基于尖点突变理论的急倾斜厚大矿体回采矿柱稳定性分析及宽度优化①

杨秀福[1], 王沉[2], 陆浩成[1], 罗义[2], 李程[2], 王威[2]
(1.瓮福(集团)有限责任公司, 贵州 贵阳 550002; 2.贵州大学 矿业学院, 贵州 贵阳 550025)

摘 要: 针对尾砂充填体下急倾斜厚大磷矿体回采采场矿柱安全宽度留设问题,采用弹性力学理论构建了充填体下采场矿柱力学分析模型,计算得到充填体下矿柱承载的平均载荷,并采用顶板矿柱+采场矿柱的采场结构布置方案。利用尖点突变理论分析矿柱失稳的临界条件,推导矿柱失稳的临界宽度表达式,计算得到矿柱宽度大于 3.591 m。基于理论计算,选择矿柱宽度 2、3、4、5 m,矿房宽度 10 m 进行采场围岩变形破坏特征模拟。对比位移和塑性区发现,随着矿柱宽度增大,采场顶板下沉量逐渐减小;矿柱宽度为 5 m 时,采场顶板最大下沉量为 30.95 mm,塑性区仅波及顶板局部区域。工程实践表明:矿柱宽度为 5 m 时,矿柱最大位移为 18.47 mm,最大应力为 4.32 MPa,采场、充填体均处于稳定状态,符合工程安全性和经济性要求。

关键词: 急倾斜; 厚大矿体; 矿柱宽度; 采场结构; 回采方法; 充填采矿法; 采场稳定性; 尖点突变理论; 力学模型; 宽度设计
中图分类号: TD879 **文献标志码**: A doi:10.3969/j.issn.0253-6099.2026.02.002
文章编号: 0253-6099(2026)02-0008-07

Stability Analysis and Width Optimization of Pillars in Stoping of Steeply Inclined Thick and Large Ore Bodies Based on Cusp Catastrophe Theory

YANG Xiufu[1], WANG Chen[2], LU Haocheng[1], LUO Yi[2], LI Cheng[2], WANG Wei[2]
(1.*Wengfu (Group) Co., Ltd., Guiyang* 550002, *Guizhou*, *China*; 2.*College of Mining Engineering*, *Guizhou University*, *Guiyang* 550025, *Guizhou*, *China*)

Abstract: Aiming at the reasonable safe width of pillars in cut-and-fill stoping of steeply inclined thick and large phosphorite ore bodies, a mechanical analysis model of stope pillars was established based on elastic mechanics theory. The average bearing load of pillars due to the backfill was calculated, and a stope structural layout consisting of roof pillars and stope pillars was adopted. Cusp catastrophe theory was used to analyze the critical instability conditions of pillars, and the formula for critical failure width of pillars was then deduced, with which the critical pillar width is calculated to be 3.591 m. On this basis, numerical simulation was carried out to investigate the deformation and failure characteristics of surrounding rock in a stope with width of 10 m and pillar widths of 2 m, 3 m, 4 m and 5 m respectively. The comparison results of displacement and plastic zone indicate that roof subsidence gradually decreases with the increase of pillar width. When the pillar width is 5 m, the maximum roof subsidence is 30.95 mm and the plastic zone is only distributed in local roof areas. Engineering practice has verified that with pillars 5 m in width, the maximum displacement and maximum stress of the pillars are 18.47 mm and 4.32 MPa respectively, and both the stope and backfill remain in a stable state, which meets the requirements of engineering safety and economic efficiency.

Key words: steep incline; thick and large ore body; pillar width; stope structure; stoping method; backfill mining method; stope stability; cusp catastrophe theory; mechanical model; width optimization

充填采矿法通过回填采空区有效控制覆岩移动,在提高采场安全性的同时提升矿石回采率,在磷矿山得到了广泛应用[1]。然而,在充填体下进行矿体回采时,由于上覆充填体力学性能较弱,回采爆破引发的振

① **收稿日期**: 2025-11-13
基金项目: 国家自然科学基金(52174072,52364010)
作者简介: 杨秀福(1998—),男(侗族),贵州毕节人,助理工程师,主要从事充填工艺方面的研究。E-mail:2741452779@qq.com
通信作者: 王沉(1989—),男,安徽淮北人,博士研究生导师,教授,主要从事采矿方法与岩层控制方面的研究。E-mail:cwang@gzu.edu.cn

动易导致充填体发生变形破坏,威胁采场整体稳定[2-3]。为了保证采场的稳定性,通常会留设一定的矿柱,因此,合理的矿柱宽度对保障采矿安全、提升回采率具有重要意义。

近年来,国内外学者围绕矿柱宽度对采场稳定性影响开展了大量研究,常采用经验公式法、Mathews 稳定图法等方法确定矿柱宽度[4-6]。然而,此类方法多基于特定矿山条件,存在一定局限性,难以推广应用[7]。随着计算机技术的发展,数值模拟已成为分析矿柱对采场稳定性影响的重要手段,常用软件包括 FLAC^{3D}及 3DMine 等[8-9]。理论分析与数值模拟相结合的研究方法,既能发挥理论解析在揭示力学机制方面的优势,又能借助数值模拟对理论模型进行验证与修正。文献[10-12]通过构建矿柱宽度计算模型,并运用数值模型确定了矿柱的最优宽度,取得了良好效果。

本文依托贵州某磷矿充填体下厚大矿体回采工程实践,构建充填体-矿柱系统力学分析模型,基于尖点突变理论推导矿柱失稳的临界宽度表达式,并借助 FLAC^{3D}数值模拟揭示不同矿柱宽度条件下采场的稳定性演化规律,进一步结合现场工业性试验与监测数据,对矿柱宽度设计的合理性进行验证,旨在为充填体下矿体回采过程中矿柱宽度合理设计提供参考。

1　工程概况

贵州某磷矿位于川黔南北构造带上,矿区内有 a、b 两层磷矿体,a 矿层平均厚 28 m,b 矿层平均厚32 m,矿体倾角 55°~70°,属于急倾斜厚大矿体。a、b 矿层之间有 1 层平均厚 4 m 的 G 夹层。矿山采用垂直走向分段空场嗣后充填采矿法,采场宽 10 m,高 15 m,长为矿体厚度,先回采 b 矿层并充填之后,再回采 a 矿层。现主要开采 1 020~1 080 m 中段矿体,矿体回采并充填至 1 050~1 065 m 分段、回采1 065~1 080 m 分段时,由于上部矿体已回采并充填完毕,1 065~1 080 m 分段矿体的顶板为尾砂胶结充填体,当前矿体采用上向炮孔装药爆破回采,其爆破振动易造成上覆充填体不稳定。为确保充填体下矿体的安全回采,矿山在 1 065~1 080 m 分段采用留设 4 m 厚顶板和条柱形矿柱的开采方案,回采布置如图 1 所示。在此基础上,需要合理确定矿柱宽度,以实现充填体下矿体的安全、高效回采。

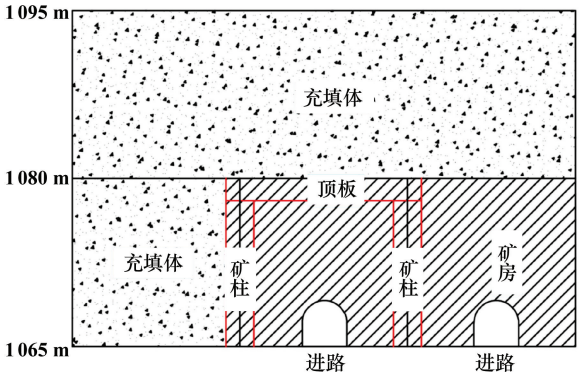


图 1　回采布置示意图

Fig. 1　Schematic diagram of stope arrangement

2　充填体下采场矿柱理论分析

2.1　矿柱力学模型及受力分析

充填体下采场内矿柱稳定性分析是一个复杂的力学问题。为反映研究问题的力学本质,对矿柱作出如下假设:① 条柱形矿柱为均匀连续的各向同性体,忽略重力作用,矿柱呈均匀分布;② 忽略充填体与矿柱接触面上的剪切应力,充填体在长期承载作用下与矿体紧密接触,两者间无空隙,均视为完全弹性连续体;③ 充填体以静水压力形式作用于距矿柱底部 1/3h 处。

矿柱的力学模型如图 2 所示。假设矿柱受力变化过程中以弹性破坏为主,设矿柱宽度为 W,高度为 h,上覆岩层传递的压力视为均布载荷 q,采场顶板岩体自重为 q_0,充填体对矿柱的侧向压力为 F_x,矿柱对顶板充填体的作用力为 q_1。竖直方向和水平方向的作用力引起矿柱弯曲变形,矿柱本身为矿体,在长期的承载作用下与底板紧密接触,矿柱上下端可视为固定铰支约束。由图 2 可知,影响矿柱稳定性的参数主要包括矿柱宽度、矿柱高度、矿房宽度以及外力作用等。

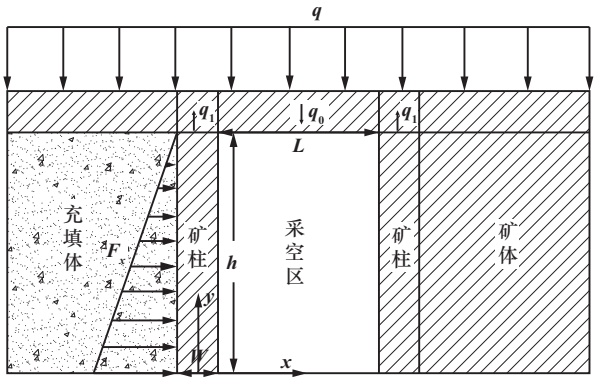


图 2　矿柱力学模型

Fig. 2　Mechanical model of pillars

2.2　矿柱承载机理

目前,在矿柱承载机理的分析方法中,矿柱面积承载理论应用较为广泛。该理论认为,矿柱所承受的载荷为开采空间至地表范围内岩层的重力[13]。随着矿体高强度开采,采空区周围岩体碎胀性不断扩展,特别是顶板岩性较弱或直接顶为尾砂胶结充填体时,矿柱

所承受的载荷增大。因此,基于该理论所设计的矿柱宽度冗余较大,造成资源浪费。工程实践表明,受矿体开采扰动影响,围岩体内应力重新分布,矿柱、采空区顶板及围岩体中出现应力集中现象,由于矿柱刚度大于顶板充填体的刚度,受压充填体内会形成一个半径为 R_0 的拱形塑性区[14-15],如图 3 所示。采场结构参数及矿柱尺寸是影响矿体开采、顶板充填体稳定的关键因素,设计合理的采场结构参数,可以控制顶板充填体的稳定性,设计合理矿柱宽度可支撑塑性区内岩体的重力,确保采场的稳定性。

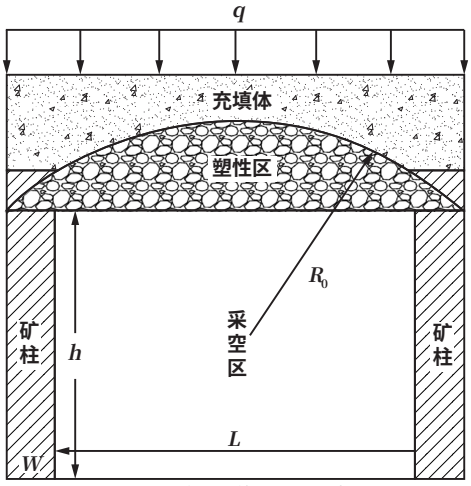


图 3 矿柱承载机理示意图

Fig. 3 Schematic diagram of load-bearing mechanism for pillars

根据已有研究成果,结合普氏理论和卡斯特纳方程[16-17],可计算得到矿柱顶部所承受的均布载荷。计算表达式为:

$$\begin{cases} R_0 = R_1\left[\dfrac{(q + c\cot\varphi)(1-\sin\varphi)}{c\cot\varphi}\right]^{\frac{1-\sin\varphi}{2\sin\varphi}} \\ R_1 = \sqrt{(L/2)^2 + (h/2)^2} \\ q = \gamma_1 H_1 + \gamma_2 H_2 \\ q_d = \gamma(R_0 - h/2) \end{cases} \tag{1}$$

式中:R_0 为塑性区半径,m;R_1 为开挖空间半径,m;q 为开挖处的垂直自重应力,Pa;c 为充填体内聚力,MPa;φ 为岩体内摩擦角,(°);h 为矿柱高度,m;L 为采场宽度,m;γ 为顶板围岩容重,kN/m^3;γ_1 为充填体容重,kN/m^3;γ_2 为上覆岩层容重,kN/m^3;H_1 为充填体高度,m;H_2 为上覆岩层高度,m;q_d 为顶压集度,Pa。

开采空间总顶压[11]为:

$$Q = q_d L \tag{2}$$

采场内单个矿柱所承载的载荷为:

$$\sigma = \frac{Qs}{MNW^2} \tag{3}$$

式中:M 为矿柱长度,m;W 为矿柱宽度,m;N 为矿柱个数;s 为矿块倾向斜长,m。

将式(1)、(2)代入式(3)可得矿柱宽度的计算公式为:

$$W = \left\{\gamma L s\left\{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}\cdot \left[\frac{(\gamma_1 H_1 + \gamma_2 H_2 + c\cot\varphi)(1-\sin\varphi)}{c\cot\varphi}\right]^{\frac{1-\sin\varphi}{2\sin\varphi}} - \frac{h}{2}\right\} / (MN\sigma)\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

2.3 充填体侧压力学分析

采用朗肯土压力公式计算充填体侧压力[18],其表达式为:

$$F_x = \frac{1}{2}K\gamma_c h^2 \tag{5}$$

$$K = \tan^2(45° - \frac{\beta}{2}) \tag{6}$$

式中:γ_c 为尾砂胶结充填体的容重;K 为尾砂胶结充填体的侧压系数;β 为充填体内摩擦角。

3 矿柱失稳尖点突变理论分析

矿体回采过程中,矿柱受工程扰动、地质环境及岩性等因素影响,其变形-失稳-破坏演化过程复杂,表现为典型的非线性动力学行为[19]。突变理论适用于研究不连续现象,尤其擅长描述作用力连续变化引发状态突变的特征,其突跳性、发散性及滞后性等特性与矿柱失稳过程相适应[20]。因此,本文采用尖点突变理论对充填体下矿柱的失稳条件开展研究。

根据矿柱力学模型,矿柱力学系统总势能 V[21]为:

$$\begin{aligned} V &= U_E - W_{F_x} - W_D \\ &= \frac{D}{2}\int_0^h (y'')^2 dx - \frac{P}{2}\int_0^h (y')^2 dx - F_x\int_0^h y dx \end{aligned} \tag{7}$$

式中:U_E 为矿柱应变能;W_{F_x} 为充填体侧向压力所做的功;W_D 为顶板充填体对系统所做的功;D 为矿柱的抗弯刚度;y 为矿柱的挠曲函数。

简化求得矿柱总势能的表达式为:

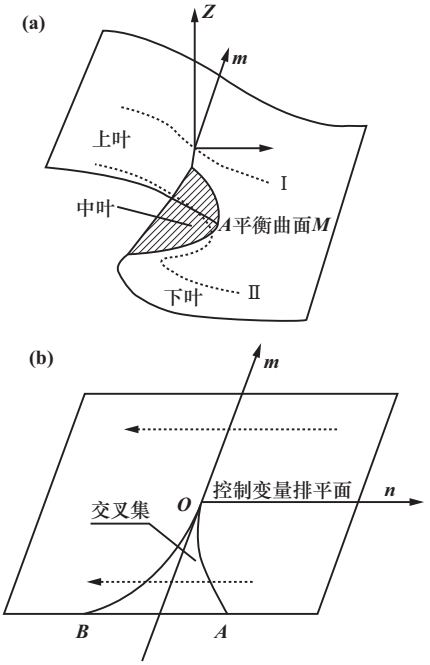
$$V = \frac{D\pi^6}{8h^5}u^4 + \left(\frac{2D\pi^4}{h^3} - \frac{\sigma\pi^2}{4h}\right)u^2 - \frac{F_x h}{2}u \tag{8}$$

设 $k = \dfrac{2D\pi^6}{h^5}$,$l = \left(\dfrac{2D\pi^4}{h^3} - \dfrac{\sigma\pi^2}{4h}\right)$,并引入无量纲参数$(x,m,n)$,其中 $x = u\left(\dfrac{1}{4}k\right)^{\frac{1}{4}}$,$n = -\dfrac{F_x h}{2}\left(\dfrac{1}{4}k\right)^{-\frac{1}{4}}$,$m = 4lk^{-\frac{1}{2}}$,将式(8)简化为标准势函数形式:

$$V = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}mx^2 + nx \tag{9}$$

式中:x 为状态变量;m 和 n 均为控制变量。

系统的平衡曲面和控制变量平面如图 4 所示。



(a) 系统平衡曲面;(b) 控制变量曲面

图 4　系统平衡曲面和控制变量曲面

Fig. 4　System equilibrium surfaces and control variable surfaces

矿柱尖点突变模型的分叉集[10]满足:

$$\Delta = 4m^3 + 27n^2 = 0 \tag{10}$$

当矿柱处于稳定状态时,应满足 $\Delta > 0$,由于 $27n^2 \geqslant 0$,故 $m>0$,即:

$$m = 4\left(\frac{2D\pi^4}{h^3} - \frac{\sigma\pi^2}{4h}\right)\left(\frac{2D\pi^6}{h^5}\right)^{-\frac{1}{2}} > 0 \tag{11}$$

计算可得:$\sigma < \dfrac{8D\pi^2}{h^2}$。

矿柱不发生失稳破坏的充分条件为:

$$\sigma \leqslant \frac{[\sigma]}{K} \tag{12}$$

式中:$[\sigma]$ 为矿柱抗压强度,MPa;K 为安全系数,取 1.5。

根据上述计算结果,可得矿柱稳定的临界宽度的充要条件为:

$$W > \left\{3(1-\mu^2)h^2\gamma LsK\left\{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}\cdot \left[\frac{(\gamma_1 H_1 + \gamma_2 H_2 + c\cot\varphi)(1-\sin\varphi)}{c\cot\varphi}\right]^{\frac{1-\sin\varphi}{2\sin\varphi}} - \frac{h}{2}\right\}^{\frac{1}{2}}\right/ (2MNE\pi^2)^{\frac{1}{2}} \tag{13}$$

将矿山采场结构参数代入式(13),得到矿柱宽度 W>3.591 m。

4　数值模拟

4.1　数值计算模型

根据矿体赋存特征,按圣维南原理,模型尺寸选取为研究对象的 3~5 倍[22],以矿体走向方向为 y 轴,垂直矿体走向方向为 x 轴,高为 z 轴建立三维数值模型,如图 5 所示,模型长×宽×高为 125 m×80 m×165 m,网格数为 207 717 个。根据理论计算结果,设计矿柱宽度分别为 2、3、4、5 m。模拟过程中采用 Mohr-Coulomb 本构模型进行矿体开采计算,模型中各层岩体的物理力学参数见表 1。模型四周设置为固定约束,底部设置为单约束,模型上部为自由边界,不设置约束。并按照 1 065~1 080 m 分段的地应力,在模型顶部施加 10.5 MPa 的均布载荷。

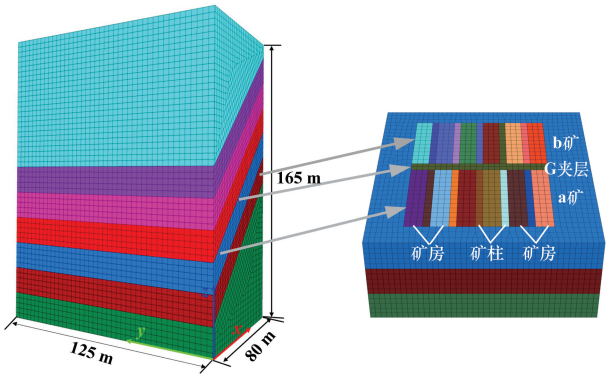


图 5　数值模型

Fig. 5　Numerical model

表 1　岩体物理力学参数

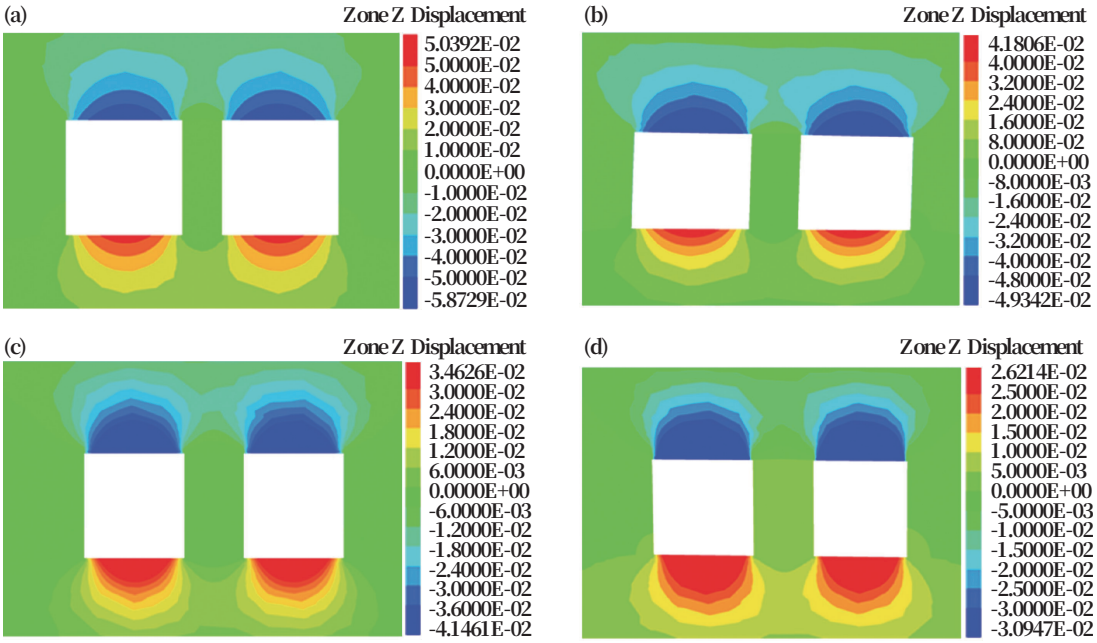
Table 1　Physical and mechanical parameters of rock mass

岩性	密度/(g·cm^{-3})	单轴抗压强度/MPa	弹性模量/MPa	泊松比	黏聚力/MPa	内摩擦角/(°)
围岩	2 750	5.00	5.20	0.38	7.250	54.60
充填体	1 800	4.60	6.20	0.35	0.178	50.10
矿体	2 740	11.21	7.10	0.21	1.840	35.00
底板	2 150	6.09	2.90	0.21	6.757	41.48

4.2　计算结果分析

图 6 为不同矿柱宽度下采场垂直位移云图。矿柱分别宽 2、3、4、5 m 时,采场顶板围岩最大下沉量分别为 58.73、49.34、41.46、30.95 mm,底板分别隆起 50.39、41.81、34.63、26.21 mm。隆起的主要原因是矿柱宽度较小,相邻 2 个采场围岩应力转移到矿柱上,矿柱压缩变形引发岩体侧向扩容,对底板岩层产生水平挤压,致使底板在矿柱边缘附近发生塑性变形并向上隆起。随着矿柱宽度增大,矿柱承载能力增强,应力集中程度减

弱,传递给底板的水平推力和竖向压缩效应随之减小,因此底板隆起量呈现出与顶板下沉量同步递减的规律。矿柱宽度从 2 m 增至 5 m 时,采场顶板围岩下沉量与底板隆起量分别减小了 47.30%和 47.99%。

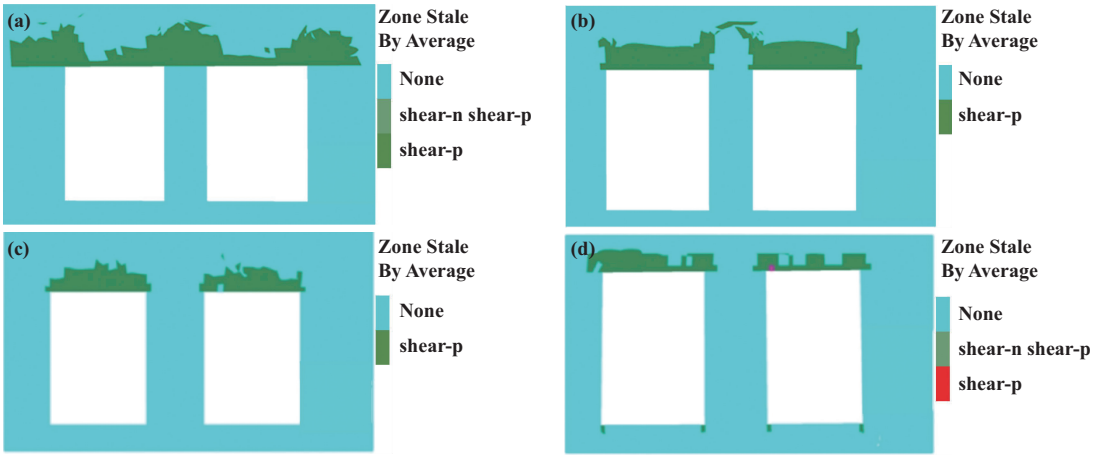


(a) 2 m; (b) 3 m; (c) 4 m; (d) 5 m

图 6 不同矿柱宽度下采场垂直位移云图

Fig. 6 Nephogram of vertical displacement of stope with pillars of different widths

图 7 为不同矿柱宽度下采场塑性分布云图。矿柱宽度越小,矿柱以尖点的形式作用于顶板,应力场集中分布在与矿柱接触的顶板,矿柱的承载载荷超过顶板岩层最大承受载荷时,顶板岩层塑性区从矿柱端部逐渐向采场中部扩展,在采动应力作用下,逐渐扩展至采场上部岩层;随着矿柱宽度逐渐增大,采场应力场分布在矿柱及周围岩体中,围岩的应力环境逐渐得到改善,采场顶板的塑性区逐渐减小。



(a) 2 m; (b) 3 m; (c) 4 m; (d) 5 m

图 7 不同矿柱宽度下采场塑性区分布云图

Fig. 7 Nephogram of plastic zone distribution of stope with pillars of different widths

矿柱宽度为 2 m 时,采场顶板围岩塑性区布满采场顶部,随着矿柱宽度增大,采场顶板塑性区逐渐减小;矿柱宽度为 5 m 时,采场顶板小范围岩体内存在塑性区分布。

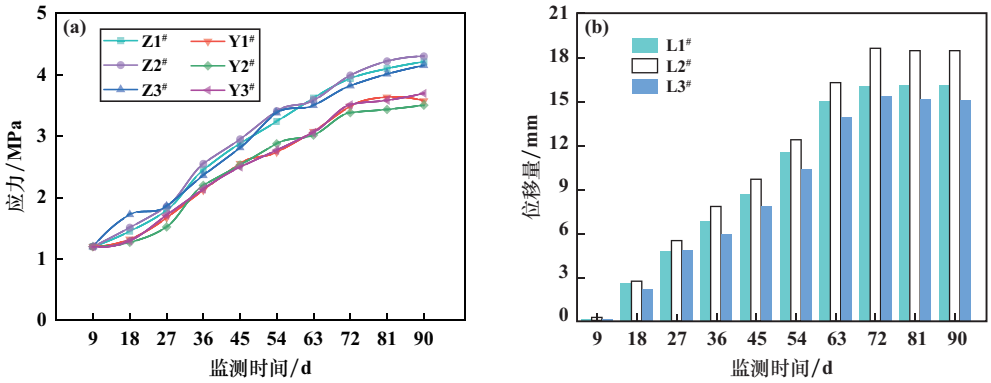
根据不同矿柱宽度下采场位移场、塑性区分布特征,当采场宽 10 m、高 11 m,顶板厚 4 m,条柱形矿柱宽 5 m 时,采场顶板的最大下沉量为 30.95 mm,采场顶板仅有局部范围内的岩体发生破坏,采场处于稳定

状态。在采场结构参数优化中,增大矿柱宽度虽有利于提高采场稳定性,但过度增大矿柱尺寸将造成矿石资源损失。基于理论分析与数值模拟计算结果,矿柱宽度为 5 m 时,可在保障采场稳定的前提下实现资源的高效回收,是兼顾安全性与经济性的最优参数,因此不再考虑更大的矿柱宽度。

5　工程验证

在贵州某磷矿 1 065~1 080 m 分段 8#矿房开展现场工业性试验,采场长 30 m,矿房宽 10 m,条柱形矿柱宽 5 m。采空区进路以上采用 1∶6的尾砂胶结充填料浆充填,进路以下采用 1∶4的尾砂胶结充填料浆充填。在出矿巷道两侧布置扩帮钻孔,采场内布置向上扇形中深孔,装药系数 0.8,矿体回采时,在距离矿柱较近处减少装药量或与矿柱保持一定距离进行装药,减少因装药量过大损伤采场内矿柱,防止采场内矿柱失稳引起大面积岩体垮塌。在采场矿柱表面以 10 m 的间距安设应力计,左侧矿柱编号为 Z1#、Z2#、Z3#,右侧矿柱编号为 Y1#、Y2#、Y3#;顶板以 10 m 的间距安设离层仪,编号为 L1#、L2#、L3#。

各监测点应力与位移监测结果如图 8 所示。由图 8可知,顶板位移整体均较小,最大位移出现在顶板中心(L2#),为 18.47 mm;左侧矿柱应力大于右侧矿柱应力,最大为 4.32 MPa,但未超过矿体极限强度。现场观测结果表明,矿柱表面未发生明显的剥落和开裂现象,说明矿柱宽度为 5 m 是可行的,能够满足充填体下矿体回采,矿柱具有较好的承载机制,可以较好控制采场稳定性。



(a) 应力;(b) 位移

图 8　矿柱应力与位移监测结果

Fig. 8　Monitoring results of pillar stress and displacement

6　结论

1) 基于矿柱力学承载模型,明确了矿柱所受荷载主要来源于其上方塑性区内充填体的自重,推导出矿柱在上覆荷载作用下的理论计算公式。运用尖点突变理论揭示了矿柱变形失稳的力学机制,建立了矿柱临界失稳宽度的表达式。

2) 针对矿柱宽度分别为 2、3、4、5 m 的 4 种工况开展数值模拟分析,揭示了不同矿柱宽度条件下采场位移及塑性区分布特征。模拟结果表明,随着矿柱宽度增大,矿柱承载能力增强,底板隆起量呈现与顶板下沉量同步递减的规律。矿柱宽度为 5 m 时,采场顶板最大下沉量为 30.95 mm,顶板岩体仅呈现局部破坏特征。

3) 在 1 065~1 080 m 中段 8#矿房开展工业性试验,现场监测结果表明:宽度为 5 m 的矿柱最大位移为 18.47 mm,最大应力为 4.32 MPa,矿柱形态保持完整,采场整体稳定性良好,能够满足充填体下矿体回采的安全要求。

参考文献(References):

[1] 甘德清,孟岐,刘志义,等. 缓倾斜极厚矿体高阶段采场开采顺序优化[J]. 矿冶工程, 2024,44(5):28-34.
GAN Deqing, MENG Qi, LIU Zhiyi, et al. Optimization of mining sequence for high-level stope with gently-dipping and extra-thick orebody[J]. Mining and Metallurgical Engineering, 2024,44(5):28-34.

[2] 孙光华,王玥,任伟成. 胶结充填技术在金属矿山中的应用现状与发展趋势[J]. 有色金属(矿山部分), 2022,74(4):26-33.
SUN Guanghua, WANG Yue, REN Weicheng. Application status and development trend of cemented filling technology in metal mines[J]. Nonferrous Metals (Mining Section), 2022,74(4):26-33.

[3] 薛田喜,闫至开,蒋翔,等. 松散尾砂充填体下小进路式充填回采顶柱工艺研究[J]. 金属矿山, 2023(6):85-89.
XUE Tianxi, YAN Zhikai, JIANG Xiang, et al. Small drift filling for the recovery of roof pillars under the loose tailing filling body[J]. Metal Mine, 2023(6):85-89.

[4] 张涛,张帅,张百胜. 矿柱安全留设尺寸的宽度折减法与应用[J]. 岩土力学, 2014,35(7):2041-2046.
ZHANG Tao, ZHANG Shuai, ZHANG Baisheng. Width reduction method and its application to determining safety size of pillar[J].

Rock and Soil Mechanics, 2014,35(7):2041-2046.

[5] 柴红,郭俊超,杨淑慧,等. 缓倾斜厚大矿体采场结构参数优化研究与应用[J]. 金属矿山, 2023(11):142-147.
CHAI Hong, GUO Junchao, YANG Shuhui, et al. Study and application on the optimization of stope structural parameters of gently inclined thick orebody[J]. Metal Mine, 2023(11):142-147.

[6] 董川龙,宁掌玄. 冲击载荷作用下矿柱力学响应特征分析[J]. 煤炭科学技术, 2022,50(3):102-110.
DONG Chuanlong, NING Zhangxuan. Mechanical response analysis of rock pillar under the impact loading[J]. Coal Science and Technology, 2022,50(3):102-110.

[7] 张雄天,马炳德,张春阳,等. 多中段开采复杂采空区群稳定性数值模拟研究[J]. 矿冶工程, 2025,45(2):26-33.
ZHANG Xiongtian, MA Bingde, ZHANG Chunyang, et al. Numerical simulation for stability of complex mined-out areas in multi-level mining[J]. Mining and Metallurgical Engineering, 2025,45(2):26-33.

[8] 黄德镛,高聪,贾子月,等. 多中段空区稳定性分析及间柱回采顺序优选[J]. 有色金属工程, 2023,13(6):105-114.
HUANG Deyong, GAO Cong, JIA Ziyue, et al. Stability analysis of multiple mid-section goaf areas of a mine and optimization of the order of inter-column recovery[J]. Nonferrous Metals Engineering, 2023, 13(6):105-114.

[9] HEIDARZADEH S, SAEIDI A, ROULEAU A. Evaluation of the effect of geometrical parameters on stope probability of failure in the open stoping method using numerical modeling[J]. International Journal of Mining Science and Technology, 2019,29(3):399-408.

[10] 文小松,王沉,黄欣欣,等. 基于尖点突变理论的采场矿柱稳定性分析[J]. 矿业科学学报, 2024,9(6):897-908.
WEN Xiaosong, WANG Chen, HUANG Xinxin, et al. Stability of mining pillars in stopes based on cusp catastrophe theory[J]. Journal of Mining Science and Technology, 2024,9(6):897-908.

[11] 赵国彦,周礼,李金跃,等. 房柱法矿柱合理尺寸设计及矿块结构参数优选[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2014,45(11):3943-3948.
ZHAO Guoyan, ZHOU Li, LI Jinyue, et al. Reasonable pillar size design and nugget structural parameters optimization in room-and-pillar mining[J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2014,45(11):3943-3948.

[12] GUO Y H, MIAO Y C. Study on stope stability in continuous mining of long-dip, thin orebody by room-pillar method[J]. Sustainability, 2022,14(15):9601.

[13] 陈庆发,古德生,周科平,等. 对称协同开采人工矿柱失稳的突变理论分析[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2012,43(6):2338-2342.
CHEN Qingfa, GU Desheng, ZHOU Keping, et al. Analysis of catastrophe theory for artificial pillar instability in symmetric synergistic mining[J]. Journal of Central South University, 2012,43(6):2338-2342.

[14] 姚高辉,吴爱祥,王贻明,等. 破碎围岩条件下采场留存矿柱稳定性分析[J]. 北京科技大学学报, 2011,33(4):400-405.
YAO Gaohui, WU Aixiang, WANG Yiming, et al. Stability analysis of stope retention pillars in broken rock conditions[J]. Journal of University of Science and Technology Beijing, 2011,33(4):400-405.

[15] 卢西洲,王文杰,贾稳宏,等. 大体积充填体下胶结充填法回采进路参数优化研究[J]. 矿冶工程, 2022,42(5):20-25.
LU Xizhou, WANG Wenjie, JIA Wenhong, et al. Parameter optimization for stoping by cemented backfilling below massive filling body[J]. Mining and Metallurgical Engineering, 2022,42(5):20-25.

[16] 黄敏, KULATILAKE P H S W,罗嗣海,等. 传统矿柱安全系数计算公式优化研究[J]. 矿冶工程, 2020,40(4):32-37.
HUANG Min, KULATILAKE P H S W, LUO Sihai, et al. Optimization of traditional calculation formula for safety factor of pillars[J]. Mining and Metallurgical Engineering, 2020,40(4):32-37.

[17] ZHANG Q L, ZHANG P, CHEN Q S, et al. Study of the critical safe height of goaf in underground metal mines[J]. Minerals, 2024, 14(3):227.

[18] YANG Y, LI H H, MENG Z G, et al. A method for computing slip-line fields with stress discontinuity in cohesionless backfills[J]. Buildings, 2023,13(3):610.

[19] 廖元欢,邓涛,张文涛,等. 基于尖点突变理论的巷道开挖围岩稳定性及支护研究[J]. 有色金属工程, 2022,12(4):116-123.
LIAO Yuanhuan, DENG Tao, ZHANG Wentao, et al. Study on the stability and support of tunnel excavation surrounding rock based on cusp catastrophe theory[J]. Nonferrous Metals Engineering, 2022, 12(4):116-123.

[20] 史秀志,柯武阳,苟永刚,等. 大跨度采场上部硐室条形矿柱尺寸优化研究[J]. 采矿与安全工程学报, 2020,37(6):1084-1093.
SHI Xiuzhi, KE Wuyang, GOU Yonggang, et al. Optimization of strip pillar size in upper chamber of long-span stope[J]. Journal of Mining and Safety Engineering, 2020,37(6):1084-1093.

[21] 过江,冯永菲. 深部回采矿柱失稳的尖点突变理论分析及宽度优化[J]. 中国安全生产科学技术, 2017,13(7):111-116.
GUO Jiang, FENG Yongfei. Cusp catastrophe theory analysis and width optimization on instability of pillar in deep mining[J]. Journal of Safety Science and Technology, 2017,13(7):111-116.

[22] 苗凯军,屠世浩,刘迅,等. 深部厚硬顶板下充填面留巷大变形分析及控制[J]. 煤炭学报, 2021,46(4):1232-1241.
MIAO Kaijun, TU Shihao, LIU Xun, et al. Large deformation analysis and control of retaining entry along the backfilling working face with thick hard roof in deep mining[J]. Journal of China Coal Society, 2021,46(4):1232-1241.

引用本文:杨秀福,王沉,陆浩成,等. 基于尖点突变理论的急倾斜厚大矿体矿柱稳定性分析及宽度优化[J]. 矿冶工程, 2026,46(2):8-14.
YANG Xiufu, WANG Chen, LU Haocheng, et al. Stability analysis and width optimization of pillars in stoping of steeply inclined thick and large ore bodies based on cusp catastrophe theory[J]. Mining and Metallurgical Engineering, 2026,46(2):8-14.