



DOI:10.12404/j.issn.1671-1815.2403896

引用格式:严鹏飞,李亚宁,高强,等.行星齿轮传动系统模态变化机理及变区间动态灵敏度分析[J].科学技术与工程,2025,25(10):4109-4117.

Yan Pengfei, Li Yaning, Gao Qiang, et al. Modal change mechanism and variable interval dynamic sensitivity analysis of planetary gear transmission system[J]. Science Technology and Engineering, 2025, 25(10): 4109-4117.

机械、仪表工业

## 行星齿轮传动系统模态变化机理及变区间动态灵敏度分析

严鹏飞<sup>1,2</sup>, 李亚宁<sup>1,2\*</sup>, 高强<sup>1,2</sup>, 蒋方宇<sup>1,2</sup>, 咎晓磊<sup>1,2</sup>

(1. 中北大学机械工程学院, 太原 030051; 2. 中北大学先进制造技术山西省重点实验室, 太原 030051)

**摘要** 针对行星齿轮传动系统优化设计过程中确定参数有效设计范围的问题,开展两级行星齿轮传动系统参数动态灵敏度研究。以车用两级行星齿轮传动系统为研究对象,采用拉格朗日方程构建系统的固有振动模型,对两级行星排的振型特点进行归纳总结,推行星系统的振动能量的表达式,揭示了振动能量的分布状态及能量只在同一阶次振动传递的规律。进一步探究了系统固有频率的模态变化机理,阐述参数变化引发系统固有频率模态跃迁的振动能量传递本质。采用求导法推导系统固有频率的参数灵敏度方程,研究模态跃迁现象对参数灵敏度的影响规律,揭示固有频率灵敏度随参数取值改变的动态变化规律,提出了基于模态跃迁现象划分参数灵敏度区间的方法,实现对优化设计阶段变量取值范围选择工作的有效指导。

**关键词** 行星齿轮传动系统; 模态跃迁; 参数灵敏度; 模态能量

中图分类号 TH132.425;

文献标志码 A

### Modal Change Mechanism and Variable Interval Dynamic Sensitivity Analysis of Planetary Gear Transmission System

YAN Peng-fei<sup>1,2</sup>, LI Ya-ning<sup>1,2\*</sup>, GAO Qiang<sup>1,2</sup>, JIANG Fang-yu<sup>1,2</sup>, ZAN Xiao-lei<sup>1,2</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, North University of China, Taiyuan 030051, China;

2. Shanxi Provincial Key Laboratory for Advanced Manufacturing Technology, North University of China, Taiyuan 030051, China)

**[Abstract]** Aiming at the problem of determining the effective design range of parameters during the optimization design of planetary gear transmission system, the dynamic sensitivity of two-stage planetary gear transmission system parameters was studied. Taking the two-stage planetary gear transmission system of vehicle as the research object, the natural vibration model of the system was established by Lagrange, the vibration modal characteristics of the two-stage planetary system were summarized, the expression of the vibration energy of the planetary system was deduced, the distribution state and the law of the vibration energy transfer in the same order were studied, and the mode change mechanism of the natural frequency of the system was further explored. The vibration energy transfer essential of the system natural frequency mode transition triggered by parameter change was analyzed. The parameter sensitivity equation of the natural frequency of the system is derived, the influence law of the modal transition phenomenon on the parameter sensitivity was studied, and the dynamic change law of the natural frequency sensitivity with the change of the parameter value was revealed. The method of dividing the parameter sensitivity interval based on the modal transition phenomenon was proposed, which realizes the effective guidance for the selection of the variable value range in the optimization design stage.

**[Keywords]** planetary gear transmission system; mode transition; parametric sensitivity; energy of mode

行星齿轮传动系统因其强大的承载能力、高效的传递效率、较大传动比以及功率分流汇流等优势,广泛地应用于车辆传动系统中。而且,随着车

辆性能不断向高速重载方向发展,以及混合动力车辆的大量普及,行星齿轮系统作为主要的动力传递和功率耦合机构,对行星传动系统振动特性的合理

收稿日期: 2024-05-26; 修订日期: 2025-01-15

基金项目: 山西省基础研究计划(202203021222053); 中北大学先进制造技术山西省重点实验室开放课题研究基金(XJZZ202207)

第一作者: 严鹏飞(1989—),男,汉族,山西临汾人,博士,讲师。研究方向: 车辆传动系统与动力学分析。E-mail: ypf5321@163.com。

\* 通信作者: 李亚宁(1999—),男,汉族,山西大同人,硕士研究生。研究方向: 精密齿轮传动与动力学分析。E-mail: lyn13734226287@163.com。

改善能够有效提高传动系统的可靠性。在行星齿轮传动系统振动分析中,共振是一个不可避免的问题,当系统发生共振时,容易使系统产生破坏,大大降低其使用寿命,在进行减振优化设计的过程中研究系统固有特性及其参数灵敏度能够有效指导优化设计。固有特性分析主要是通过研究系统的固有频率以及振型特点,明确系统的振动模式,为后期动力学振动分析及系统共振研究奠定基础。Kahraman<sup>[1]</sup>针对单级行星系统详细分析了其固有特性。Lin 等<sup>[2-3]</sup>研究了行星轮分布特征对行星系统固有振型的影响,总结出平移振动、扭转振动和行星轮振动 3 种系统振型模式。Guo 等<sup>[4]</sup>构建了纯扭转复合行星齿轮传动系统的固有振动模型,并分析了各振动模式的特点。Eritenel 等<sup>[5-6]</sup>建立了单级斜齿行星齿轮传动的 3-D 集中质量模型,并分析了其模态特性。Mo 等<sup>[7]</sup>研究了太阳轮柔性支撑对系统固有特性的影响。Dong 等<sup>[8]</sup>提出了基于群论的振动分析方法,以确定对称系统的高度结构化,及对称的模态特性。

在中国,张策<sup>[9]</sup>对国内行星齿轮传动固有特性的研究进行了系统全面的总结。王世宇等<sup>[10-11]</sup>对行星齿轮传动纯扭转模型的振动模式进行了分析,并总结了系统参数与固有特性之间的关系。Liu 等<sup>[12]</sup>将两级行星系统的中间连接轴视为 Timoshenko 梁,并利用模态能量分析法研究了轴系参数对系统固有特性的影响。王均刚等<sup>[13]</sup>为了优化风电增速箱性能,采用齿轮修形的方式对啮合刚度参数进行了设计。Xiao 等<sup>[14]</sup>研究了齿轮故障对系统模态特性的影响。蔡仲昌等<sup>[15]</sup>研究了包含三级行星排的车辆动力传动系统在不同挡位下固有特性的变化规律。Yang 等<sup>[16]</sup>研究了齿轮副间变刚度条件下的系统模态特征。郝慧荣等<sup>[17]</sup>为提高车辆转向性能,设计了一种行星齿轮转向桥,并应用 Ansys 研究了系统可靠性,采用 MATLAB 分析了其动态性能。陈林凯<sup>[18]</sup>建立了行星齿轮系统的 Adams 动力学模型,对系统模态特性与结构参数关系进行了详细分析。郭昊维等<sup>[19]</sup>通过建立行星齿轮减速器的有限元模型,进行了静力学分析和模态分析,结果表明传动系统与箱体的振动形式主要是扭转振动。龙海洋等<sup>[20]</sup>采用 Adams 动力学软件构建了变速箱行星轮系机构的动力学模型,并进行了动力学仿真,验证了理论模型及分析结果的正确性。

固有振动特性及其参数影响规律分析是行星齿轮传动动力学研究的基础。固有振动特性的研究能够初步确定系统的振动模式及其共振频率,在指导系统结构设计时避开共振频率以及筛选优化

设计敏感参数提供理论依据。但是在参数优化过程中,对模态跃迁引起的参数灵敏度有效区间变化这一现象考虑较少,部分参数灵敏度分析结果及优化区间失效,导致对系统固有特性的优化效果降低。针对固有频率灵敏度随参数动态变化的特性,现推导固有频率对系统参数的模态灵敏度方程,探究模态跃迁现象对参数灵敏度的影响规律,实现对固有特性优化设计阶段变量筛选和取值范围选择工作的有效指导。

## 1 两级行星齿轮传动系统固有振动特性及其振动能量分布规律

本文的研究对象是车辆两级行星齿轮传动系统,其结构简图如图 1 所示,系统有两个普通行星排,一级齿圈与箱体固连,各构件的参数:太阳轮  $s$ , 齿圈  $r$ , 行星架  $c$ , 行星轮  $p$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  作为行星轮编号,  $i = 1, 2$  作为行星排编号。一级太阳轮与二级太阳轮连接,一排行星架与二级齿圈连接。动力从一级太阳轮轴输入,从二级行星架输出,在输出端施加扭矩作为负载。

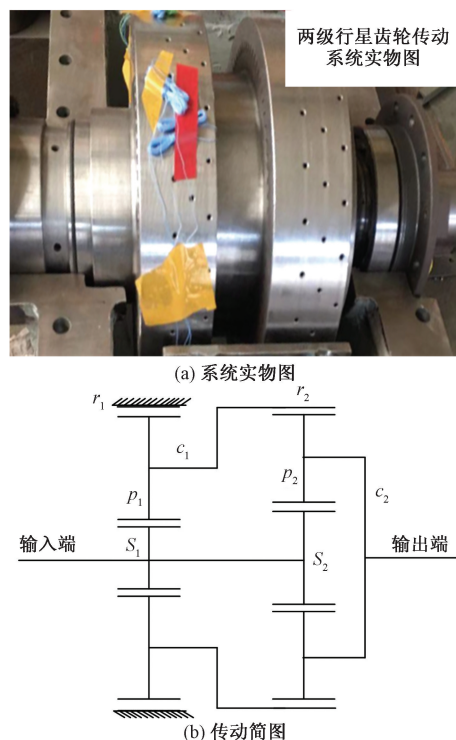


图 1 两级行星齿轮传动系统传动简图  
Fig. 1 Transmission diagram of two-stage planetary gear transmission system

### 1.1 两级行星齿轮传动系统固有频率及振型特征

在两级行星齿轮传动系统非线性振动模型基础上得到其相应的特征值问题,即

$$-\omega_q^2 M \varphi_q + K \varphi_q = 0 \quad (1)$$

式(1)中:  $M$  为系统质量矩阵;  $K = K_b + K_m + K_j$ , 其中  $K_b$ 、 $K_m$  和  $K_j$  分别为轴承支承刚度矩阵、啮合刚度矩阵和级间连接轴的弯曲和扭转刚度矩阵;  $\omega_q$ 、 $\varphi_q$  为系统第  $q$  阶固有频率和振型矩阵,  $\varphi_q = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_n]^T$ ;  $\varphi_i$  为第  $i$  级行星排振型向量,  $\varphi_i = [\varphi_{si}, \varphi_{ri}, \varphi_{ci}, \varphi_{pi1}, \dots, \varphi_{pij}]^T$ ,  $\varphi_{si}$ 、 $\varphi_{ri}$ 、 $\varphi_{ci}$ 、 $\varphi_{pij}$  为太阳轮、齿圈、行星架、行星轮振型,  $\varphi_{si} = [x_{si}, y_{si}, \theta_{si}]^T$ ,  $\varphi_{ri} = [x_{ri}, y_{ri}, \theta_{ri}]^T$ ,  $\varphi_{ci} = [x_{ci}, y_{ci}, \theta_{ci}]^T$ ,  $\varphi_{pij} = [x_{pij}, y_{pij}, \theta_{pij}]^T$ 。

对两级行星齿轮传动系统进行模态分析, 根据振型的特点进行归纳和总结, 得出两级行星齿轮传动的 4 种振动模式: 两级中心旋转部件扭转振动模式、两级中心旋转部件平移振动模式、一级行星轮振动模式、二级行星轮振动模式。

1) 两级中心部件扭转振动模式

如图 2 所示, 该模式各阶固有频率都是单根, 振型向量中, 一、二级行星排中心部件只产生扭转振动而不产生平移振动。其振型向量特征为

$$\begin{cases} \varphi_{si} = [0, 0, \theta_{si}]^T \\ \varphi_{ri} = [0, 0, \theta_{ri}]^T \\ \varphi_{ci} = [0, 0, \theta_{ci}]^T \\ \varphi_{pij} = [x_{pij}, y_{pij}, \theta_{pij}]^T \end{cases} \quad (2)$$

同一级行星排的 4 个行星轮同一自由度的振型元素对应相等, 即

$$\begin{cases} x_{p11} = x_{p12} = x_{p13} = x_{p14} \\ y_{p11} = y_{p12} = y_{p13} = y_{p14} \\ \theta_{p11} = \theta_{p12} = \theta_{p13} = \theta_{p14} \\ x_{p21} = x_{p22} = x_{p23} = x_{p24} \\ y_{p21} = y_{p22} = y_{p23} = y_{p24} \\ \theta_{p21} = \theta_{p22} = \theta_{p23} = \theta_{p24} \end{cases} \quad (3)$$

2) 两级中心部件平移振动模式

如图 3 所示, 该模式各阶固有频率都是二重根, 振型向量中一、二级行星排中心部件只产生平移振动而不产生扭转振动, 其振型向量特征为

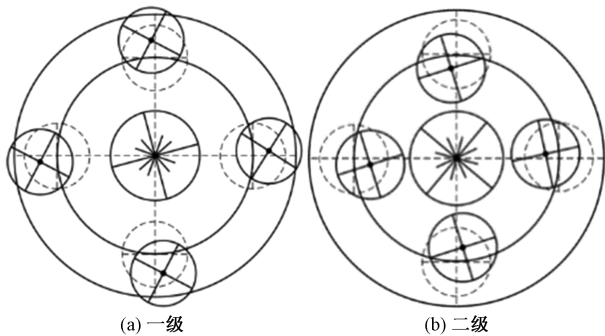


图 2 中心部件扭转模式振型图

Fig. 2 Vibration mode diagram of center component torsion mode

$$\begin{cases} \varphi_{si} = [x_{si}, y_{si}, 0]^T \\ \varphi_{ri} = [x_{ri}, y_{ri}, 0]^T \\ \varphi_{ci} = [x_{ci}, y_{ci}, 0]^T \\ \varphi_{pij} = [x_{pij}, y_{pij}, \theta_{pij}]^T \end{cases} \quad (4)$$

同一级行星排在同一直径方向上的两个行星轮的同一自由度的振型元素对应相等, 即:  $x_{p11} = -x_{p13}, y_{p11} = -y_{p13}, \theta_{p11} = -\theta_{p13}, x_{p12} = -x_{p14}, y_{p12} = -y_{p14}, \theta_{p12} = -\theta_{p14}, x_{p21} = -x_{p23}, y_{p21} = -y_{p23}, \theta_{p21} = -\theta_{p23}, x_{p22} = -x_{p24}, y_{p22} = -y_{p24}, \theta_{p22} = -\theta_{p24}$ 。

3) 一级行星轮振动模式

如图 4 所示, 该模式各阶固有频率都是单根, 振型向量中一、二级行星排中心部件平移振动和扭转振动都为零, 所有中心部件和二级行星轮都不产生振动, 只有一级行星轮在振动, 其振型向量特征为

$$\begin{cases} \varphi_{si} = [0, 0, 0]^T \\ \varphi_{ri} = [0, 0, 0]^T \\ \varphi_{ci} = [0, 0, 0]^T \\ \varphi_{pij} = [x_{pij}, y_{pij}, \theta_{pij}]^T \\ \varphi_{p2j} = [0, 0, 0]^T \end{cases} \quad (5)$$

一级四个行星轮同一自由度的振型元素对应相等, 即

$$\begin{cases} x_{p11} = -x_{p12} = x_{p13} = -x_{p14} \\ y_{p11} = -y_{p12} = y_{p13} = -y_{p14} \\ \theta_{p11} = -\theta_{p12} = \theta_{p13} = -\theta_{p14} \end{cases} \quad (6)$$

4) 二级行星轮振动模式

如图 5 所示, 该模式各阶固有频率都是单根, 振型向量中一、二级行星排中心部件平移振动和扭转振动都为零, 所有中心部件和一级行星轮都不产生振动, 只有二级行星轮在振动。

$$\begin{cases} \varphi_{si} = [0, 0, 0]^T \\ \varphi_{ri} = [0, 0, 0]^T \\ \varphi_{ci} = [0, 0, 0]^T \\ \varphi_{p2j} = [x_{p2j}, y_{p2j}, \theta_{p2j}]^T \\ \varphi_{pij} = [0, 0, 0]^T \end{cases} \quad (7)$$

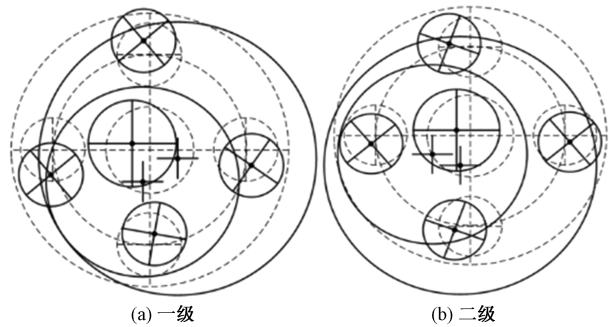


图 3 中心部件平移模式振型图

Fig. 3 Vibration mode diagram of center component translational mode

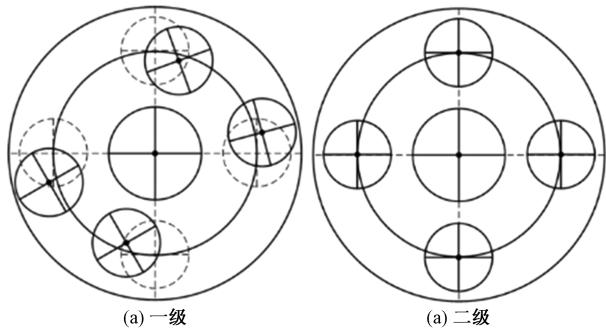


图4 一级行星轮模式振型图

Fig. 4 Vibration mode diagram of the first stage planetary mode

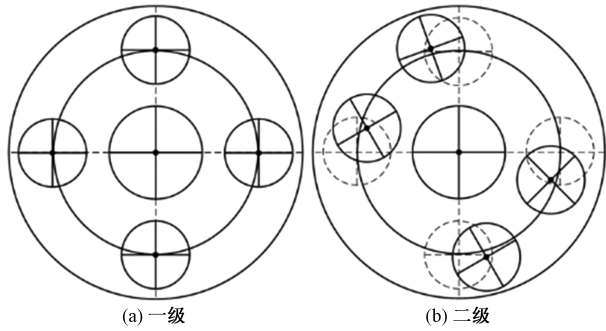


图5 二级行星轮模式振型图

Fig. 5 Vibration mode diagram of the second stage planetary mode

二级4个行星轮同一自由度的振型元素对应相等,即

$$\begin{cases} x_{p21} = -x_{p22} = x_{p23} = -x_{p24} \\ y_{p21} = -y_{p22} = y_{p23} = -y_{p24} \\ \theta_{p21} = -\theta_{p22} = \theta_{p23} = -\theta_{p24} \end{cases} \quad (8)$$

### 1.2 系统振动能量分布状态及其传递规律

行星齿轮系统的振动能量包括振动势能和振动动能两部分,在固有频率及其振型分析的基础上,结合式(1)得到行星齿轮系统的振动动能  $E$  和振动势能  $U$  的表达式为

$$E = \frac{1}{2} \omega_q^2 \boldsymbol{\varphi}_q^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_q \quad (9)$$

$$U = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}_q^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_q \quad (10)$$

通过式(9)和式(10)可得各部件第  $q$  阶的振动动能和振动势能的计算式分别为

$$\begin{cases} E_{ij} = \frac{1}{2} m_{ij} \omega_q^2 [(x_{ij}^q)^2 + (y_{ij}^q)^2] \\ E_{pin} = \frac{1}{2} m_{pin} \omega_q^2 [(x_{pin}^q)^2 + (y_{pin}^q)^2] \\ E_{ij\theta} = \frac{1}{2r_{ij}^2} I_{ij} \omega_q^2 (\theta_{ij}^q)^2 \\ E_{pin\theta} = \frac{1}{2r_{pin}^2} I_{pin} \omega_q^2 (\theta_{pin}^q)^2 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} U_{ij} = \frac{1}{2} k_{ij} [(x_{ij}^q)^2 + (y_{ij}^q)^2] \\ U_{pin} = \frac{1}{2} k_{pin} [(\delta_{pinr}^q)^2 + (\delta_{pint}^q)^2] \\ U_{ij\theta} = \frac{1}{2} k_{ij\theta} (\theta_{ij}^q)^2 \\ U_{spin} = \frac{1}{2} k_{spi} (\delta_{spin}^q)^2 \\ U_{rpin} = \frac{1}{2} k_{rpi} (\delta_{spin}^q)^2 \end{cases} \quad (12)$$

其中,啮合线变形量及行星轮位移量表示为

$$\begin{cases} \delta_{spin}^q = -x_{si}^q \sin(\psi_n - \alpha_s) + y_{si}^q \cos(\psi_n - \alpha_s) - x_{pin}^q \sin \alpha_s - y_{pin}^q \cos \alpha_s + u_{si}^q + u_{pin}^q \\ \delta_{rpin}^q = -x_{ri}^q \sin(\psi_n - \alpha_r) + y_{ri}^q \cos(\psi_n - \alpha_r) + x_{pin}^q \sin \alpha_r - y_{pin}^q \cos \alpha_r + u_{ri}^q - u_{pin}^q \\ \delta_{pinr}^q = y_{ci}^q \sin \psi_n + x_{ci}^q \cos \psi_n - x_{pin}^q \\ \delta_{pint}^q = y_{ci}^q \cos \psi_n - x_{ci}^q \sin \psi_n - y_{pin}^q + u_{ci}^q \end{cases} \quad (13)$$

式中:  $i=1,2$  表示行星排的级数;  $n=1,2,\dots,N$  代表行星轮编号;  $N$  为行星轮个数;  $m_{ij}, I_{ij}, k_{ij}, k_{ij\theta}$  ( $i=1,2; j=s,r,c$ ) 分别代表第  $i$  级行星排中部件  $j$  的质量、惯量、轴承支撑刚度和轴系扭转刚度;  $r_{ij}$  和  $r_{pin}$  分别代表第  $i$  级行星排中部件  $j$  的半径和第  $n$  个行星轮半径。

通过对式(11)和式(12)分析可以得出,系统振动能量的分布与振型特征密切相关,确定系统质量、惯量、刚度的参数就基本可以明确系统的能量分布状态及其影响关系。系统扭转振动模式下振动能量与中心部件的质量及其轴承支撑刚度无关;系统平移振动模式下振动能量与中心部件惯量和轴系扭转刚度无关;系统行星轮振动模式下振动能量与中心部件的质量、惯量、轴承支撑刚度、轴系刚度无关。

在振动能量分布状态及参数影响规律分析的基础上,不考虑系统阻尼和摩擦的情况下进一步分析振动能量的传递规律。对式(1)左乘  $\boldsymbol{\varphi}_s^T$  可得

$$\omega_q^2 \boldsymbol{\varphi}_s^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_q = \boldsymbol{\varphi}_s^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_q \quad (14)$$

同理,对第  $s$  阶模态可得

$$\omega_s^2 \boldsymbol{\varphi}_q^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_s = \boldsymbol{\varphi}_q^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_s \quad (15)$$

式中:  $q$  和  $s$  分别为固有频率阶数;由于矩阵  $\mathbf{M}$  和  $\mathbf{K}$  具有对称性,因此将式(15)通过转置可得

$$\omega_s^2 \boldsymbol{\varphi}_s^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_q = \boldsymbol{\varphi}_s^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_q \quad (16)$$

将式(16)与式(14)求差可得

$$(\omega_s^2 - \omega_q^2) \boldsymbol{\varphi}_s^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_q = 0 \quad (17)$$

式(17)对任意  $q$  和  $s$  的取值都成立,因此存在  $s=q$  和  $s \neq q$  两种情况。当  $s \neq q$  时,则系统存在关

系  $\varphi_s^T M \varphi_q = 0$  和  $\varphi_s^T K \varphi_q = 0$ , 此时系统的第  $q$  阶模态惯性力和模态弹性力对第  $s$  阶模态振动位移做功都为零, 说明不同振动阶次之间的振动势能和振动动能没有发生转移; 当  $s = q$  时, 系统的第  $q$  阶模态惯性力和模态弹性力对第  $s$  阶模态振动位移做功都不为零, 因此同一振动阶次之间的振动势能和振动动能发生了转移。

## 2 参数对系统模态跃迁现象及振动能量分布状态的影响规律

以两级行星齿轮传动系统为研究对象, 且在前期研究过程中发现, 连接轴弯曲刚度对系统模态能量分布影响较为显著, 因此以连接轴弯曲刚度为例进行详细分析。两级行星齿轮传动系统的 42 阶固有频率随一、二排太阳轮连接轴弯曲刚度变化的轨迹如图 6 所示。由图 6(a) 可以看出, 随着连接轴弯曲刚度的增加, 系统 1~13 阶固有频率基本保持不变, 且没有发生模态跃迁及轨迹相交现象; 当刚度值小于  $2 \times 10^9$  N/m, 对 14~27 阶固有频率影响较大, 当刚度值大于  $3 \times 10^9$  N/m, 则对 28~42 阶固有频率影响较大, 且在这两个范围内都发生了明显的模态跃迁及轨迹相交现象。图 6(b) 为第 28、29、30 阶固有频率的轨迹变化图, 在 A 点处发生了模态跃迁及轨迹相交。 $\omega_{28}$  沿着 A→E→C 变化,  $\omega_{29}$  沿着 A→E→D 变化,  $\omega_{30}$  沿着 B→E→D 变化。在 E 点之前,  $\omega_{30}$  为单根, 为二排行星轮振动模式,  $\omega_{28}$  和  $\omega_{29}$  为同一固有频率的二重根, 为中心部件平移模式; 在 E 点之后,  $\omega_{28}$  为单根, 为二排行星轮振动模式,  $\omega_{30}$  和  $\omega_{29}$  为同一固有频率的二重根, 为中心部件平移模式。 $\omega_{28}$  和  $\omega_{29}$  在 E 点处发生分离,  $\omega_{30}$  和  $\omega_{29}$  在 E 点发生相交,  $\omega_{30}$  和  $\omega_{28}$  发生模态跃迁。

系统 28~30 阶固有频率在发生模态跃迁和模态相交前后的振动势能分布情况如图 7 所示, 其对应的轨迹线上位置如图 6(b) 所示。图 7(a) 为发生模态跃迁前  $\omega_{28}$  在图 6(b) 中 A 点对应的振动势能, 可以看出一、二排太阳轮轴的弹性势能  $U_{bs1s2}$  最大, 而后依次为二排行星轮轴承支撑的弹性势能  $U_{2pn}$ 、二排太阳轮-行星轮啮合势能  $U_{s2pn}$ 、一排齿圈-行星轮啮合势能  $U_{r1pn}$ , 其中  $n=2, 4$ ,  $\omega_{29}$  与  $\omega_{28}$  是频率值相等的二重根, 其振动势能与  $\omega_{28}$  基本相同, 只是含有行星轮的势能序号  $n$  不同, 此时  $n=1, 3$ 。图 7(b) 为发生模态跃迁前  $\omega_{30}$  在图 6(b) 中 B 点对应的振动势能,  $\omega_{30}$  为二排行星轮振动模式, 因此其势能主要集中在有二排行星轮参与的过程中, 从大到小依次为  $U_{2pn}$ 、 $U_{s2pn}$  和  $U_{r2pn}$ , 其中  $n=1, 2, 3, 4$ 。

发生模态跃迁后  $\omega_{28}$  在图 6(b) 中 C 点对应的

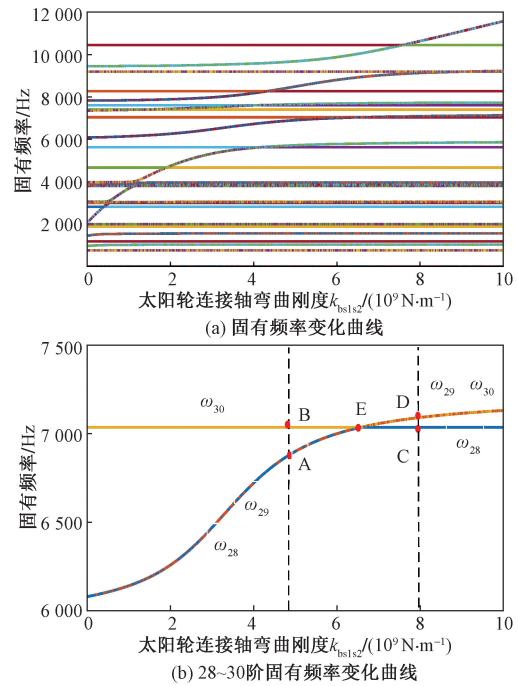


图 6 固有频率随太阳轮连接轴弯曲刚度变化轨迹  
Fig. 6 The natural frequency varies with the bending stiffness of sun gear connecting shaft

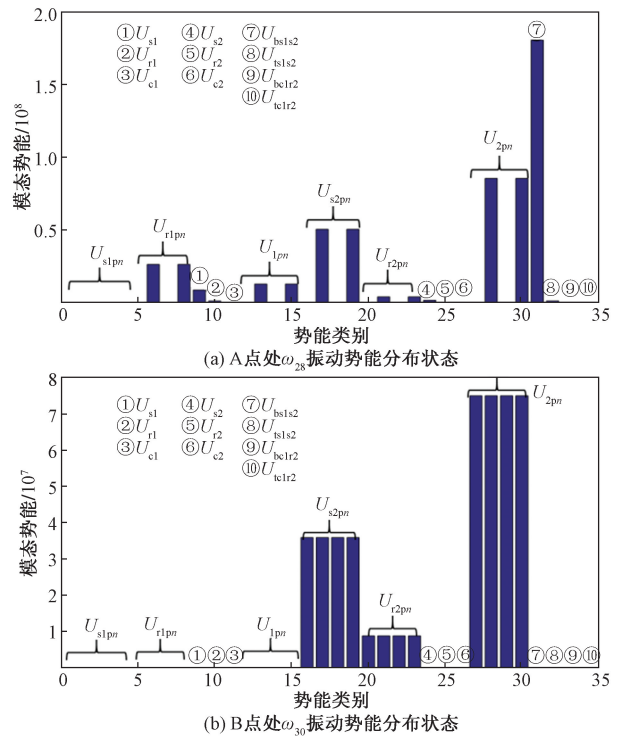


图 7 模态跃迁前振动势能变化趋势图  
Fig. 7 Trend diagram of vibrational potential energy before modal transition

振动势能如图 8(a) 所示, 可以看出其分布状态与模态跃迁前  $\omega_{30}$  的振动势能分布基本相同, 此时  $\omega_{28}$  为二排行星轮模式; 图 8(b) 为发生模态跃迁后  $\omega_{30}$  在

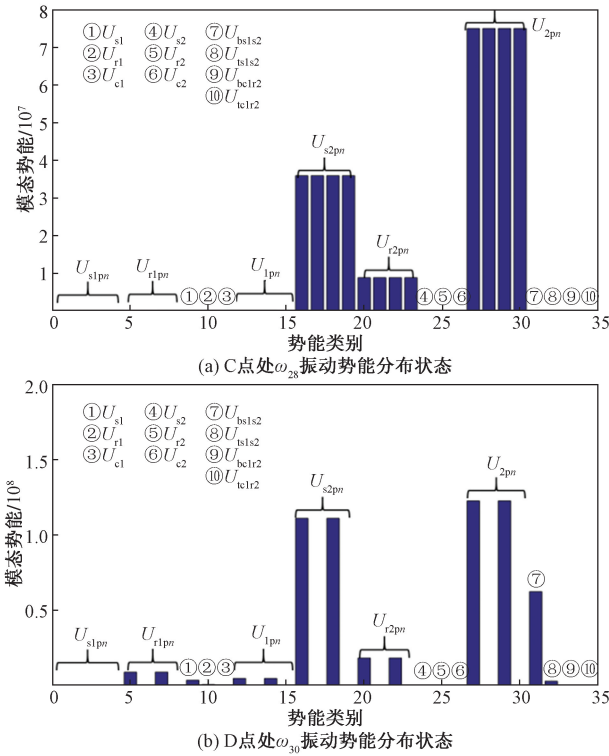


图8 模态跃迁后振动势能变化趋势图  
Fig. 8 Trend diagram of vibrational potential energy after modal transition

图6(b)中D点对应的振动势能,此时 $\omega_{30}$ 为中心部件平移模式,其振动势能从大到小依次为 $U_{2pn}$ 、 $U_{s2pn}$ 和 $U_{r2pn}$ ,其中 $n=1,3$ 。 $\omega_{29}$ 与 $\omega_{30}$ 是频率相等的二重根,其振动势能的分布状态与 $\omega_{30}$ 基本相同,只是含有行星轮的势能序号 $n$ 不同,此时 $n=2,4$ 。

经过对图7和图8的对比分析,随着一、二排太阳轮轴弯曲刚度的增加,在模态跃迁和模态相交发生前后,单根固有频率对应的振动势能保持不变,重根对应的中心部件平移模式中的一、二排太阳轮的弹性势能 $U_{bs1s2}$ 降低,二排势能 $U_{2pn}$ 、 $U_{s2pn}$ 和 $U_{r2pn}$ 增加。

整体来看,随着太阳轮连接轴弯曲刚度的增加,一、二排太阳轮的相对振动位移逐渐减小,连接轴弯曲势能逐渐降低,而二排内、外啮合势能和二排行星轮的轴承支撑势能大幅增加,说明太阳轮连接轴的弯曲势能逐渐转化为与二排行星轮振动相关的势能。随着连接轴弯曲刚度数值的不断增加和振动势能的逐渐转换,导致两排太阳轮的相对平移振动减弱,二排行星轮振动增加,当到达模态跃迁的临界刚度值后,第28阶和第30阶固有频率的振型及其模态势能分布状态完全发生改变;而后随着连接轴弯曲刚度数值的继续增加,第28阶模态势能趋于稳定不再变化,即系统28阶模态势能状态不再受太阳轮连接轴弯曲刚度的影响。

### 3 固有频率对系统参数的灵敏度分析及变区间动态灵敏度特性

#### 3.1 固有频率对系统振动参数的灵敏度分析

假定 $\omega_i$ 为第 $i$ 阶固有频率, $\varphi_i$ 为第 $i$ 阶固有频率对应的特征向量,则根据式(1)可得

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \varphi_i = 0 \tag{18}$$

当特征值为单根时,对式(11)左乘 $\varphi_i^T$ ,并对其进行求导可得

$$(\varphi_i^T)' (\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \varphi_i + \varphi_i^T (\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M})' \varphi_i + \varphi_i^T (\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \varphi_i' = 0 \tag{19}$$

由于 $|\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}|$ 为对称矩阵并且结合式(18)可得

$$\varphi_i^T (\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M})' \varphi_i = 0 \tag{20}$$

归一化后可得

$$\lambda_i' = \varphi_i^T (\mathbf{K}' - \lambda_i \mathbf{M}') \varphi_i \tag{21}$$

$$\varphi_i' = -\frac{1}{2} (\varphi_i^T \mathbf{M}' \varphi_i) \varphi_i + \sum_{k=1, k \neq i}^L \frac{\varphi_k^T (\mathbf{K}' - \lambda_i \mathbf{M}') \varphi_i}{\lambda_i - \lambda_k} \varphi_k \tag{22}$$

$$\lambda_i'' = 2\varphi_i^T (\mathbf{K}' - \lambda_i \mathbf{M}') \varphi_i + \varphi_i^T (\mathbf{K}'' - 2\lambda_i' \mathbf{M}' - \lambda_i \mathbf{M}'') \varphi_i \tag{23}$$

当特征值为重根时,设 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m$ , $m$ 为重根数。对式(21)求导可得

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \varphi_i' = (-\mathbf{K}' + \lambda_i \mathbf{M}' + \lambda_i' \mathbf{M}) \varphi_i \tag{24}$$

可以求得 $\lambda_i''$ 为

$$\lambda_i'' = 2\varphi_i^T (\mathbf{K}' - \lambda_i \mathbf{M}') v_i - \varphi_i^T (-\mathbf{K}'' + \lambda_i \mathbf{M}'' + 2\lambda_i' \mathbf{M}') \varphi \tag{25}$$

式中: $i=1,2,\dots,m$ ;  $v_i$ 为除单根外其他主模态对重根特征向量的敏感度贡献量。

$$v_i = \sum_{k=m+1}^L \frac{\varphi_k^T (\lambda_i \mathbf{M}' - \mathbf{K}') \varphi_i}{\lambda_k - \lambda_i} \varphi_k \tag{26}$$

以系统外啮合刚度为例,对系统的灵敏度进行分析。对于系统参数矩阵 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{K}$ ,只有包含目标参数时其导数才不为0,因此,对于啮合刚度应有 $\mathbf{M}' = 0, \mathbf{K}'' = 0$ ,求特征值和特征向量的灵敏度关键在于求解 $\mathbf{K}'$ 。假设特征向量为

$$\begin{cases} \varphi_i = (\varphi_s^i, \varphi_r^i, \varphi_c^i, \varphi_1^i, \varphi_2^i, \dots, \varphi_N^i) \\ \varphi_j = (\varphi_{jk}^i, \varphi_{jr}^i, \varphi_{ju}^i), \quad j = s, r, c \end{cases} \tag{27}$$

行星系统中心构建扭转振动模式和行星轮振动模式的特征值为单根,将式(27)代入式(18)~式(21)可得

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial k_{sp}} = \sum_{n=1}^N (\delta_{sn}^i)^2 \tag{28}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial k_{sp}} = \sum_{k=1, k \neq i}^L \sum_{n=1}^N \frac{\delta_{sn}^i \delta_{sn}^k}{\lambda_i - \lambda_k} \varphi_k \tag{29}$$

式中:  $k_{sp}$  为太阳轮和行星轮的啮合刚度;  $\delta_{sn}^i$  为第  $i$  阶振型对应的第  $n$  个行星轮与太阳轮的啮合线变形量。

$$\delta_{sn}^i = y_s \cos(\psi_n - \alpha_s) - x_s \sin(\psi_n - \alpha_s) - \eta_n \cos \alpha_s - \zeta_n \sin \alpha_s + u_s + u_n \quad (30)$$

式(30)中:  $y_s$  为太阳轮  $y$  方向上的振型;  $\psi_n$  为第  $n$  个行星轮的初始相位角;  $\alpha_s$  为外啮合压力角;  $x_s$  为太阳轮  $x$  方向上振型;  $\eta_n$  为第  $n$  个行星齿轮沿径向方向的振型;  $u_s$  为第  $n$  个行星齿轮沿切向方向的振型;  $u_n$  为第  $n$  个行星齿轮扭转方向的振型。

系统中心构件的平移振动模式具有二重特征值, 即  $\lambda_1 = \lambda_2$ , 其特征向量可以写为  $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2]$ , 并且满足  $\varphi^T M \varphi = I_{2 \times 2}$ , 由式(28)和式(29)可以计算  $\lambda'_{1,2}$ 。

$$D = \varphi^T K \varphi = \sum_{n=1}^N \begin{bmatrix} (\delta_{sn}^1)^2 & \delta_{sn}^1 \delta_{sn}^2 \\ \delta_{sn}^1 \delta_{sn}^2 & (\delta_{sn}^2)^2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

由于存在关系, 即

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^N \sin \varphi_n = 0 \\ \sum_{n=1}^N \cos \varphi_n = 0 \\ \sum_{n=1}^N (\cos^2 \varphi_n - \sin^2 \varphi_n) = 0 \\ \sum_{n=1}^N (\cos \varphi_n \sin \varphi_n) = 0 \end{cases} \quad (32)$$

则有

$$\sum_{n=1}^N (\delta_{sn}^1)^2 = \sum_{n=1}^N (\delta_{sn}^2)^2, \sum_{n=1}^N \delta_{sn}^1 \delta_{sn}^2 = 0 \quad (33)$$

因此  $\lambda_{1,2}$  关于啮合刚度的灵敏度具有与式(28)相同的形式。

$$\frac{\partial \lambda_{1,2}}{\partial k_{sp}} = \sum_{n=1}^N (\delta_{sn}^i)^2 \quad (34)$$

由于存在  $\lambda_i = \omega_i^2, \lambda'_i = 2\omega_i \omega'_i$  关系, 经过分析整理, 得到系统固有频率对刚度参数、质量和惯量参数的敏感度为

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial p} = \begin{cases} \frac{1}{2\omega_i} \sum_{n=1}^N (\delta_{jn}^i)^2, & \rho = k_{sp}, j = s \\ & \text{或 } \rho = k_{rp}, j = r \\ \frac{1}{2\omega_i} \sum_{n=1}^N [(\delta_{pmr}^i)^2 + (\delta_{pmt}^i)^2], & \rho = k_p \\ \frac{1}{2\omega_i} (x_j^2 + y_j^2), & \rho = k_j, j = s, r, c \\ \frac{1}{2\omega_i} u_j^2, & \rho = k_{ju}, j = s, r, c \end{cases} \quad (35)$$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial p} = \begin{cases} -\frac{\omega_i}{2} \sum_{n=1}^N \frac{(u_n)^2}{r_p^2}, & \rho = I_p \\ -\frac{\omega_i}{2} \sum_{n=1}^N [(\zeta_n)^2 + (\eta_n)^2], & \rho = m_p \\ -\frac{\omega_i}{2} [(x_j)^2 + (y_j)^2], & \left\{ \begin{array}{l} \rho = m_j, \\ j = s, r, c \end{array} \right. \\ -\frac{\omega_i}{2} \frac{(u_j)^2}{r_j^2}, & \left\{ \begin{array}{l} \rho = I_j, \\ j = s, r, c \end{array} \right. \end{cases} \quad (36)$$

式(36)中:

$$\begin{cases} \delta_{sn}^i = -x_s^i \sin(\psi_n - \alpha_s) + y_s^i \cos(\psi_n - \alpha_s) - \zeta_n^i \sin \alpha_s - \eta_n^i \cos \alpha_s + u_s^i + u_n^i \\ \delta_{rn}^i = -x_r^i \sin(\psi_n - \alpha_r) + y_r^i \cos(\psi_n - \alpha_r) + \zeta_n^i \sin \alpha_r - \eta_n^i \cos \alpha_r + u_r^i - u_n^i \\ \delta_{pmr}^i = y_c^i \sin \psi_n + x_c^i \cos \psi_n - \zeta_n^i \\ \delta_{pmt}^i = y_c^i \cos \psi_n - x_c^i \sin \psi_n - \eta_n^i + u_c^i \end{cases} \quad (37)$$

式(35)和式(36)为行星齿轮传动系统固有频率关于质量、刚度参数的灵敏度计算式。通过分析可以看出, 行星轮振动模式的固有频率受各排行星齿轮自身轴承支撑刚度、质量和啮合刚度的影响, 与其他部件的参数无关; 中心部件的扭转振动模式的固有频率仅受中心部件得惯量、扭转刚度及啮合刚度影响; 中心部件平移振动模式的固有频率只与中心部件质量和径向支撑刚度及啮合刚度有关。可以看出, 齿轮啮合刚度作为计算啮合力的关键参数, 对整个系统的固有特性都有着重要作用。

### 3.2 变区间动态灵敏度特性研究

参数在一定范围内的变化会导致固有频率的振型及模态能量分布状态发生改变, 而参数灵敏度又与模态振型存在联系。因此, 本节主要研究随参数变化出现的与模态跃迁现象相对应的动态灵敏度变化特性, 以及参数取值范围与固有频率灵敏度之间的关系, 为参数优化时选定合理的取值范围提供理论指导。

以一排太阳轮轴承支撑刚度  $k_{bs1}$  为例来说明参数灵敏度的动态变化现象。图9(a)和图9(b)分别为系统固有频率及其灵敏度随参数  $k_{bs1}$  改变的变化趋势示意图。从图9(a)可以看出, 刚度参数  $k_{bs1}$  在  $1.9 \times 10^8$  N/m 左右的范围内变化导致第7~9阶固有频率发生了模态跃迁现象; 同时, 由图9(b)可以看到, 在参数变化引发系统固有频率发生模态跃迁现象的同时, 刚度参数  $k_{bs1}$  在区间  $1.9 \times 10^8 \sim 2 \times 10^8$  N/m 对系统7、8、9阶固有频率的灵敏度也发生了跃迁现象。在刚度值为  $1.9 \times 10^8$  N/m 处第7阶

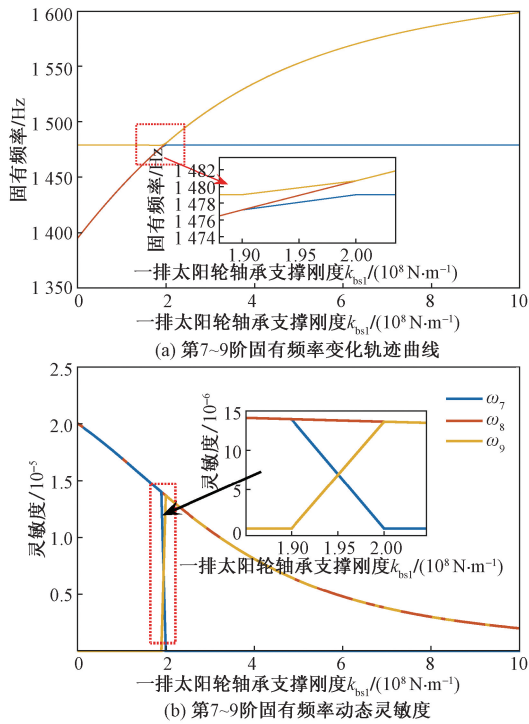


图9 第7~9阶固有频率对一排太阳轮轴承支撑刚度灵敏度变化趋势

Fig. 9 The sensitivity trend of the 7th ~9th order natural frequency to the first stage sun gear bearing support stiffness

固有频率灵敏度瞬间下降,说明在刚度值大于 $1.9 \times 10^8$  N/m后,刚度参数的变化不再对其产生影响;同时,在 $1.9 \times 10^8$  N/m处第9阶固有频率灵敏度瞬间增加,说明在刚度值大于 $1.9 \times 10^8$  N/m后,刚度参数的变化开始对其产生影响;一排太阳轮轴承支撑刚度只在区间 $1 \times 10^7 \sim 1.9 \times 10^8$  N/m对系统第7阶固有频率能够起到显著且有效的调节作用。

与刚度参数变化引起固有频率灵敏度跃迁的作用相同,质量参数的变化也可以引起相应固有频率的灵敏度发生明显的变化及跃迁现象。图10中随着一排太阳轮质量的增加,参数对24~26阶固有频率的灵敏度发生显著变化,在5.9 kg处第26阶固有频率灵敏度下降,质量大于6 kg后灵敏度基本为零,说明在质量值大于6 kg后,参数的变化不再对其产生影响;同时,在5.9 kg处第24阶固有频率灵敏度增加,说明在质量值大于5.9 kg后,参数的变化会对其产生影响;一排太阳轮质量只在区间5~5.9 kg对系统第26阶固有频率能够起到有效调节作用。

通过以上分析可知,在行星齿轮传动系统中,固有频率对参数的灵敏度受模态跃迁影响的,在参数优化设计过程中其取值应避开模态跃迁点,因此提出基于模态跃迁现象划分参数灵敏度区间的方法,其流程如图11所示。

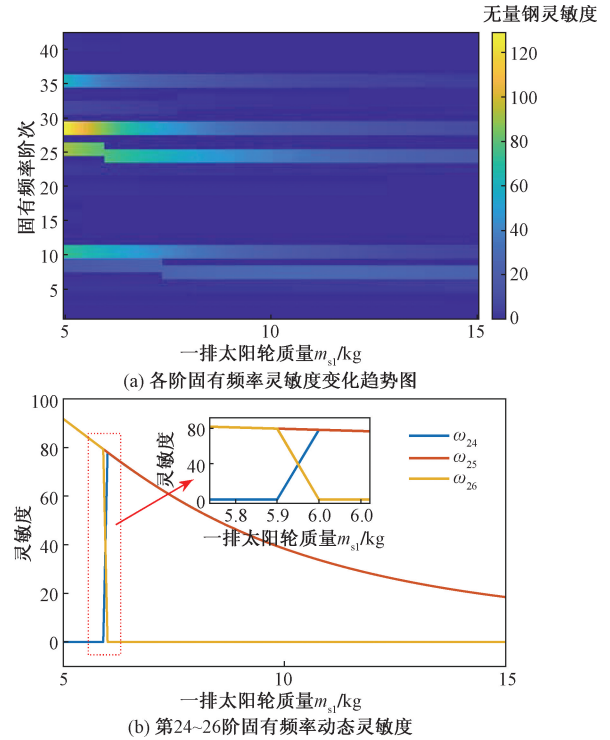


图10 固有频率对一排太阳轮质量灵敏度变化趋势  
Fig. 10 The sensitivity trend of the natural frequency to the mass of the first stage sun gear

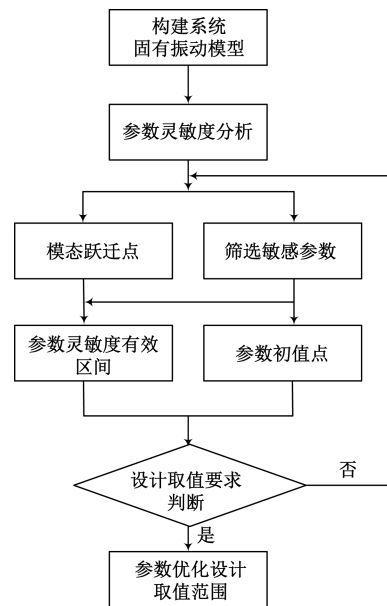


图11 参数优化设计取值范围筛选流程图  
Fig. 11 Parameter optimization design value range selection flowchart

### 4 结论

通过推导系统固有频率的参数灵敏度方程,研究模态跃迁现象对参数灵敏度的影响规律,揭示固有频率灵敏度随参数取值改变的动态变化规律,提

出基于模态跃迁现象划分参数灵敏度区间的方法,并得到以下结论。

(1)行星齿轮系统的质量、刚度、惯量参数对系统的固有频率、振型特征和能量分布状态起关键作用。在中心部件扭转振动模式下,系统振动能量主要聚集在中心部件扭转动能;在中心部件平移振动模式下,系统振动能量主要聚集在中心部件平移势能;在行星轮振动模式下,系统振动能量主要聚集在内、外啮合势能和行星齿轮的平移势能上。

(2)确定两级行星齿轮传动系统中质量、惯量和刚度等振动参数即可决定系统的振动能量分布状态,能量只能在同一阶模态的各部件之间相互转换。

(3)参数变化引起的模态跃迁现象,会导致系统某阶模态的振型发生改变,使相应固有频率对参数的灵敏度发生变化。因此,在工程设计过程中需要预先分析参数与系统固有特性及灵敏度之间的关系,避免在设计参数的取值范围内出现跃迁现象。

#### 参 考 文 献

- [1] Kahraman A. Natural modes of planetary gear trains[J]. *Journal of Sound & Vibration*, 1994, 173(1): 125-130.
- [2] Lin J, Parker R G. Analytical characterization of the unique properties of planetary gear free vibration[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1999, 116: 316-322.
- [3] Lin J, Parker R. Structured vibration characteristics of planetary gears with unequally spaced planets[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 233(5): 921-928.
- [4] Guo Y C, Parker R G. Purely rotational model and vibration modes of compound planetary gears[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2010(45): 365-377.
- [5] Eritenel T, Robert G, Parker. Modal properties of three-dimensional helical planetary gears [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 325: 397-420.
- [6] Eritenel T, Parker R G. Vibration modes of helical planetary gears [C]//Proceedings of the ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE. San Diego; ASME, 2009: 167-176.
- [7] Mo S, Zhang T, Jin GG, et al. Analytical investigation on load sharing characteristics of herringbone planetary gear train with flexible support and floating sun gear-ScienceDirect [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2020, 144. DOI:10.1016/j.mechmachtheory.2019.103670.
- [8] Dong B, Parker R G. Vibration of general symmetric systems using group theory [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2021, 503. DOI:10.1016/J.JSV.2021.116087.
- [9] 张策. 机械系统动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008. Zhang Ce. *Mechanical system dynamics*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2008.
- [10] 王世宇, 张策, 宋轶民, 等. 行星传动固有特性分析[J]. 中国机械工程, 2005, 16(16): 1461-1465.
- Wang Shiyu, Zhang Ce, Song Yimin, et al. Analysis of inherent characteristics of planetary transmission [J]. *China Mechanical Engineering*, 2005, 16(16): 1461-1465.
- [11] 王世宇, 宋轶民, 张策, 等. 行星齿轮传动的基本参数对动态特性的影响[J]. 中国机械工程, 2005, 16(7): 615-617.
- Wang Shiyu, Song Yimin, Zhang Ce, et al. The influence of basic parameters of planetary gear transmission on dynamic characteristics [J]. *China Mechanical Engineering*, 2005, 16(7): 615-617.
- [12] Liu H, Zhan Z. Modal properties of a two-stage planetary gear system with a Timoshenko beam as the intermediate shaft model [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 2022, 236(2/3): 353-365.
- [13] 王均刚, 陈胜, 单正昂, 等. 基于动态性能分析的风电增速箱NW型行星齿轮综合修形方法[J]. 科学技术与工程, 2023, 23(21): 9032-9041.
- Wang Jungang, Chen Sheng, Shan Zhengang, et al. Comprehensive modification method for NW type planetary gears in wind power gearboxes based on dynamic performance analysis [J]. *Science Technology and Engineering*, 2023, 23(21): 9032-9041.
- [14] Xiao Z, Cao J, Yu Y. Mathematical modeling and dynamic analysis of planetary gears system with time-varying parameters [J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2020, 2020: 1-9.
- [15] 蔡仲昌, 刘辉, 项昌乐, 等. 车辆行星传动系统扭转振动固有特性及灵敏度分析[J]. 中国机械工程, 2011, 22(1): 96-101.
- Cai Zhongchang, Liu Hui, Xiang Changle, et al. Natural characteristics and sensitivity analysis of torsional vibration in vehicle planetary transmission systems [J]. *China Mechanical Engineering*, 2011, 22(1): 96-101.
- [16] Yang W, Tang X. Modelling and modal analysis of a hoist equipped with two-stage planetary gear transmission system [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, 2017, 231(4): 739-749.
- [17] 郝慧荣, 周冬, 王海滨, 等. 行星齿轮转向桥的设计与分析 [J]. 科学技术与工程, 2022, 22(23): 10278-10285.
- Hao Huirong, Zhou Dong, Wang Haibin, et al. Design and analysis of planetary gear steering axles [J]. *Science Technology and Engineering*, 2022, 22(23): 10278-10285.
- [18] 陈林凯. 行星齿轮固有特性研究与模态分析应用[D]. 郑州: 郑州大学, 2018.
- Chen Linkai. Research on inherent characteristics of planetary gears and application of modal analysis [D]. Zhengzhou: Zhengzhou University, 2018.
- [19] 郭昊维, 陈长征. 某纯电动汽车减速器模态分析[J]. 噪声与振动控制, 2018, 38(S2): 388-391.
- Guo Haowei, Chen Changzheng. Modal analysis of a pure electric vehicle reducer [J]. *Noise and Vibration Control*, 2018, 38(S2): 388-391.
- [20] 龙海洋, 刘畅, 李耀刚, 等. 变速箱行星轮系的动力学仿真 [J]. 科学技术与工程, 2020, 20(26): 10934-10941.
- Long Haiyang, Liu Chang, Li Yaogang, et al. Dynamic simulation of planetary gear systems in gearboxes [J]. *Science Technology and Engineering*, 2020, 20(26): 10934-10941.