

含弱速度间断线特性的六方向三角网在边坡稳定性分析中的应用^①

余小军¹, 秦傲韩², 范佳志¹, 杨鹰², 杨峰², 赵炼恒²

(1.伊春鹿鸣矿业有限公司, 黑龙江 伊春 152500; 2.中南大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410075)

摘要: 针对上限有限元法中三节点三角形单元在边坡稳定性分析时存在的体积锁定问题, 从速度间断线与同处共轭三角形单元的力学等效效应出发, 提出一种含弱速度间断线特性的六方向三角网(P6), 并配合六节点三角形(T6)单元上限有限元法对边坡稳定性进行分析。结果表明: P6联合T6单元获得的边坡潜在滑动面清晰明确, 耗散能密度平滑过渡, 且随着网格密度增大, 弱速度间断线效应加强, 边坡稳定性系数 N_s 上限解精度提升; 考虑内摩擦角及边坡坡度等综合因素的影响, P6对应的 N_s 上限解均优于三方向三角网及Delaunay三角网。基于P6上限有限元法在单次计算框架内形成的均匀网格计算效果良好, 有利于强度折减上限分析等批处理运算方式, 亦可结合网格自适应扩展其应用范围。

关键词: 边坡稳定性; 网格划分; 三角网; 三角形单元; 上限有限元; 滑动面; 耗散能密度; 速度间断线

中图分类号: TD854

文献标志码: A

doi: 10.3969/j.issn.0253-6099.2025.03.007

文章编号: 0253-6099(2025)03-0044-08

Application of Six-Directional Triangular Mesh with Weak Velocity Discontinuity Line Characteristics in Slope Stability Analysis

YU Xiaojun¹, QIN Aohan², FAN Jiazhi¹, YANG Ying², YANG Feng², ZHAO Lianheng²

(1. Yichun Luming Mining Co., Ltd., Yichun 152500, Heilongjiang, China; 2. School of Civil Engineering, Central South University, Changsha 410075, Hunan, China)

Abstract: To address the issue of volumetric locking encountered in the slope stability analysis with three-node triangular elements in upper bound finite element method (UBFEM), a six-directional triangular mesh (P6) with weak velocity discontinuity line characteristics was proposed based on the mechanical equivalence effect between velocity discontinuity lines and conjugate triangular elements located in the same position. The P6 is utilized in conjunction with a six-node triangular (T6) element in UBFEM for slope stability analysis. The results show that the potential slip surface of the slope obtained using the P6 combined with T6 elements is clearly defined, with a smooth transition in dissipated energy density. As the mesh density increases, the effect of weak velocity discontinuity lines strengthens, leading to an improved accuracy in the upper bound solution of the slope stability coefficient (N_s). With the combined influences of factors such as the internal friction angle and slope gradient into consideration, the upper bound solutions of N_s obtained with P6 outperform those from three-directional triangular meshes and Delaunay triangular meshes. The uniform mesh generated by the P6 UBFEM in a single computational framework yields favorable results, facilitating batch processing operations such as strength reduction upper bound analysis. Additionally, its application scope can be extended by integrating it with adaptive mesh refinement techniques.

Key words: slope stability; mesh division; triangular mesh; triangular element; upper bound finite element; slip surface; dissipated energy density; velocity discontinuity line

^① 收稿日期: 2024-12-13

基金项目: 湖南省杰出青年基金(2021JJ10063); 伊春鹿鸣矿业有限公司科技项目[LM(2022)-F-045]; 中南大学中央高校基本科研业务费专项资金(2024ZZTS0752)

作者简介: 余小军(1975—), 男, 陕西渭南人, 高级工程师, 主要从事矿山资源研究。E-mail: 329983866@qq.com

通信作者: 杨峰(1981—), 男, 陕西西安人, 博士, 副教授, 主要从事岩土工程研究。E-mail: yf5754@csu.edu.cn

露天开采、尾矿堆积等工程常形成存在安全风险的陡峭边坡^[1-2],因此,有必要对此类边坡进行稳定性评估,以保障矿山安全生产。边坡稳定性评估数值计算方法逐渐多元化^[2-4]。其中塑性极限分析架构下的上限有限元法是开展露天矿/尾矿坝等边坡工程稳定性分析、潜在滑动面搜索的有力手段^[5],但上限有限元法存在体积锁定等缺陷。

已有研究表明,体积锁定引起的上限有限元法计算精度问题可采取以下措施进行改善:①应用高阶单元^[6-8];②增设速度间断线^[9-15];③优化网格拓扑结构等^[16-18]。在单元类型方面,相比三节点三角形(T3)单元的常应变率,六节点三角形(T6)单元的应变率和塑性乘子线性变化,适用于模拟滑动面/剪切带等应变率梯度较高的破坏现象^[6-8];而速度间断线因坐标相同节点与相邻单元表征的速度矢量并不连续,为滑动面等力学特性的模拟提供了有利条件^[7-10],因此,含速度间断线三角网的上限法在岩土稳定性问题的应用相当广泛^[9-16]。

除高阶单元和速度间断线外,网格拓扑结构对提升上限有限元法计算精度也有积极作用^[17-19]。实际上,速度间断线可视为一对共轭单元厚度压缩至极限的特殊形式^[15],若压缩尺度有限,则压缩范围内的一组三角形单元共同具有速度间断线的部分特性。因此,不含速度间断线三角网的网格结构优化及计算精度提升问题值得深入探讨。

本文针对边坡工程稳定性问题,重点考虑三角网拓扑结构等因素,在单次计算框架内,基于均布网格前提,探索T6的最优网格布局,特别提出一种具备弱速度间断线特性的六方向三角网(P6)及其构建方法,与三方向三角网(P3)及均匀Delaunay三角网进行对比分析,揭示综合因素影响下的上限解精度演化规律,为上限有限元法进行边坡稳定性极限分析等相关研究提供新视角。

1 六方向三角网构思

1.1 三节点三角形单元与速度间断线

一对共轭T3单元R和M,当单元厚度 δ 趋近于0时,与其方位相同的速度间断线具有力学等效关系^[17-18],等效关系图如图1所示。

按速度间断线局部坐标系 $t-n$,单元R内任一点的速度可表示为:

$$\mathbf{u}^R(t) = N^{(3)}(t) \cdot \mathbf{u}^R \quad (1)$$

式中: $N^{(3)}(t)$ 为三节点三角形单元形函数^[17]; \mathbf{u}^R 为三节点速度矢量, $\mathbf{u}^R = [u_t^R, u_n^R]^T$ 。

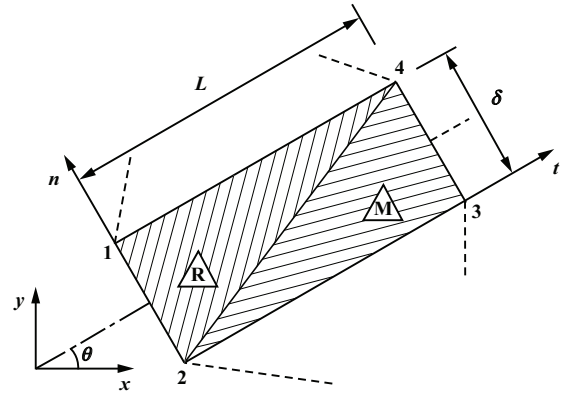


图1 T3单元与速度间断线等效关系图

Fig.1 Graph for equivalence relation between T3 element and velocity discontinuity line

由图1可知,当 δ 趋于0时,单元面积 A^R 亦趋于0,单元塑性应变率 ε^R 趋于无穷大,而 ε^R 与 A^R 之积可表示为:

$$\begin{cases} \varepsilon_t^R \cdot A^R = \frac{\partial u_t}{\partial t} \cdot A^R = \frac{1}{2} \delta (u_t^4 - u_t^1) = 0 \\ \varepsilon_n^R \cdot A^R = \frac{\partial u_n}{\partial n} \cdot A^R = \frac{1}{2} L (u_n^1 - u_n^2) = \frac{1}{2} L \Delta u_n^{12} \\ \gamma_m^R \cdot A^R = \left(\frac{\partial u_t}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \cdot A^R = \frac{1}{2} L (u_t^1 - u_t^2) = \frac{1}{2} L \Delta u_t^{12} \end{cases} \quad (2)$$

式中: ε_t^R 和 ε_n^R 分别为沿速度间断线的切向和法向塑性正应变率; γ_m^R 为塑性剪应变率。共轭单元M表达式同式(2)。将共轭单元R和M的内部耗散能求和:

$$\begin{aligned} D_{dis} &= \int_{AR} \sigma_R^T \varepsilon_R dA + \int_{AM} \sigma_M^T \varepsilon_M dA \\ &= \frac{1}{2} L (\sigma_n^R \Delta u_n^{12} + \tau_m^R \Delta u_t^{12} + \sigma_n^M \Delta u_n^{34} + \tau_m^M \Delta u_t^{34}) \end{aligned} \quad (3)$$

式中 σ_R^T 和 σ_M^T 分别为单元R和单元M与塑性应变率 ε_R 对应的应力。可以看出,当厚度 δ 趋于0时,按共轭单元导出的耗散能公式恰好与同处速度间断线耗散能公式^[17]完全一致,由此印证了T3单元与速度间断线之间的力学等效关系。

进一步推测,当 δ 值较小时,平行排列的单元组将呈现速度间断线的部分特征,称其为弱速度间断线特性。此外,式(3)源于T3单元,可推知T6单元也具有类似性质。

1.2 六方向三角网拓扑结构

对于含速度间断线三角网的上限法,文献[12]进一步提出节点可动的刚体平动运动单元计算思路,发现上限解精度依赖速度间断线的特定方位,且有效速

度间断线常呈现两向贯通滑移线网的特征。

同时考虑弱速度间断线特性及贯通式网状结构需求,提出一种规则六方向三角网拓扑结构。一个正三角形单元具备三个方向,当基本结构不断缩小尺寸并大范围规则布置时,将形成三方向通路,即 P3,如图 2(a)所示。进一步将正三角形沿形心一分为六,即形成 P6 基本结构,如图 2(b)所示。

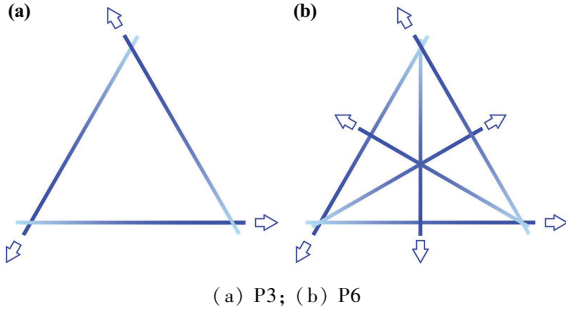
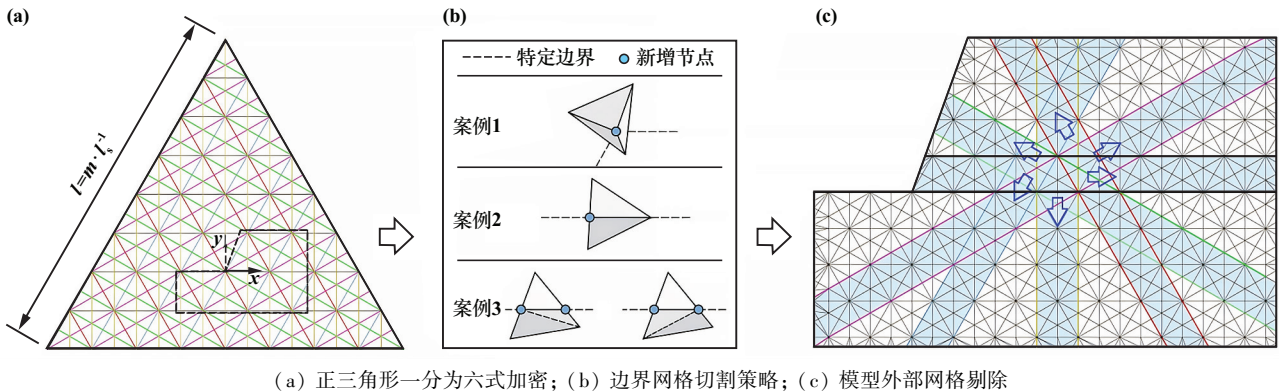


图 2 弱速度间断线三角网基本结构

Fig. 2 Basic structure of triangular mesh with weak velocity discontinuity line



(a) 正三角形一分为六式加密; (b) 边界网格切割策略; (c) 模型外部网格剔除

图 3 P6 生成流程

Fig. 3 Generation process of P6

2.2 边界网格切割

边坡模型边界需切割背景网格。

1) 边界特征点单元加密:两条及以上边界交点即为特征点,连接特征点与所处单元顶点[图 3(b)中案例 1]。

2) 过单元顶点切割:当跨界单元存在 1 个顶点位于特定边界时,则连接该顶点与边界交点[图 3(b)中案例 2]。

3) 不过单元顶点切割:若跨界单元无顶点位于边界上,连接既有顶点与两交点,将原有单元分割为三部分[图 3(b)中案例 3]。筛选两种情况下单元面积差异较小的一种。

网格切割完成后,剔除边坡模型外围无效单元[图 3(c)],形成适应模型边界的 P6。

2 六方向三角网生成

P6 生成流程如图 3 所示。

2.1 背景三角网构建

为生成适应边坡稳定性计算模型的 P6,首先需构建规则背景三角网。设置正三角形区域并完全覆盖计算模型,经多次一分为四式分裂加密形成背景三角网,其中区域边长 l 和最小正三角形单元边长 l_0 为主控指标,可用于调控网格密度。此外,边坡坡脚等关键点应与背景网格节点对齐。

终次加密时连接最小正三角形单元形心与顶点、各边中点,实现一次性一分为六式加密,即形成规则的 P6[图 3(a)]。从整体上看,该网格具备六方向通路,且随着网格密度增加,各通路内单元厚度减小,六方向上弱速度间断线特性显现。

需说明的是,若不进行终次一分为六式加密,则对应生成规则 P3。

3 六节点三角形单元上限有限元分析

1) 上限定理。依据塑性极限分析中的上限定理,在所有满足运动许可的速度场 u 中,极限荷载对应速度场的耗散能最小。

$$D_p = \int_V d_p(u) dV \leq W_{\text{ext}}(u) \quad (4)$$

式中: D_p 为计算域内的总塑性耗散能; $d_p(u)$ 为塑性耗散能函数;若边坡稳定性考虑自重作用, $W_{\text{ext}}(u)$ 为岩土体自重虚功率,不含其他荷载项。

2) 屈服准则与相关联流动法则。满足屈服条件的应力张量 σ 集合为:

$$F = \{\sigma: f(\sigma) \leq 0\} \quad (5)$$

式中: F 为屈服函数; $f(\sigma)$ 为屈服面。若岩土体服从 Mohr-Coulomb 屈服准则,相关联流动约束可表示为:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda} \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \cdot \omega \quad (6)$$

式中: $\dot{\lambda}$ 为塑性乘子, $\dot{\lambda} \geq 0$; $\omega = [\cos\alpha + \sin\varphi, \sin\varphi - \cos\alpha, 2\sin\alpha]^T$ 。

为形成计算效率更高的二阶锥规划模型,定义辅助变量 $\rho_1 = \cos\alpha\dot{\lambda}$, $\rho_2 = \sin\alpha\dot{\lambda}$, 则二者应满足如下约束^[20]:

$$\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2} \leq \dot{\lambda} \quad (7)$$

3) T6单元。图4为T6单元各节点上赋存的物理场量。与T3单元不同,T6单元塑性应变率 $\dot{\varepsilon}$ 及塑性乘子 $\dot{\lambda}$ 在单元内部线性变化^[8],但该单元对P3和P6等三角网计算精度的耦合影响仍有待深入探讨。

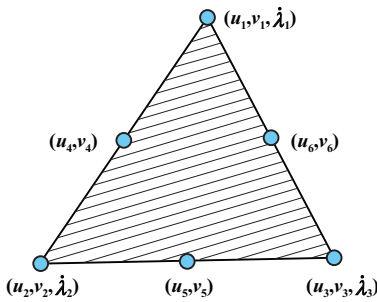


图4 T6单元各节点上赋存的物理场量

Fig. 4 Field variables assigned to each node of T6 element

模型总塑性耗散能为:

$$D_p = 2c\cos\varphi \sum_{k=1}^{n_e} \int_A \dot{\lambda} dA = \frac{2}{3}c\cos\varphi \sum_{k=1}^{n_e} \sum_{i=1}^3 \dot{\lambda}_{k,i} A_k \quad (8)$$

式中: c 和 φ 分别为黏聚力和内摩擦角; n_e 为单元总数; A_k 为第 k 个单元的面积; $\dot{\lambda}_{k,i}$ 为第 k 个单元第 i 个顶节点的塑性乘子。

单元 k 内部耗散能密度 $\bar{D}_{p,k}(x)$ 为:

$$\bar{D}_{p,k}(x) = \frac{dD_{p,k}}{dA} = 2c\cos\varphi \cdot \dot{\lambda}_k(x) \quad (9)$$

4) 上限有限元二阶锥规划模型。基于T6单元的边坡稳定性上限有限元分析涉及的优化变量为六节点速度 v 和顶点处塑性乘子 $\dot{\lambda}$,以及 $\dot{\lambda}$ 对应的辅助变量 ρ_1, ρ_2 。除相关联流动约束外,整个计算模型还应施加内部及边界速度约束条件,最终形成二阶锥规划问题,见式(10),具体细节可见文献^[20]。

$$\begin{cases} \min D_p \\ \mathbf{B}\mathbf{s} = 0 \\ \mathbf{C}\mathbf{s} = \mathbf{b} \\ \dot{\lambda} \geq \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2} \\ W_{\text{ext}}(u) = 1 \end{cases} \quad (10)$$

式中: \mathbf{B} 和 \mathbf{C} 为等式约束系数矩阵; \mathbf{s} 为未知变量向

量; \mathbf{b} 为等式约束右侧向量。

4 算例分析与讨论

4.1 边坡稳定性分析模型

假定岩土体为均质各向同性材料,建立边坡稳定性分析模型如图5所示^[8,20]。为方便建模,坐标原点选为坡脚左侧边界点处。岩土体内摩擦角 $\varphi = 15^\circ \sim 45^\circ$,黏聚力 $c = 1$ kPa,边坡坡度 $\beta = 30^\circ \sim 90^\circ$,坡高 $H = 10$ m,临界容重 γ_{cr} 作为目标函数通过优化得到,待求解的稳定性系数 $N_s = \gamma_{cr}H/c$,采用T6单元上限有限元法求解 N_s 及潜在滑动面。

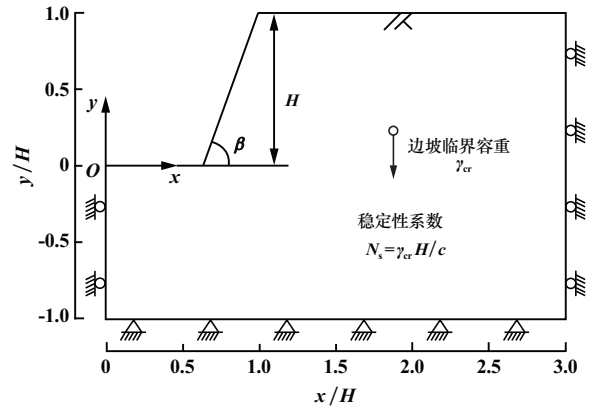


图5 边坡稳定性分析模型

Fig. 5 Slope stability analysis model

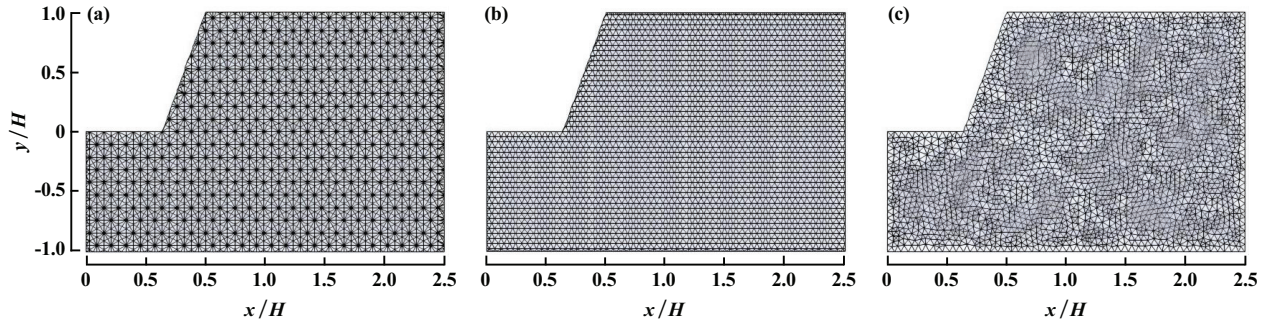
除P6和P3外,引入均匀Delaunay三角网作为对比,“均匀”特指模型中的单元尺度基本一致。Delaunay三角剖分是目前主流网格剖分方法,旨在评价单个三角形形状质量,以内切圆与外接圆半径比(r_{in}/r_{out})量化,其中正三角形($r_{in}/r_{out} = 0.5$)被视为最优形态^[21],缺点是无法满足特定单元集合的平行排列或特定方向贯通性排布等需求。

4.2 网格结构的影响

为清晰展示边坡稳定性模型的P6、P3和均匀Delaunay三角网结构特征,绘制稀疏网格条件下3种三角网格如图6所示,单元总数 $n_e \approx 5000$ 。

P6与P3于边坡模型内部形成规则的多方向通路,且得益于网格切割,边界位置亦维持背景网格结构。

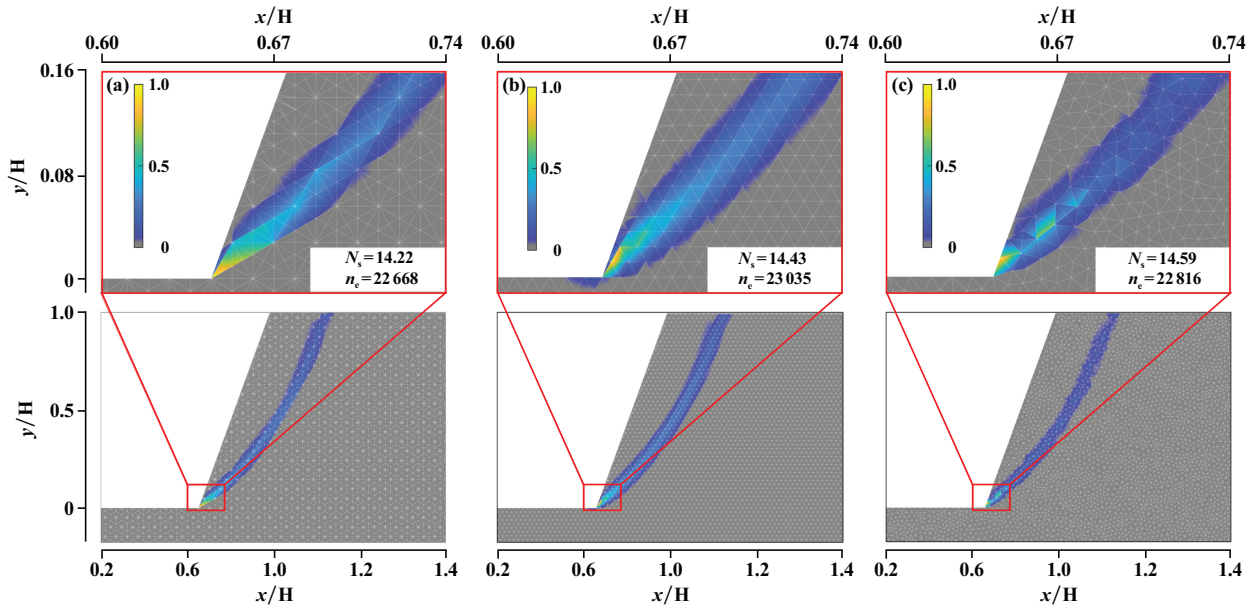
选取密集网格($n_e \approx 23000$),采用上限有限元法计算获得P6、P3及Delaunay三角网对应的边坡稳定性系数 N_s 上限解及潜在滑动面,如图7所示。图中采用归一化塑性耗散能密度表征边坡潜在滑动面,即 $\bar{D}_{p,k}(x)/\bar{D}_{p,\max}$ (取值范围0~1),其中 $\bar{D}_{p,\max}$ 为模型耗散能密度最大值。考虑T6单元 $\bar{D}_{p,k}(x)$ 数值线性变化特征, $\bar{D}_{p,k}(x)/\bar{D}_{p,\max}$ 云图以精准插值的方式显示。



(a) P6($n_e = 5\ 098$); (b) P3($n_e = 5\ 225$); (c) Delaunay 三角网($n_e = 5\ 160$)

图6 稀疏网格条件下3种三角网格

Fig.6 Three types of triangular meshes under sparse mesh conditions



(a) P6; (b) P3; (c) Delaunay 三角网

图7 边坡稳定性系数 N_s 上限解及潜在滑动面($\varphi = 35^\circ, \beta = 70^\circ$)

Fig.7 Upper bound solution of N_s and potential slip surface ($\varphi = 35^\circ, \beta = 70^\circ$)

由图7可知,P6、P3与Delaunay三角网 N_s 上限解分别为14.22、14.43和14.59,依上限定理, N_s 数值越小解答越优^[18]。因此,计算精度排序为:P6 > P3 > Delaunay三角网。

3种网格的耗散能密度较大区域均集中于边坡坡脚位置;Delaunay三角网的归一化耗散能密度分布存在光滑性、连续性差等特点,而P6与P3对应的耗散能密度于潜在滑动面范围内呈平滑过渡特征;此外,相比P3,P6耗散能密度较大值的分布范围更窄,说明P6模拟边坡滑动面的效果更佳。

4.3 单元总数 n_e 的影响

单元总数 n_e 也是影响上限有限元法计算精度的关键因素。选取内摩擦角 $\varphi = 35^\circ$ 、边坡坡度 $\beta = 70^\circ$, 设定单元总数 n_e 范围为3 000~50 000,3种网格对应

的 N_s 上限解曲线如图8所示。由图8可知,随着单元总数 n_e (或网格密度)增大,P6、P3与Delaunay三角网对应的 N_s 均不断减小。相比P3、Delaunay三角网,同等网

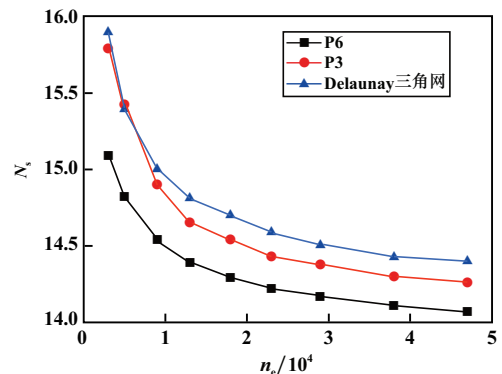


图8 3种网格对应的 N_s 上限解曲线

Fig.8 Upper bound solutions of N_s for three types of meshes

格密度条件下 P6 的 N_s 值更小,表明 P6 计算精度更高。 $n_e > 30\ 000$ 后,随着 n_e 持续增大,P6 的 N_s 值下降幅度大于 P3、Delaunay 三角网的 N_s 值下降幅度。

进一步绘制不同网格密度条件下 P6 的 $\bar{D}_{p,k}(x)/\bar{D}_{p,\max}$ 云图,如图 9 所示。随着单元总数 n_e 不断增大,

平行排列的网格间距不断减小,六方向弱速度间断线效应更加显著;以归一化耗散能密度 $\bar{D}_{p,k}(x)/\bar{D}_{p,\max}$ 表征的边坡潜在滑动面宽度更窄,对应的 N_s 值从 14.82 减小至 14.08,说明网格密度增加后,P6 对 T6 上限有限元具有良好的精度优势。

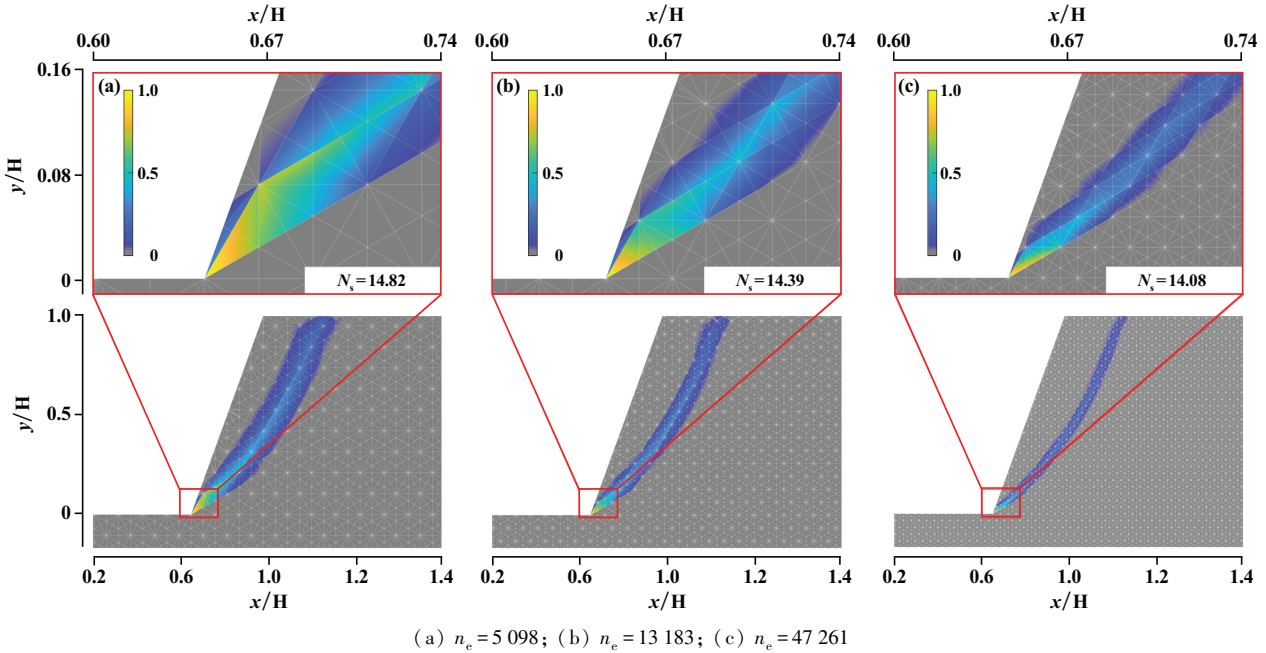


图9 不同网格密度条件下 P6 的 $\bar{D}_{p,k}(x)/\bar{D}_{p,\max}$ 云图

Fig.9 $\bar{D}_{p,k}(x)/\bar{D}_{p,\max}$ of P6 under different mesh density conditions

4.4 内摩擦角的影响

为探讨岩土体内摩擦角对 P6、P3 及 Delaunay 三角网计算精度的影响,设定内摩擦角 φ 为 $15^\circ \sim 45^\circ$,单元总数 n_e 为 23 000,边坡坡度 β 为 70° ,不同内摩擦角对应的稳定性系数 N_s 上限解见表 1。

表1 不同内摩擦角对应的稳定性系数 N_s 上限解

Table 1 Upper bound solutions of N_s with different internal friction angles

$\varphi/(^\circ)$	N_s 上限解		
	P6	P3	Delaunay 三角网
15	7.22	7.27	7.29
20	8.36	8.46	8.50
25	9.83	9.94	10.01
30	11.70	11.85	11.97
35	14.22	14.43	14.59
40	17.77	18.09	18.30
45	23.12	23.71	23.88

由表 1 可知,随着内摩擦角增大,P6、P3 与 Delaunay 三角网对应的 N_s 均增大,且同等条件下 P6 对应的 N_s

值更小,说明不同内摩擦角条件下,P6 计算精度仍具有优势。

进一步绘制 $\varphi = 15^\circ、30^\circ、45^\circ$ 对应的 P6 的 $\bar{D}_{p,k}(x)/\bar{D}_{p,\max}$ 云图,如图 10 所示。随着内摩擦角增大,边坡潜在滑动面逐渐向坡面方向移动,说明 P6 可较好地适应内摩擦角变化,耗散能密度平顺过渡。

4.5 边坡坡度的影响

为探讨边坡坡度对 P6、P3 及 Delaunay 三角网计算精度的影响,设定 β 为 $30^\circ、50^\circ、90^\circ$, φ 为 20° , n_e 为 23 000,不同边坡坡度对应的稳定性系数 N_s 上限解见表 2。由表 2 可知,随着边坡坡度逐渐增大,P6、P3 与 Delaunay 三角网对应的 N_s 值均减小,且 P6 的 N_s 值更小,说明不同边坡坡度条件下,P6 计算精度仍具有优势。

进一步绘制不同边坡坡度条件下 P6 对应的 $\bar{D}_{p,k}(x)/\bar{D}_{p,\max}$ 云图如图 11 所示。由图 11 可以看出,不同边坡坡度条件下,P6 对应的以耗散能密度表征的潜在滑动面均呈现出形态光滑、宽度狭窄等较优特性。

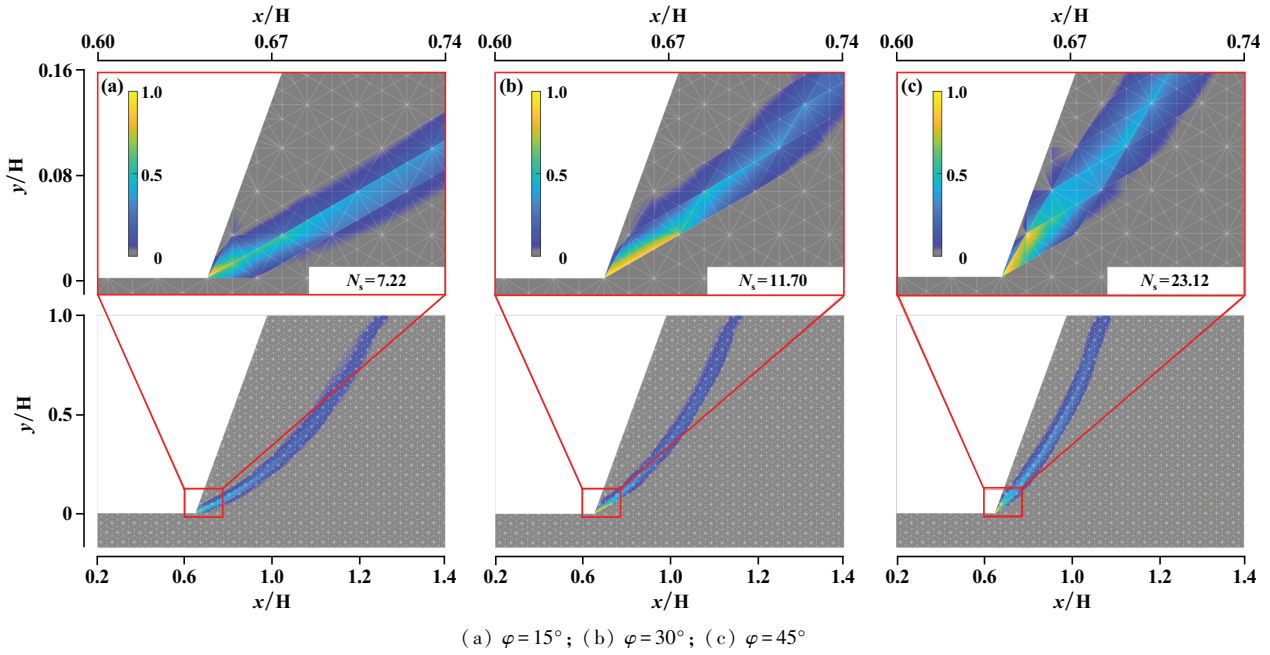


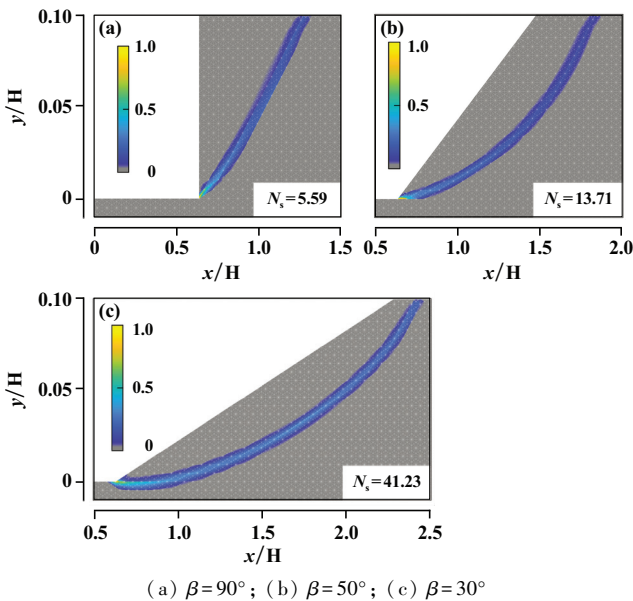
图 10 $\varphi = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ 对应的 P6 的 $\bar{D}_{p,k}(x)/\bar{D}_{p,max}$ 云图

Fig. 10 $\bar{D}_{p,k}(x)/\bar{D}_{p,max}$ distribution of P6 under conditions of different internal friction angles ($\varphi = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$)

表 2 不同边坡坡度对应的稳定性系数 N_s 上限解

Table 2 Upper bound solutions of N_s with different slope angles

$\beta/(\circ)$	N_s 上限解		
	P6	P3	Delaunay 三角网
30	41.23	41.99	41.89
50	13.71	13.87	13.94
70	8.36	8.46	8.50
90	5.59	5.63	5.63



(a) $\beta = 90^\circ$; (b) $\beta = 50^\circ$; (c) $\beta = 30^\circ$

图 11 不同边坡坡度条件下 P6 对应的 $\bar{D}_{p,k}(x)/\bar{D}_{p,max}$ 云图

Fig. 11 $\bar{D}_{p,k}(x)/\bar{D}_{p,max}$ distribution of P6 under conditions of different slope angles

5 结论

1) 针对边坡稳定性分析问题,提出一种具备弱速度间断线效应的六方向三角网(P6)构思及生成方法, P6 可在单次计算框架以及均布网格前提下达到较高计算精度,有助于批处理运算。

2) P6 联合 T6 单元,经上限有限元法计算获得的潜在滑动面清晰明确,且随着网格密度增大,弱速度间断线效应加强,边坡稳定性系数 N_s 上限解精度提升。

3) 进一步考虑内摩擦角与边坡坡度等参数,发现综合因素影响下,相比 P3 和 Delaunay 三角网,同等网格密度条件下 P6 对应的 N_s 上限解均具备较高的计算精度,印证了 P6 应用于边坡稳定性分析的计算优势。

4) P6 在计算域内均匀布置,存在一定程度的过度细化问题,可探索以耗散能密度或应变率梯度等指标进行网格自适应加密或稀疏,以此作为进一步提升的方向。

参考文献 (References):

[1] 王伟明,张诏飞. 高寒地区细粒尾矿堆坝方案研究[J]. 矿冶工程, 2024,44(3):11-15.
WANG Weiming, ZHANG Zhaofei. Scheme of fine-grained tailings dam in regions with high altitude and cold weather[J]. Mining and Metallurgical Engineering, 2024,44(3):11-15.

[2] 赵国彦,邹景煜,王猛. 基于混沌粒子群改进支持向量机对露天矿边坡稳定性的分类预测[J]. 矿冶工程, 2024,44(2):8-12.

- ZHAO Guoyan, ZOU Jingyu, WANG Meng. Classification and prediction of slope stability of open-pit mine with support vector machine based on chaotic particle swarm optimization[J]. *Mining and Metallurgical Engineering*, 2024,44(2):8-12.
- [3] 易红卫,樊陵皎,湛涛. 基于有限元分析的矿山边坡自动数值建模与分析研究[J]. *矿冶工程*, 2020,40(3):30-33.
- YI Hongwei, FAN Lingjiao, CHEN Tao. Automatic numerical modeling and analysis of mine slopes based on finite element analysis[J]. *Mining and Metallurgical Engineering*, 2020,40(3):30-33.
- [4] 李和志,林丽萍,段艳平.等. 某场地中部斜坡崩滑堆积体稳定性分析与评价[J]. *矿冶工程*, 2023,43(6):41-46.
- LI Hezhi, LIN Liping, DUAN Yanping, et al. Stability analysis and evaluation of accumulated debris after landslide in the middle site[J]. *Mining and Metallurgical Engineering*, 2023,43(6):41-46.
- [5] 郑颖人,赵尚毅,邓楚键.等. 有限元极限分析法发展及其在岩土工程中的应用[J]. *中国工程科学*, 2006(12):39-61.
- ZHENG Yingren, ZHAO Shangyi, DENG Chujian, et al. Development of finite element limit analysis method and its applications in geotechnical engineering[J]. *Engineering Science*, 2006(12):39-61.
- [6] ZHOU X W, LIU F T, JIN Y F, et al. A volumetric locking-free stable node-based smoothed finite element method for geomechanics[J]. *Computers and Geotechnics*, 2022,149:104856.
- [7] MAKRODIMOPOULOS A. A class of strain-displacement elements in upper bound limit analysis[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2022,123(16):3681-3712.
- [8] MAKRODIMOPOULOS A, MARTIN C M. Upper bound limit analysis using simplex strain elements and second-order cone programming[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2007,31(6):835-865.
- [9] 戴北冰,袁新,周锡文,等. 考虑间断速度场的光滑有限元极限分析上限法[J]. *岩土力学*, 2024,45(9):2849-2858.
- DAI Beibing, YUAN Xin, ZHOU Xiwen, et al. Upper bound limit analysis using smoothed finite element method considering discontinuous velocity field[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2024,45(9):2849-2858.
- [10] 王祖乐,孔德琼,杜越明,等. 岩土工程连续极限分析方法拓展与验证[J]. *岩土力学*, 2023,44(12):3531-3540.
- WANG Zule, KONG Deqiong, DU Yueming, et al. Extension and validation of sequential limit analysis for geotechnical problems[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2023,44(12):3531-3540.
- [11] TAN T Z, HUANG M S, SHI Z H. A perturbation method for upper bound analysis of stability of slopes based on rigid translational/rotational moving elements[J]. *Computers and Geotechnics*, 2023,161:105595.
- [12] YANG F, QIN A, ZHENG X, et al. Stability and failure mechanism of the tunnel face in nonhomogeneous clay with longitudinal slopes: A kinematic limit analysis[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2024,24(10):04024212.
- [13] SUN R, YANG J S, ZHAO Y D, et al. Upper bound finite element limit analysis method with discontinuous quadratic displacement fields and remeshing in non-homogeneous clays[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2021,91(3):1007-1020.
- [14] MAKRODIMOPOULOS A, MARTIN C M. Upper bound limit analysis using discontinuous quadratic displacement fields[J]. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2008,24(11):911-927.
- [15] KRABBENHOFT K, LYAMIN A V, HJIAJ M, et al. A new discontinuous upper bound limit analysis formulation[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005,63(7):1069-1088.
- [16] VALENTINO J, GILBERT M, GUEGUIN M, et al. Limit analysis of masonry walls using discontinuity layout optimization and homogenization[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2023,124(2):358-381.
- [17] SLOAN S W, KLEEMAN P W. Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1995,127(1/2/3/4):293-314.
- [18] SLOAN S W. Geotechnical stability analysis[J]. *Géotechnique*, 2013,63(7):531-571.
- [19] IZADI A, NALKIASHARI L A, PAYAN M, et al. Bearing capacity of shallow strip foundations on reinforced soil subjected to combined loading using upper bound theorem of finite element limit analysis and second-order cone programming[J]. *Computers and Geotechnics*, 2023,160:105550.
- [20] 孙锐,杨峰,阳军生,等. 基于二阶锥规划与高阶单元的自适应上限有限元研究[J]. *岩土力学*, 2020,41(2):687-694.
- SUN Rui, YANG Feng, YANG Junsheng, et al. Investigation of upper bound adaptive finite element method based on second-order cone programming and higher-order element[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2020,41(2):687-694.
- [21] ELSHAKHS Y S, DELIPARASCHOS K M, CHARALAMBUS T, et al. A comprehensive survey on Delaunay triangulation: Applications, algorithms, and implementations over CPUs, GPUs, and FPGAs[J]. *IEEE Access*, 2024,12:12562-12585.
- 引用本文:余小军,秦傲韩,范佳志,等. 含弱速度间断线特性的六方向三角网在边坡稳定性分析中的应用[J]. *矿冶工程*, 2025,45(3):44-51.
- YU Xiaojun, QIN Aohan, FAN Jiazhi, et al. Application of six-directional triangular mesh with weak velocity discontinuity line characteristics in slope stability analysis[J]. *Mining and Metallurgical Engineering*, 2025,45(3):44-51.