0}{r-\zeta}\mathrm{d}r-\int_r^{\infty}\frac{\omega(r)}{\omega'(r)}\frac{\overline{\varphi'_0(\zeta)}}{r-\zeta}\mathrm{d}r\right]\\ \psi_0(\zeta)=\dfrac{1}{2\pi i}\left[\displaystyle\int_r^{\infty}\frac{\overline{f_0}}{r-\zeta}\mathrm{d}r-\int_r^{\infty}\frac{\overline{\omega(r)}}{\omega'(r)}\frac{\varphi'_0(\zeta)}{r-\zeta}\mathrm{d}r\right]\end{cases}\tag{5}$$

其中:

$$C=\frac{\sigma_x^{\infty}+\sigma_y^{\infty}}{4},C'=\frac{\sigma_y^{\infty}-\sigma_x^{\infty}}{2},$$

$$D'=\tau_{xy}^{\infty},\mu'=\frac{\mu}{1-\mu}\tag{6}$$

式中:A_x、B_y 分别为巷道边界沿 x、y 方向上力的合力;C、$C'+iD'$ 为远场边界条件;σ_x^{∞}、σ_y^{∞}、τ_{xy}^{∞} 为弹性体远场应力;μ 为巷道围岩的泊松比;r 为复变量 ζ 位于矩形巷道边界时的值。

f_0 是为了计算方便引入的一个符号,因无支护阻力,故巷道 x、y 方向边界处的分布面力为零,则 f_0 可表示为:

$$f_0=i\int_M^N(X+iY)\mathrm{d}s-\frac{A_x+iB_y}{2\pi}\ln r-\frac{1+\mu'}{8\pi}(A_x-iB_y)\frac{\omega(r)}{\overline{\omega'(r)}}r-2C\omega(r)-(C'-iD')\overline{\omega(r)}\tag{7}$$

其中:

$$c_1=\cos 2k\pi,c_3=-\frac{1}{6}\sin^2 2k\pi\tag{8}$$

式中:M、N 分别为巷道边界上的初始积分位置与不同于初始位置的任意一点;s 为 M 点沿边界到 N 点的弧长;X、Y 分别为 x、y 方向边界处的分布面力;k 是与矩形巷道宽高比相关的系数。

将式(2)至式(8)代入式(1),可求解得到相应矩形巷道围岩的应力分量。

2 承载层与接顶层充填体强度分析

2.1 进路充填体受力分析

由下向分层进路式充填采矿法回采工艺可知,在同一水平分层内,为了便于施工作业,矩形回采进路通常按照相同尺寸进行划分布置,进路开挖及充填按照"间隔开采、采一充一"的方式进行。上下两个相邻分层进路垂直交错布置,回采下分层进路时,可使上分层同一进路暴露面积最小[20]。充填分为两步骤进行,一步骤采用较高强度充填体作为承载层,二步骤采用较低强度充填体充满进路作为接顶层,尽可能减少水泥胶凝材料的使用,进而降低充填作业的成本。

下向矩形进路回采结构如图 2 所示。矩形进路布置方式为"隔一采一",进路宽度为 $2a'$,采高为 $2b'$。充填体接顶层与承载层高度分别为 h_1、h_2,所受上覆均布载荷为 q。

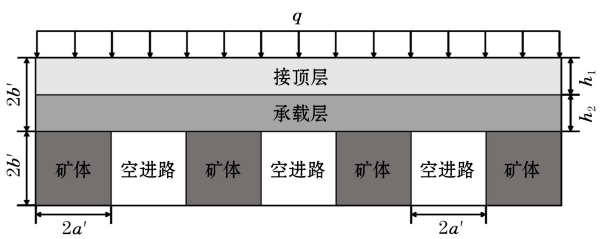
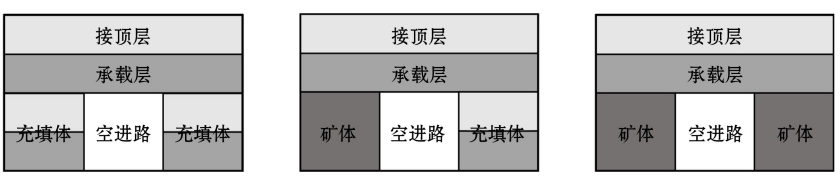


图 2 下向矩形进路回采结构

Fig.2 Mining structure of downward rectangular drift

下向进路充填采矿法中,进路开挖通常存在如图 3 所示的 3 种情况。



(a) 进路两侧均为充填体 (b) 进路两侧为矿体和充填体 (c) 进路两侧均为矿体

图 3 进路开挖两侧围岩情况

Fig.3 Surrounding rock conditions on both sides of drift excavation

进路两侧均为充填体时,充填体强度的合理设计起着至关重要的作用。此外,两侧充填体的接顶情况还直接影响了顶板的稳定性,是进路安全回采作业的前提。因此,本文考虑在进路两侧均为充填体的情况下,对充填体承载层与接顶层的强度进行设计。

2.2 充填体力学参数

矩形巷道宽高比与侧压系数均对围岩应力分布规律影响较大。在矩形进路两侧均为充填体的情况下,求出充填体侧压系数,即可得到该侧压系数下不同宽高比的围岩应力解析值。本文拟通过充填体单轴压缩变形试验及剪切强度试验,求解充填体的弹

性模量、泊松比、黏聚力及内摩擦角等参数,进而得出充填体侧压系数。

2.2.1 试验材料分析

试验尾砂为矿山充填站所用充填料,胶凝材料为普通硅酸盐水泥,水为实验室自来水。测量得到的尾砂平均密度为 2.94 g/cm^3,采用 BT-9300ST 激光粒度仪对尾砂粒径分布情况进行分析,结果如图 4 所示。

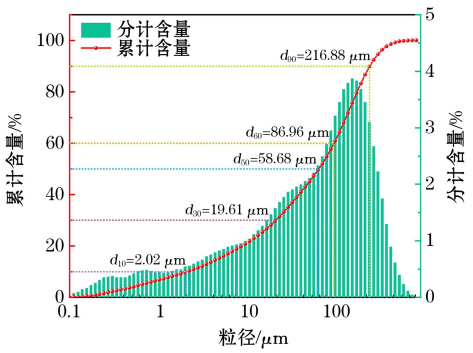


图 4 尾砂粒径分布曲线

Fig.4 Particle size distribution curve of tailings

由图 4 可知,尾砂中值粒径 d_{50}=58.68 μm,其累计含量小于 10%、30%、60%和 90%的颗粒粒径依次为 2.02 μm、19.61 μm、86.96 μm 和 216.88 μm。尾砂不均匀系数 C_u 与曲率系数 C_c 可利用下式进行计算。

$$\begin{cases} C_u = d_{60}/d_{10} \\ C_c = d_{30}^2/(d_{60}\cdot d_{10}) \end{cases} \tag{9}$$

通过计算可得到尾砂不均匀系数与曲率系数分别为 43.05 和 2.19,试验所用尾砂粒径分布较广泛,且具有较好的级配。

2.2.2 试验测试方法与结果

(1) 单轴压缩变形试验。

以矿山充填站使用的充填配比为基础,采用标准圆柱体试验模具,制备直径为 50 mm、高度为 100 mm 的充填体进行单轴压缩变形试验。充填体固结 1 d 脱模,将试件置于(20±2)℃与(95±5)%的恒温、恒湿环境下养护 28 d。为得出承载层与接顶层充填体的力学差异,制备灰砂比为 1∶4 的试件进行试验,充填体试件制备流程如图 5 所示。

加载试验设备为 YAW4206T 微机控制电液伺服压力试验机,加载速率为 0.5 kN/s,压缩过程中,数据由外参数采集器自动采集并通过计算机进行输出,加载测试系统如图 6 所示。

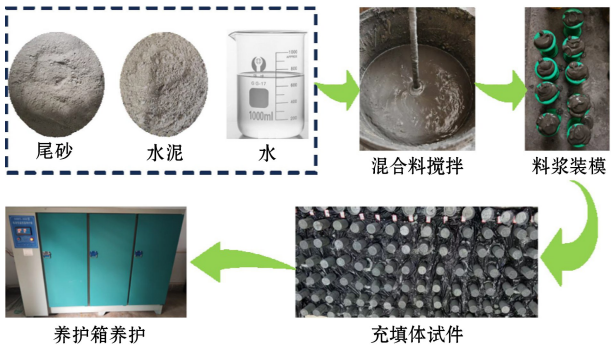


图 5 充填体试件制备流程

Fig.5 Preparation process of specimens for backfill

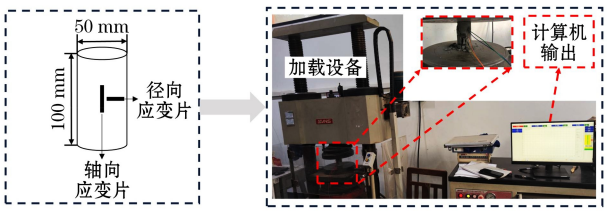
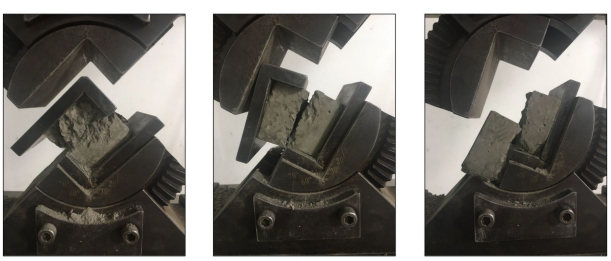


图 6 加载测试系统

Fig.6 Loading test system

(2) 剪切强度试验。

充填体剪切强度试验所用配比与单轴压缩变形试验一致,试件制备流程与图 5 相同,剪切试件由圆柱体变为立方体,尺寸为长×宽×高为 70 mm×70 mm×70 mm。试验过程中,通过试验机调整剪切角度分别为 45°、60°和 70°进行加载,从而分析充填体在不同剪切力下的黏聚力与内摩擦角。充填体在不同剪切角度下的剪切强度试验如图 7 所示。



(a) 剪切角 45° (b) 剪切角 60° (c) 剪切角 70°

图 7 充填体剪切强度试验

Fig.7 Shear strength tests of backfill

(3) 试验结果。

通过充填体单轴压缩变形试验及剪切强度试验,得出灰砂比为 1∶4 的试件的弹性模量、泊松比等力学参数,充填体力学参数见表 1。

表 1 充填体力学参数

Table 1 Mechanical parameters of backfill

质量浓度/%	灰砂比	弹性模量/GPa	泊松比	黏聚力/MPa	内摩擦角/(°)
76	1∶4	0.67	0.33	1.50	45

2.2.3 充填体侧压系数

针对充填体侧压系数的确定方法,众多学者开展了研究。LI 等[21]对前人的研究进行总结,提出了普适性更强的侧压系数计算表达式:

$$\lambda=\lambda_0+\frac{2c}{\sigma_h}\tan\alpha=\frac{\sigma'_v}{\sigma'_h} \tag{10}$$

式中:c 为充填体黏聚力;σ'_v、σ'_h分别为充填体的垂直应力与水平应力;λ_0、α 为与充填体状态有关的参数,可通过表 2 进行计算。

表 2 不同充填体状态下力学参数计算

Table 2 Calculation of mechanical parameters under different backfill conditions

充填体状态	λ_0	α
静止状态	$1-\sin\varphi$	0
主动状态	$(1-\sin\varphi)/(1+\sin\varphi)$	$(\varphi/2)-45°$
被动状态	$(1+\sin\varphi)/(1-\sin\varphi)$	$(\varphi/2)+45°$

注:表中 φ 为充填体材料的内摩擦角。

不同采场结构下,充填体应力状态存在差异,因此在进行侧压系数计算时应予以考虑。TING 等[22]通过室内相似模型试验,得出竖直采场与倾斜采场的充填体应力状态分别接近静止状态和主动状态,采场结构如图 8 所示。

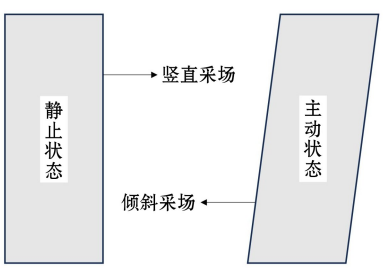


图 8 采场结构

Fig.8 Stope structure

本文计算侧压系数以下向分层进路两侧充填体为研究对象,因此可将充填体应力状态近似为静止状态,其侧压系数可根据式(11)进行计算,充填体侧压系数计算结果见表 3。

$$\lambda=\lambda_0=1-\sin\varphi \tag{11}$$

表 3 充填体侧压系数计算结果

Table 3 Calculation result of lateral pressure coefficient of backfill

灰砂比	内摩擦角 φ/(°)	侧压系数 λ
1∶4	45	0.29

2.3 承载层与接顶层强度设计

基于充填体侧压系数计算值,结合 1.2 节复变函数理论进行承载层与接顶层充填体强度设计。承载层与接顶层充填体以灰砂比 1∶4 所得侧压系数计算矩形巷道围岩应力,此外,鉴于矿山掘进巷道宽高比多采用 1.0 及施工便利等因素,计算时固定矩形巷道宽高比为 1.0。

2.3.1 矩形巷道围岩应力

以矩形巷道宽高比为 1.0(3.0 m×3.0 m),侧压系数 λ 为 0.29,利用 MATLAB 软件计算巷道周边围岩应力,绘制出矩形巷道断面应力分布图,如图 9 所示,图中,45°~135°为巷道底板位置,135°~225°为巷道左帮位置,225°~315°为巷道顶板位置,315°~45°为巷道右帮位置。

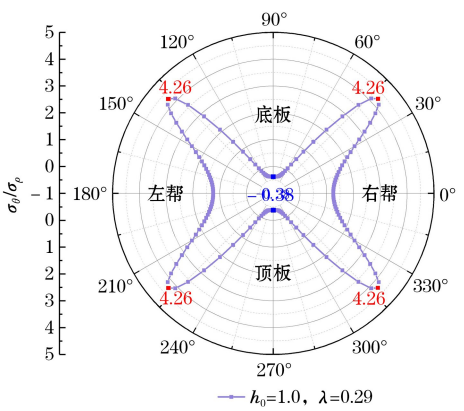


图 9 矩形巷道断面应力分布

Fig.9 Stress distribution of rectangular roadway section

2.3.2 承载层与接顶层强度设计

在图 9 中,巷道围岩在顶底板中心范围内出现了拉应力集中区,拉应力最大值为 $0.38\sigma_v$。侧帮围岩均表现为压应力,压应力最大值为 $4.26\sigma_v$。在矿石回采过程中,承载层主要作为下分层巷道掘进的顶板,在垂直应力与水平应力的共同作用下,易出现拉应力集中,从而导致顶板围岩自下而上出现拉裂破坏。因此,在设计承载层充填体强度时,应以顶板拉应力极值进行相应计算。

在下向分层充填采矿法中,进路接顶层充填体位于承载层之上,可起到封闭采空区、防止围岩崩落的作用。然而,接顶层配比通常低于承载层,其强度

也相对较低。在井下采矿活动中,接顶层充填体多是服务于同一分层相邻进路开采,在进路掘进过程中要确保侧帮不发生垮塌。因此,接顶层充填体主要受侧帮围岩应力的作用,在设计其强度时,应考虑侧帮极值应力进行计算。

计算充填体强度之前,需先确定其上覆载荷的大小,取矿山实测充填体上覆最大载荷 $\sigma_v=0.45$ MPa,则承载层与接顶层充填体强度计算式如下:

$$\sigma_t=f\cdot\sigma_{\theta,拉},\sigma_c=f\cdot\sigma_{\theta,压} \tag{12}$$

式中:σ_t 为承载层抗拉强度,MPa;σ_c 为接顶层抗压强度,MPa;f 为设计安全系数,取 1.5。

将矩形巷道顶板拉应力最大值 $0.38\sigma_v$、侧帮压应力最大值 $4.26\sigma_v$ 及 $\sigma_v=0.45$ MPa 分别代入式(12)进行计算,得出承载层抗拉强度 $\sigma_t=0.26$ MPa,接顶层充填体抗压强度 $\sigma_c=2.88$ MPa。

3 工程实例

云南某金属矿山井下采用下向水平分层进路式充填采矿法回采矿体,矩形进路回采方式为"隔三采一",统一使用普遍硅酸盐水泥作为胶凝材料进行充填。试验采场距离地表约 300 m,矩形进路宽度为 3.0 m,分层高度为 3.0 m,充填料浆尾砂为选矿尾砂,承载层充填后,根据接顶层所需强度改变配比充填采场。试验采场参数见表 4。

表 4 试验采场参数

Table 4 Test stope parameters

回采进路宽度 $2a$/m	回采进路高度 $2b$/m	承载层抗拉强度 σ_t/MPa	接顶层抗压强度 σ_c/MPa
3.0	3.0	0.26	2.88

矿山原充填参数如下:承载层采用灰砂比为 1∶4 的充填体充填 1.5 m,接顶层充填体灰砂比为 1∶8。承载层与接顶层充填体的 28 d 抗压强度分别不小于 8 MPa、5 MPa。充填成本为 118 元/m^3,年充填量为 15.5 万 m^3,年充填费用为 1 829 万元。

根据表 4 相应参数制备充填料浆进行充填,设计完成了 15 条进路 4 344 m^3 的充填量,在同一分层相邻进路及下分层进路回采与充填过程中,未出现充填体侧向垮塌及顶板大变形、冒落等安全事故,设计充填体稳定性良好。现场工业应用效果如图 10 所示。

相较于使用矿山原充填参数,使用本文所设计的充填参数,可节约成本 36 元/m^3,试验采场共节约充填成本 15.64 万元。据此,预计可为矿山节约充填成本 558 万元/a。

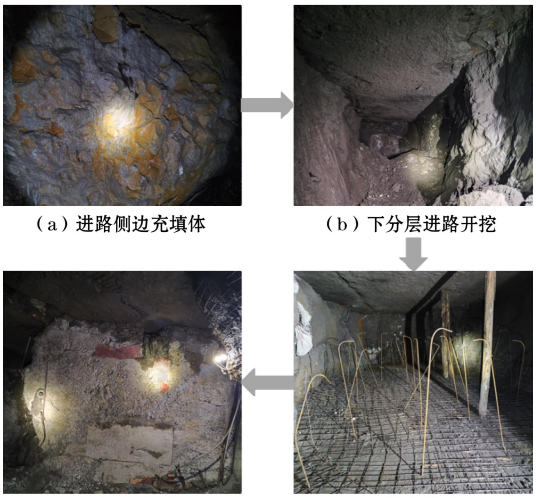


图 10 现场工业应用

Fig.10 Field industrial application

4 结论

(1) 基于复变函数解析了矩形巷道围岩应力,并对下向进路充填体受力进行了分析,按照进路两侧均为充填体的情况,设计承载层与接顶层的强度。

(2) 结合单轴压缩变形试验与剪切试验,得出充填体的弹性模量、泊松比、黏聚力与内摩擦角等参数,并计算出充填体的侧压系数为 0.29。

(3) 分析了矩形巷道宽高比为 1.0、侧压系数为 0.29 时围岩应力分布情况,在考虑安全系数为 1.5 的情况下,分别通过顶板拉应力极值与侧帮压应力极值确定承载层与接顶层充填体的强度。

(4) 根据理论计算结果,在云南某金属矿山进行了现场工业应用,试验采场在相邻进路与下分层进路开挖充填过程中,均未出现充填体垮塌破坏,预计可为矿山节约充填成本 558 万元/a。

参考文献(References):

[1] 李广波,盛宇航,吴再海,等.基于断层影响下的充填体强度需求优化研究[J].有色金属科学与工程,2023,14(5):684-691.
LI Guangbo, SHENG Yuhang, WU Zaihai, et al. Research on strength requirement optimization of infill bodies under the influence of faults[J]. Nonferrous Metals Science and Engineering,2023,14(5):684-691.

[2] 朱斌,高通,涂艾林,等.下向进路倾斜分层胶结充填体稳定性研究[J].矿业研究与开发,2024,44(1):1-12.
ZHU Bin, GAO Tong, TU Ailin, et al. Study on stability of inclined layered cemented backfill in downward drift[J]. Mining Research and Development,2024,44(1):1-12.

[3] 薛田喜,常洋凯.中厚倾斜破碎矿体下向进路法开采工艺及稳定性研究[J].矿业研究与开发,2023,43(6):15-21.
XU Tianxi, CHANG Yangkai. Study on mining technology and stability of downward filling mining method for medium-thick inclined broken ore body[J]. Mining Research and Development,2023,43(6):15-21.

[4] 薛希龙,孙鹏程,武拴军,等.粗骨料纤维充填体的力学特性与能量损伤演变规律[J].中国有色金属学报,2024,34(7):2476-2490.
XUE Xilong, SUN Pengcheng, WU Shuanjun, et al. Mechanical properties and energy damage evolution law of coarse aggregate fiber backfill[J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals,2024,34(7):2476-2490.

[5] 林强,管华栋,王观石,等.基于超声横波测试的 Na 基膨润土充填体强度预测模型研究[J].矿业科学学报,2024,9(3):426-434.
LIN Qiang, GUAN Huadong, WANG Guanshi, et al. Research on the strength prediction model of Na based bentonite filling body based on ultrasonic transverse wave testing[J]. Journal of Mining Science and Technology,2024,9(3):426-434.

[6] MUSKHELISHVILI N I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity[M]. Groningen:Noordhoff,1953.

[7] 刘洪涛,周光东,韩子俊,等.多因素影响下巷道围岩稳定性分析及优化设计研究[J].矿业科学学报,2024,9(4):504-518.
LIU Hongtao, ZHOU Guangdong, HAN Zijun, et al. Stability analysis and optimization design of roadway surrounding rock under multiple factors[J]. Journal of Mining Science and Technology,2024,9(4):504-518.

[8] 杨宁,赵美霞,黄玉兵.深井矩形巷道围岩应力分布规律及支护优化[J].采矿与岩层控制工程学报,2023,5(6):43-52.
YANG Ning, ZHAO Meixia, HUANG Yubing. Stress distribution and support optimization of the surrounding rock of deep rectangular roadways[J]. Journal of Mining and Strata Control Engineering,2023,5(6):43-52.

[9] 杨胜利,岳豪,唐岳松,等.基于中厚板理论的顶板断裂失稳规律研究[J].岩石力学与工程学报,2024,43(9):2092-2107.
YANG Shengli, YUE Hao, TANG Yuesong, et al. Study on the characteristics of roof fracture instability based on the theory of medium thick plate[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering,2024,43(9):2092-2107.

[10] 王俊,乔登攀,李广涛,等.基于厚板理论下向进路充填假顶强度模型及应用[J].煤炭学报,2023,48(增刊 1):28-36.
WANG Jun, QIAO Dengpan, LI Guangtao, et al. Strength model and its application of downward drift filling roof based on thick plate theory[J]. Journal of China Coal Society,2023,48(Suppl.1):28-36.

[11] 陈庆港,左宇军,林健云,等.互层岩体中巷道顶板应力分布及破坏特征研究[J].地下空间与工程学报,2022,18(2):513-521.
CHEN Qinggang, ZUO Yujun, LIN Jianyun, et al. Study on stress distribution and failure characteristics of roadway roof in alternant strata[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering,2022,18(2):513-521.

[12] 周玉成,刘立顺,万串串.下向进路充填采矿法人工假顶优化研究与应用[J].矿业研究与开发,2023,43(3):53-58.
ZHOU Yucheng, LIU Lishun, WAN Chuanchuan. Research and application of artificial false roof optimization in downward drift filling mining method[J]. Mining Research and Development,2023,43(3):53-58.

[13] 李启月,黄海仙,魏新傲,等.混合边界护顶层力学模型及应用[J].中国有色金属学报,2024,34(3):984-996.
LI Qiyue, HUANG Haixian, WEI Xin'ao, et al. Mechanical model and application of mixed boundary protection roof[J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 2024, 34(3): 984-996.

[14] 王志强,黄鑫, 武超,等.基于复变函数理论的巷道围岩稳定性分析[J].煤炭科学技术,2022,50(4):58-66.
WANG Zhiqiang, HUANG Xin, WU Chao, et al. Stability analysis of roadway surrounding rock based on complex variable function theory[J]. Coal Science and Technology, 2022,50(4):58-66.

[15] 李元辉,刘明飞,李坤蒙,等.矩形采场支护作用下围岩周边应力复变函数解析解[J].金属矿山,2021(4):20-26.
LI Yuanhui, LIU Mingfei, LI Kunmeng, et al. Analytical solution of complex function of surrounding rock stress under supporting action of rectangular stope[J]. Metal Mine,2021(4):20-26.

[16] 徐芝纶.弹性力学[M].北京:高等教育出版社,2016.
XU Zhilun. Theory of elasticity[M]. Beijing: Higher Education Press,2016.

[17] 咎超宇,张国恩,史洪恺,等.矩形巷道围岩应力的分布规律与实例分析[J].煤炭科学技术,2022,50(增刊 1):112-118.
ZAN Chaoyu, ZHANG Guoen, SHI Hongkai, et al. Distribution law and case analysis of surrounding rock stress in rectangular roadway[J]. Coal Science and Technology, 2022,50(Suppl.1):112-118.

[18] 耿继原,唐治,朱小景,等.基于矩形巷道应力特征点的空间数据分析[J].安全与环境学报,2016,16(5):158-163.
GENG Jiyuan, TANG Zhi, ZHU Xiaojing, et al. Spatial data analysis based on the rectangular tunnel roadway stress feature points[J]. Journal of Safety and Environment,2016, 16(5):158-163.

[19] 王妍.采场围岩应力及底板破坏深度弹性力学复变函数解[D].淮南:安徽理工大学,2019.
WANG Yan. Complex variable function solution of elasticity for stress of surrounding rock and depth of bottom failure in stope[D]. Huainan:Anhui University of Science & Technology,2019.

[20] 王晓军,郭鹏,黄惟盛,等.多因素组合影响下向进路充填顶板稳定性计算[J].岩土力学,2022,43(12):3453-3462.
WANG Xiaojun, GUO Peng, HUANG Weisheng, et al. Stability calculation of backfill roof in downward roadway under multifactor influence[J]. Rock and Soil Mechanics, 2022,43(12):3453-3462.

[21] LI L, AUBERTIN M, BELEM T. Formulation of a three dimensional analytical solution to evaluate stresses in backfilled vertical narrow openings[J]. Canadian Geotechnical Journal,2005,42(6):1705-1717.

[22] TING C H, SIVAKUGAN N, SHUKLA S K. Laboratory simulation of the stresses within inclined stopes[J]. Geotechnical Testing Journal,2012,35(2):280-294.