



DOI:10.12404/j.issn.1671-1815.2309894

引用格式:彭红,周彬,孙艳,等. 向量值偏微分方程约束控制的图像修复模型[J]. 科学技术与工程, 2025, 25(5): 2019-2026.

Peng Hong, Zhou Bin, Sun Yan, et al. Vector-valued PDE-constrained image inpainting model[J]. Science Technology and Engineering, 2025, 25(5): 2019-2026.

向量值偏微分方程约束控制的图像修复模型

彭红¹, 周彬^{1,2*}, 孙艳¹, 张凌海¹, 魏崑³

(1. 西南石油大学理学院, 成都 610500; 2. 西南石油大学人工智能研究院, 成都 610500;
3. 西安理工大学计算机科学与工程学院, 西安 710048)

摘要 图像修复问题中,局部细节特征的辨识修复和全局特征的保护是至关重要的。基于分数阶偏微分方程的模型具有丰富的演化行为能力,在图像修复中能较好地理解图像细节并兼具一定的锐化作用,但也易出现不能准确辨识较大尺度特征和过度锐化等问题。为此提出以图像整体特征的总变差能量为目标函数,空间分数阶向量值 Cahn-Hilliard 方程为约束的最优控制模型,以达到局部细节修复和整体特征保持的均衡效果。通过 L_2 梯度流、 H^{-1} 梯度流和凸分裂设计非凸约束条件的数值计算格式,再结合分裂 Bregman 方法优化目标函数,并引入灰度级动态调整策略,保持灰度级辨识能力的同时,进一步提升计算效率。数值实验表明,新模型修复结果的峰值信噪比(peak signal to noise ratio, PSNR)相较其他方法提升 0.371 8 ~ 9.935 2 dB,结构相似指数(structural similarity, SSIM)表现出较强的竞争力,且在碎片破损的图像上更具效用;相较传统的分数阶方程模型,计算时间减少 49.50% ~ 52.91%。

关键词 图像修复; 分数阶 Cahn-Hilliard 方程; 分裂 Bregman 法; 凸分裂; 总变差; 灰度级动态调整

中图分类号 TP391.41; **文献标志码** A

Vector-valued PDE-constrained Image Inpainting Model

PENG Hong¹, ZHOU Bin^{1,2*}, SUN Yan¹, ZHANG Ling-hai¹, WEI Wei³

(1. School of Science, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, China;
2. Institute of Artificial Intelligence, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, China;
3. School of Computer Science and Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

[Abstract] In image inpainting, it is crucial that the identification and inpainting of local detail features and the preservation of global features. The models based on fractional-order partial differential equations were characterized by rich evolutionary behaviors, which allow image details to be effectively understood and a certain sharpening effect to be exhibited in image inpainting. However, issues such as inaccurate identification of large-scale features and over-sharpening are prone to be encountered. An optimal control model was proposed and the objective function was defined by the total variation energy of image global features and the constraint was formulated by a spatial fractional-order vector-valued Cahn-Hilliard equation, aiming to achieve a balanced effect between local detail restoration and preservation of global features. L_2 gradient flow, H^{-1} gradient flow, and convex splitting were applied to design a numerical scheme for non-convex constraint conditions. And then the split bregman method was used to optimize the objective function with a dynamic grayscale adjustment strategy was introduced to maintain grayscale discrimination capability while enhancing computational efficiency. The numerical experiments demonstrate that the new model achieves an improvement on peak signal to noise ratio(PSNR) ranging from 0.371 8 dB to 9.935 2 dB compared to other methods, exhibiting strong competitiveness in terms of structural similarity(SSIM) and greater effectiveness on images with fragmental damages. Moreover, compared to traditional fractional-order equation models, the computational time is reduced by a factor of 49.50% to 52.91%.

[Keywords] image inpainting; fractional Cahn-Hilliard equation; split Bregman method; convex splitting; total variation; gray scale dynamic adjustment

图像处理领域主要包括图像的分割、去噪、修复和压缩编码等。图像修复是一种从未损坏区域获取信息填充修补破损区块(目标)的技术^[1],可应

用于许多实际领域,如旧物复原^[2-3]、证物修复^[4]、医学辅助^[4]等。围绕不同图像特征和修复技术原理,已产生众多研究成果,主要有基于实例的图像

收稿日期: 2023-12-15 修订日期: 2024-11-10

基金项目: 四川省科技计划(2021YJ0084); 四川省自然科学基金(2025ZNSFSC0496)

第一作者: 彭红(1999—),女,汉族,四川成都人,硕士研究生。研究方向:优化建模与数值算法。E-mail: peng_hong@yeah.net。

*通信作者: 周彬(1982—),男,汉族,浙江浦江人,博士,教授。研究方向:模式识别,图像处理。E-mail: binzhou@swpu.edu.cn。

修复方法^[5]、基于偏微分方程的方法^[6-14]、基于深度学习的模型^[15-18]等。基于偏微分方程的图像修复模型一般通过非线性扩散等方式对损坏区域进行处理。具有保持边缘清晰、更好地恢复纹理和细节信息、以及较好的鲁棒性等优势,能够有效提高图像的质量和清晰度^[19-20]。因此,现将重点研究基于偏微分方程的非纹理图像修复模型。

Chan 等^[6]将经典的全变差(total variation, TV)去噪模型拓展至图像修复。但是对大范围信息缺失的图像修复效果不佳,不能满足等照度线方向在损坏区域的连通性。引入考虑曲线结构的正则化项能量泛函,可以对 TV 修复模型进行有效扩展,即欧拉弹性泛函和曲率驱动扩散(curvature driven diffusion, CDD)模型^[7]。但当修复区域较大时,仍会产生模糊效果。

Burger 等^[8]通过引入 TV 函数次梯度的四阶变体,提出 TV-H-1 修复模型,能够取得优于 TV 修复模型的结果。此后陆续有学者提出更多高阶偏微分方程模型应用于图像修复问题。Bertozzi 等^[9-10]提出对二值图像有良好修复效果的 Cahn-Hilliard (CH) 方程模型。受益于高阶方程的更深层次特征表示能力,能够取得优异的修复效果,但计算代价较高。通过使用基于 FFT 的伪谱方法,有效减少了计算时间和计算存储。Novak 等^[21]引入一种正则化分类器替代修正的 Cahn-Hilliard 方程中的双阱势函数,降低了计算复杂度和运行时间。Zou 等^[11]基于 Perona-Malik 方程的平滑效应,将 Perona-Malik 方程引入 Cahn-Hilliard 方程,提出了一种四阶 PDE 修复模型。由于在保留振荡区域边缘方面,图像修复模型中使用的 H^{-1} 保真度项比使用 L_2 保真度项表现得更好。因此, Bai 等^[22]提出了一种基于 Ginzburg-Landau 泛函和 H^{-1} 范数的图像修复模型。并基于标量辅助变量法(scalar auxiliary variable, SAV),得出所提出模型的数值格式。Kumar 等^[23]引入图像的 Hessian L^2 范数的平方作为正则化项,并通过傅里叶域中的凸分裂得到线性四阶偏微分方程的半离散格式,用于灰度图像修复。最近, Benloghfyry 等^[24]利用时间分数 Caputo 导数的记忆效应来保证图像边缘和图像特征的清晰度。空间分数阶偏微分方程也常常被应用于图像修复问题,例如 Lian 等^[12]基于分数阶拉普拉斯算子奇异积分的定义,提出了两种模型分别用于无噪声和带噪声的图像修复。在一个以像素为中心的凸邻域上,给出一种适合于分数阶拉普拉斯算子的离散化形式,并能够在不同水平的图像细节区域上,通过自适应边缘检测器控制扩散修复行为。但是,获取特征信息依赖于所设定的凸邻域,缺少对整体特征的把握。现

有许多文献研究了空间分数阶 Cahn-Hilliard 方程的数值解法^[13-14, 24-25]。Bosch 等^[4]在提出了一个基于 Cahn-Hilliard 方程的多值图像修复模型,将二维 Cahn-Hilliard 修复模型推广到灰度值图像,为方便起见,后文简称为向量分数 Cahn-Hilliard 修复模型/VFCH。数值结果表明,采用凸分裂方法和傅里叶谱方法,使得峰值信噪比(peak signal to noise ratio, PSNR)、结构相似指数(structural similarity, SSIM)^[27]和图像质量显著增加。向量分数 Cahn-Hilliard 灰度值图像修复模型对于大块范围信息缺失的图像有较好的修复效果,但在损坏较大和灰度级数量较多的情况下,仍会出现修复效率较低的问题。Brkic 等^[26]通过构造线性系统求解分数阶 Cahn-Hilliard 修复模型,能够有效降低修复计算代价。

综上,现研究兼顾整体特征和局部细节,提出一种以向量分数阶 Cahn-Hilliard 方程为控制约束条件的总变差极小化图像修复模型,在通过多灰度级相位实现细节特征辨识修复的同时,优化整体特征保持效果,并引入灰度级动态调整策略以提高计算效率。

1 相关工作

1.1 TV 修复模型

针对图像边缘的修复问题, Chan 和 Shen 基于 Rudin 和 Osher 的全变差去噪模型^[28],提出了极小化泛函^[6],表达式为

$$J(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| dx + \frac{\omega_0}{2} \int_{\Omega_D} (u - f)^2 dx \quad (1)$$

式(1)中: ω_0 为拉格朗日乘子; $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 为图像区域; f 为给定待修复图像; $D \subset \Omega$ 为待修复域。修复结果可由关于 $u: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbf{R}$ 的演化方程计算得到,即

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \omega(u - f) \quad (2)$$

式(2)中: u 满足 Neumann 边界条件; ω 为保真度参数,用于平衡演化修复项和保真项的作用程度。

文献[6]中的相关实验结果表明该 TV 修复模型对于小尺度损坏的图像有较好的作用,且能同时取得一定的去噪效果。但由于 TV 模型的修复机制是用最短的直线距离来连接断裂的等照度线,并且仅根据梯度模决定扩散速率,因此在一些梯度模相近的平坦区域,会过度平滑图像的细节部分,使得边缘或纹理区域出现阶梯效应,导致修复效果不佳。

1.2 向量分数阶 Cahn-Hilliard 修复模型

Cahn-Hilliard 方程在模拟两相之间的界面运动时自动惩罚高曲率,这使其应用于图像修复时沿等照度线从受损区域边界处开始平滑地向内延伸。给定空间 $H^{-1}(\Omega) = \{u' \in [H^1(\Omega)]' \mid \langle u', 1 \rangle = 0\}$ 及内积定义

$\langle v_1, v_2 \rangle_{H^{-1}} = \int_{\Omega} \nabla(-\Delta)^{-1} v_1 \nabla(-\Delta)^{-1} v_2$, 则 Ginzburg-Landau 泛函及其 H^{-1} 梯度可表示为

$$E(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\gamma \varepsilon}{2} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \varphi(\mathbf{u}) \right\} dx \quad (3)$$

$$\text{grad}_{H^{-1}} E(\mathbf{u}) = (-\Delta) \text{grad}_{L^2} E(\mathbf{u}) \quad (4)$$

式中: $\text{grad}_{L^2} E(\mathbf{u}) = \varepsilon \Delta \mathbf{u} - \psi'(\mathbf{u})/\varepsilon$; Δ 为标准拉普拉斯算子。CH 方程可以看作上述泛函的 H^{-1} 梯度流^[29-30]。

Bosch 和 Stoll 在向量值 Cahn-Hilliard 方程^[30-31]基础上提出了空间分数阶灰度值修复模型^[4]。给定灰度级向量 $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_N)^T, 2 \leq N \leq 256$, 通过二值向量 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$ 表示像素值 $u = \mathbf{u}\mathbf{g}$ 。于是修正的向量值 CH 方程可以表示为

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\Delta \left[\varepsilon \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\varepsilon} P\psi'(\mathbf{u}) \right] + \omega(\mathbf{f} - \mathbf{u}) \quad (5)$$

且 $u_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 满足 Gibbs 单纯形, 即

$$\sum_{i=1}^N u_i(x, t) = 1, u_i(x, t) \geq 0, i = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

式(6)中: $\psi(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^N u_i^2 (1 - u_i)^2 / 4$ 。 $\varepsilon > 0$ 控制界面厚度, 正交投影 $P\xi = \xi - (\mathbf{1}\xi)\mathbf{1}/N$; \mathbf{f} 含义同 \mathbf{u} 。

该模型将灰度通道化, 并在各个通道上联合运用修正的 Cahn-Hilliard 方程模型进行二值图像修复^[33]。Bosch 和 Stoll 提出的向量分数 Cahn-Hilliard 修复模型具有分数阶微分方程的非局部和空间非均匀性质, 可以被视为经典修补模型的正则化, 并克服了过度平滑效应。相关实验结果表明, 该模型能够提高锐度和修复质量。

2 向量值 CH 方程约束的总变差极小化

2.1 新模型及数值格式

TV 模型在修复图像时产生的结果中可能出现明显的阶梯状边缘或块状伪影。为了减轻阶梯效应, 可以采用一些改进的方法, 如引入额外的约束条件或先验信息、使用变分模型的变形等。这些方法可以在保持边缘的同时尽量减少阶梯效应, 并获得边缘更平滑、更自然的图像结果。而向量值分数阶 Cahn-Hilliard 修复模型因其空间分数阶形式具有局部特征辨识能力, 在图像修复中能够有效地还原细节特征。因此构建以总变差能量泛函为目标函数, 向量值 CH 方程式(5)为约束条件的修复模型。应用变分极小化, 新模型可表示为

$$\min E(\mathbf{u}) = \|\nabla \mathbf{u}\|_1 + \frac{\omega}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{f}\|_2 \quad (7)$$

s. t.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\Delta \left[\varepsilon \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\varepsilon} P\psi'(\mathbf{u}) \right] + \omega(\mathbf{f} - \mathbf{u}) \quad (8)$$

设定初始条件和边界条件之后, 可以通过交替求解约束控制方程[式(8)]和极小化目标函数[式(7)]来求解该模型。

2.1.1 约束控制方程[式(8)]求解

引入能量泛函, 表达式为

$$\varepsilon_1(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left[\frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^N |\nabla u_i|^2 + \frac{1}{\varepsilon} P\psi(\mathbf{u}) \right] dx \quad (9)$$

$$\varepsilon_2(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \frac{\omega}{2} \sum_{i=1}^N (f_i - u_i)^2 dx \quad (10)$$

可知式(8)由凹泛函 ε_1 的 H^{-1} 梯度流和凸泛函 ε_2 的 L^2 梯度流叠加而成。可进一步拆分 $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1c} - \varepsilon_{1e}$, 可得

$$\begin{cases} \varepsilon_{1c}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^N |\nabla u_i|^2 + \frac{C_1}{2} \sum_{i=1}^N u_i^2 \right) dx \\ \varepsilon_{1e}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left[-\frac{1}{\varepsilon} P\psi(\mathbf{u}) + \frac{C_1}{2} \sum_{i=1}^N u_i^2 \right] dx \end{cases} \quad (11)$$

拆分 $\varepsilon_2 = \varepsilon_{2c} - \varepsilon_{2e}$, 可得

$$\begin{cases} \varepsilon_{2c}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left(\frac{C_2}{2} \sum_{i=1}^N u_i^2 \right) dx \\ \varepsilon_{2e}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left[-\frac{\omega}{2} \sum_{i=1}^N (f_i - u_i)^2 + \frac{C_2}{2} \sum_{i=1}^N u_i^2 \right] dx \end{cases} \quad (12)$$

常数 C_1 和 C_2 是足够大的正数, 使得拆分后各项严格凸。离散计算格式表示为

$$\frac{\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n-1)}}{\tau} = -\nabla_{H^{-1}}^{\text{proj}} \{ \varepsilon_{1c}[\mathbf{u}^{(n)}] - \varepsilon_{1e}[\mathbf{u}^{(n-1)}] \} - \nabla_{L^2} \{ \varepsilon_{2c}[\mathbf{u}^{(n)}] - \varepsilon_{2e}[\mathbf{u}^{(n-1)}] \} \quad (13)$$

将标准拉普拉斯算子 Δ 扩展到分数拉普拉斯 $(-\Delta)^{\frac{\zeta}{2}} (0 \leq \zeta \leq 2)$, 得到向量值分数阶 CH 修复模型的数值格式为

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{(n)} - u_i^{(n-1)}}{\tau} + \varepsilon \Delta^{\zeta} u_i^{(n)} + C_1 (-\Delta)^{\frac{\zeta}{2}} u_i^{(n)} + C_2 u_i^{(n)} = \\ -\frac{1}{\varepsilon} (-\Delta)^{\frac{\zeta}{2}} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial u_i} [\mathbf{u}^{(n-1)}] \right\} + \omega [f_i - u_i^{(n-1)}] + \\ \frac{1}{\varepsilon N} (-\Delta)^{\frac{\zeta}{2}} \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{\partial \psi}{\partial u_j} [\mathbf{u}^{(n-1)}] \right\} + \\ C_1 (-\Delta)^{\frac{\zeta}{2}} u_i^{(n-1)} + C_2 u_i^{(n-1)} \end{aligned} \quad (14)$$

进一步由傅里叶谱方法,得到迭代格式为

$$\hat{\mathbf{u}}_i^{(n)} = \frac{\lambda^{\frac{\xi}{2}} [\hat{\mathbf{V}}_1^{(n-1)} + C_1 \hat{\mathbf{u}}_i^{(n-1)}]}{\frac{1}{\tau} + \varepsilon \lambda^{\xi} + C_1 \lambda^{\frac{\xi}{2}} + C_2} + \frac{\hat{\mathbf{V}}_2^{(n-1)} + \frac{1}{\tau} \hat{\mathbf{u}}_i^{(n-1)}}{\frac{1}{\tau} + \varepsilon \lambda^{\xi} + C_1 \lambda^{\frac{\xi}{2}} + C_2} \quad (15)$$

$$\mathbf{V}_1^{(n-1)} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{u}_i} [\mathbf{u}^{(n-1)}] + \frac{1}{\varepsilon N} \sum_{j=1}^N \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{u}_j} [\mathbf{u}^{(n-1)}] \quad (16)$$

$$\mathbf{V}_2^{(n-1)} = \omega \mathbf{f}_i + (C_2 - \omega) \mathbf{u}_i^{(n-1)} \quad (17)$$

式(11)中: $\hat{\mathbf{u}}_i$ 为 \mathbf{u}_i 的傅立叶变换; λ 为拉普拉斯算子的标准正交特征函数相对应的特征值。由傅里叶反变换计算得到 $\mathbf{u}^{(n)}$, 于是有

$$\mathbf{u}^{k-1} = \mathbf{u}^{(n)} \mathbf{g} \quad (18)$$

2.1.2 极小化目标函数[式(7)]

将目标函数表示为

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{u}} \left(\|\mathbf{d}_1\|_1 + \|\mathbf{d}_2\|_1 + \frac{\omega}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{f}\|_2^2 \right) \\ \text{s. t. } \mathbf{d}_1 = \mathbf{u}_{x_1}, \mathbf{d}_2 = \mathbf{u}_{x_2} \end{array} \right. \quad (19)$$

应用拉格朗日乘子法,得到无约束形式为

$$\min_{\mathbf{u}, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2} \left(\|\mathbf{d}_1\|_1 + \|\mathbf{d}_2\|_1 + \frac{\omega}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{f}\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{d}_1 - \mathbf{u}_{x_1}\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{d}_2 - \mathbf{u}_{x_2}\|_2^2 \right) \quad (20)$$

分裂 Bregman 方法求解

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}^k, \mathbf{d}_1^k, \mathbf{d}_2^k) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{u}, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2} & \left(\|\mathbf{d}_1\|_1 + \|\mathbf{d}_2\|_1 + \right. \\ & \left. \frac{\omega}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{f}\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{d}_1 - \mathbf{u}_{x_1} - \mathbf{b}_{x_1}^{k-1}\|_2^2 + \right. \\ & \left. \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{d}_2 - \mathbf{u}_{x_2} - \mathbf{b}_{x_2}^{k-1}\|_2^2 \right) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{b}_{x_1}^k = \mathbf{b}_{x_1}^{k-1} + (\mathbf{u}_{x_1}^k - \mathbf{d}_1^k) \\ \mathbf{b}_{x_2}^k = \mathbf{b}_{x_2}^{k-1} + (\mathbf{u}_{x_2}^k - \mathbf{d}_2^k) \end{array} \right. \quad (22)$$

进一步通过 Gauss-Seidel 迭代得到 $\mathbf{u}, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ 的计算格式为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^k = \frac{\lambda}{\omega + 4\lambda} & (4 \mathbf{u}^{k-1} + \Delta_1^- \mathbf{b}_{x_1}^{k-1} + \Delta_2^- \mathbf{b}_{x_2}^{k-1} - \\ & \Delta_1^- \mathbf{d}_1^{k-1} - \Delta_2^- \mathbf{d}_2^{k-1}) + \frac{\omega}{\omega + 4\lambda} \mathbf{f} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{d}_1^k = \operatorname{TRUNC}_{1/\lambda}(\mathbf{u}_{x_1}^k + \mathbf{b}_{x_1}^{k-1}) \\ \mathbf{d}_2^k = \operatorname{TRUNC}_{1/\lambda}(\mathbf{u}_{x_2}^k + \mathbf{b}_{x_2}^{k-1}) \end{array} \right. \quad (24)$$

式(15)中:

$$\operatorname{TRUNC}_{\varepsilon}(z) = \begin{cases} z - \varepsilon, & z \in (\varepsilon, +\infty) \\ 0, & z \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\ \varepsilon + z, & z \in (-\infty, -\varepsilon) \end{cases} \quad (25)$$

2.2 灰度级向量的动态调整

向量值分数阶 Cahn-Hilliard 修复模型对于图像含有少量色彩的情形,可以实现较好的修复效果。但若对 256 个灰度级进行修复时,每一次迭代需要在各个灰度级上进行处理,计算代价高昂。

考虑到迭代算法修复图像是个渐进的过程,因此可以在修复的初始阶段,通过较大步长和少量灰度级进行快速而粗略的修复;随后在后续阶段,逐步增加灰度级数量以及减小步长,使用更丰富的图像信息来修复细节部分。这样的灰度级动态调整,可以达到进一步减少计算量的目的。待修复图像 f 的灰度级向量为 $\mathbf{g}_0 = (0, 1, 2, \dots, L_0 - 1)^T$, 调整后的图像灰度值 f_{low} 表达式为

$$f_{\text{low}} = \frac{L_0}{L-1} \left\lfloor \frac{L-1}{L_0} f \right\rfloor \quad (26)$$

式(15)中: L 为设定的灰度级数量; $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示向下取整。与 L 相对应的灰度级向量设定为

$$\mathbf{g}_{\text{low}} = \left(0, \frac{L_0}{L-1}, \frac{2L_0}{L-1}, \dots, L_0 \right)^T \quad (27)$$

本文算法描述如下。

算法: 向量值 CH 方程约束的总变差极小化。

输入: 待修复图像 $f_0, i = 0$ 。

输出: 修复后图像 \mathbf{u} 。

步骤 1 根据式(27)设定的灰度级向量 $\mathbf{g}_{\text{low}}^i$ 、步长和式(19),收缩待修复图像 f_i 的灰度向量范围,得到 f_{low} 。

步骤 2 将 f_{low} 向量化为 $\mathbf{u}^{(n-1)}$, 通过式(15)和傅里叶反变换得到 $\mathbf{u}^{(n)}$, 代入式(18)得到 \mathbf{u}^{k-1} 。

步骤 3 将 \mathbf{u}^{k-1} 代入式(22)~式(24)得到 \mathbf{u}^k 。

步骤 4 判断是否满足停止准则。若不满足,则重复步骤 2 和步骤 3;若满足,令 $i = i + 1$, 并导出所获得的修复图像 f_i , 回到步骤 1。

本算法采用的停止准则为

$$\frac{\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}\|_2}{\|\mathbf{u}^{k-1}\|_2} \leq \varepsilon \quad (28)$$

后续实验如无特别说明,均采用 ε 两步方法: 第一步取 $\varepsilon = 2 \times 10^{-4}$, 用以平滑图像信息; 第二步取 $\varepsilon = 2 \times 10^{-5}$, 用以锐化图像轮廓。

通过步骤 2 和步骤 3 以及满足 ε 两步方法所设定的停止标准后得到修复图像 f_i , 将其中修复域的信息与给定待修复图像叠加, 作为下一轮修复的初始图像。

3 实验结果及分析

客观的量化指标可以对修复结果进行有效评

价,使用如下评价指标^[27]。

(1) 峰值信噪比(PSNR)。

$$PSNR = 10 \lg \frac{(2^L - 1)^2}{MSE} \quad (29)$$

式(29)中:MSE为原始图像和修复后的图像之间的均方误差。

(2) 结构相似度(SSIM)。

$$SSIM(x, y) = \frac{(2\mu_x\mu_y + C_1)(2\sigma_{xy} + C_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2)} \quad (30)$$

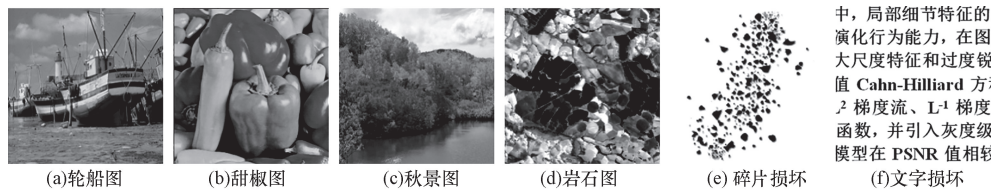
式(30)中: x 为原始图像; y 为修复之后的图像; μ 为均值; σ 为标准差或协方差。因为结构相似度结合了亮度(平均图像强度)、对比度(强度方差)和结构(强度协方差),更符合人类的视觉感知。PSNR越大,SSIM

的值越接近1,则说明图像修复效果越好。以上指标作为客观标准,可以辅助评价修复结果。

实验使用 MATLAB R2023a 作为工具,在 Intel Core i7-12700H 处理器(2.3 GHz),16 GB 内存的 PC 机上实现。

如图1(a)~图1(d)所示,给出了实验所采用的轮船图像(Boat)、甜椒图像(Peppers)、秋景图像(Autumn)和岩石图像(Rocks),大小皆为256×256。碎片损坏和文字损坏分别如图1(e)、图1(f)所示。通过绝对最小化 Lipschitz 扩展(AMLE)修复模型^[34]、TV 模型^[6]、向量值分数阶 Cahn-Hilliard 模型^[4]和本文模型进行实验比较。

选取了4组示例,图2~图5的各列分别展示了破损图像和不同的修复效果。AMLE 模型和 TV



中,局部细节特征的演化行为能力,在图大尺度特征和过度锐值 Cahn-Hilliard 方²梯度流、L¹梯度函数,并引入灰度级模型在 PSNR 值相

图1 原图和不同程度的损坏

Fig. 1 Original images and damage masks

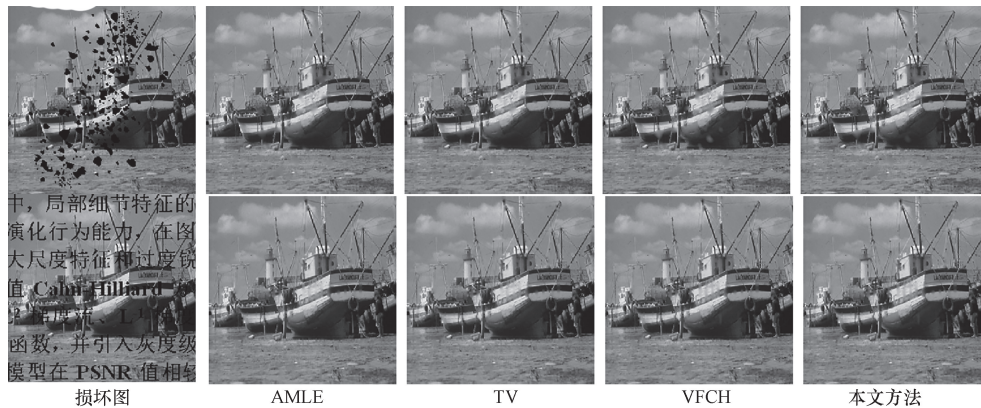


图2 不同损坏下轮船图像修复效果

Fig. 2 Inpainting Boat image with different damages

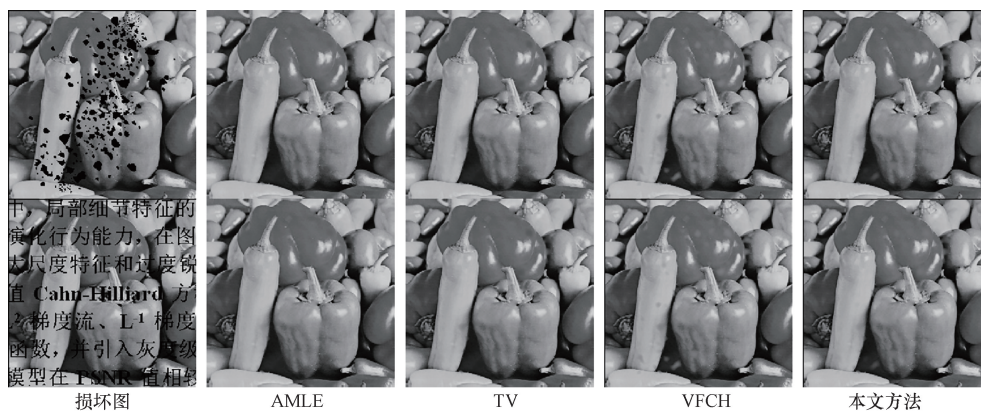


图3 不同损坏下甜椒图像修复效果

Fig. 3 Inpainting Peppers image with different damages

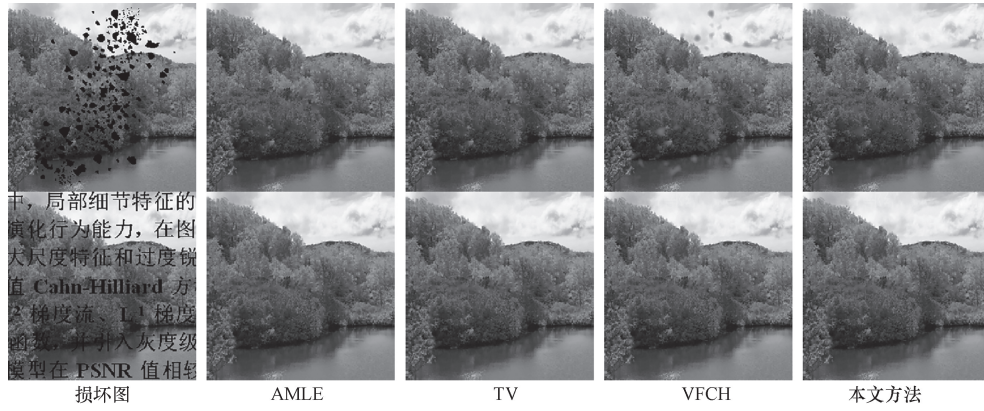


图4 不同损坏下秋景图像修复效果

Fig. 4 Inpainting Autumn image with different damages

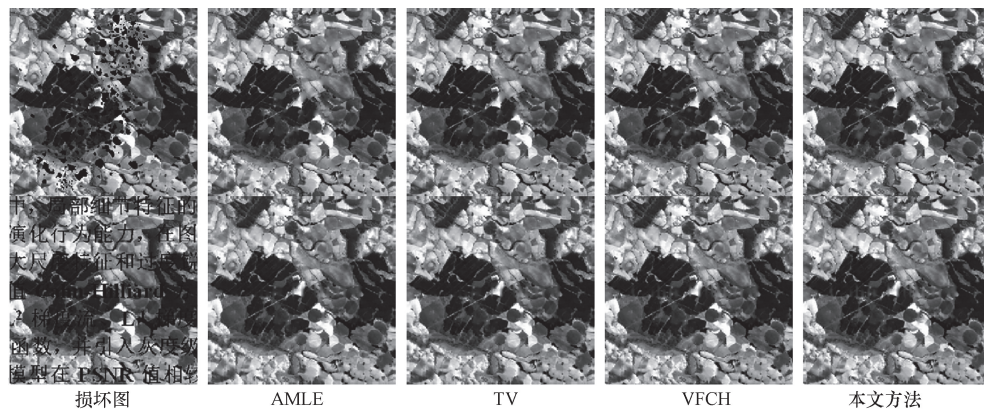


图5 不同损坏下岩石图像修复效果

Fig. 5 Inpainting Rocks image with different damages

表1 不同模型修复轮船图像的数值结果

Table 1 Results of different models inpainting

Boat image				
损坏类型	修复方法	CPU 时间/s	PSNR/dB	SSIM
碎片损坏	AMLE	38.58	29.716 3	0.940 9
	TV	0.52	29.736 6	0.941 0
	VFCH	35.61	30.032 4	0.945 1
	本文方法	16.77	30.115 4	0.946 2
文字损坏	AMLE	95.49	30.294 8	0.954 9
	TV	0.95	30.274 9	0.954 4
	VFCH	36.70	30.231 8	0.958 7
	本文方法	17.75	30.666 6	0.962 5

表2 不同模型修复甜椒图像的数值结果

Table 2 Results of different models inpainting Peppers image

inpainting Peppers image				
损坏类型	修复方法	CPU 时间/s	PSNR/dB	SSIM
碎片损坏	AMLE	94.26	25.288 1	0.942 6
	TV	0.94	25.292 5	0.942 7
	VFCH	37.43	30.970 9	0.967 9
	本文方法	18.08	31.131 8	0.968 1
文字损坏	AMLE	94.71	25.470 4	0.947 1
	TV	0.95	25.451 9	0.946 2
	VFCH	37.73	33.811 9	0.971 6
	本文方法	18.77	35.405 6	0.979 6

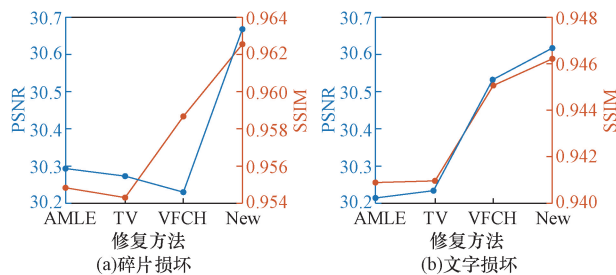


图6 轮船图像修复结果评价

Fig. 6 Results evaluation of Boat image inpainting

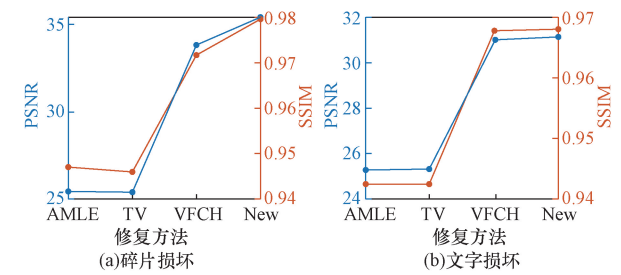


图7 甜椒图像修复结果评价

Fig. 7 Results evaluation of Peppers image inpainting

模型使用停止准则[式(28)],并且取 $\epsilon = 2 \times 10^{-5}$ 。向量值分数阶CH模型和本文模型,设定参数 $\omega_0 = 10^9$, $\varepsilon = 10$ 和 $\zeta = 1.2$,停止准则采用2.2节中的 ϵ 两步方法。

表1~表4列出了不同的修复方法对不同损坏进行修复的总迭代次数、PSNR、SSIM。图6~图9给出了不同修复方法作用于破损图像的PSNR折线对比和SSIM折线对比。

分析实验结果可知,本文模型对碎片破损情形进行修复,数值结果的PSNR/SSIM值相对其余3种模型具有明显优势(PSNR提升至少5.67%,SSIM提升至少1.02%);文字破损情形下修复结果PSNR/SSIM值不弱于向量值分数阶CH模型(VFCH)且相对其余2种模型具有优势(PSNR提升至少7.59%,SSIM提升至少1.17%)。文字破损的非凸形状较为严重,抑制了本文模型的作用机制。

表3 不同模型修复秋景图像的数值结果

Table 3 Results of different models inpainting

Autumn image				
损坏类型	修复方法	CPU 时间/s	PSNR/dB	SSIM
碎片损坏	AMLE	94.39	29.138 3	0.943 9
	TV	0.95	33.535 7	0.948 9
	VFCH	36.26	34.211 0	0.953 2
	本文方法	17.25	34.320 4	0.954 1
文字损坏	AMLE	95.86	30.867 5	0.958 6
	TV	0.96	34.309 9	0.959 8
	VFCH	35.82	31.454 8	0.947 8
	本文方法	18.09	35.685 6	0.968 2

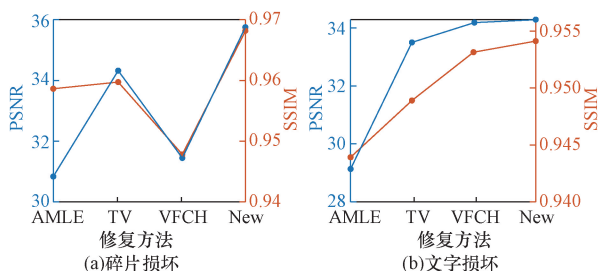


图8 秋景图像修复结果评价

Fig. 8 Results evaluation of Peppers image inpainting

表4 不同模型修复Rocks图像的数值结果

Table 4 Results of different models inpainting Rocks image

损坏类型	修复方法	CPU 时间/s	PSNR/dB	SSIM
碎片损坏	AMLE	51.17	27.849 6	0.947 6
	TV	0.62	27.864 8	0.947 8
	VFCH	36.27	28.493 9	0.953 3
	本文方法	17.38	28.881 1	0.956 4
文字损坏	AMLE	95.52	28.541 7	0.955 2
	TV	0.96	28.524 6	0.955 1
	VFCH	36.54	28.697 3	0.956 7
	本文方法	17.81	29.585 7	0.963 5

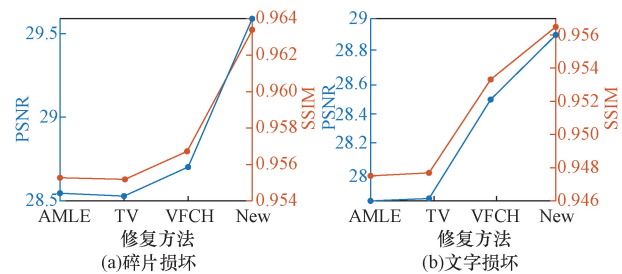


图9 Rocks图像修复结果评价

Fig. 9 Results evaluation of Rocks image inpainting

相对于轮船图像的丰富细节,甜椒图像、秋景图像、岩石图像具有一定的分块特性或者局部相似特性,这样的特征修复在本文模型的总变差极小引导下更易取得良好效果(PSNR相对VFCH模型提升3.01%以上)。

从计算代价上来看,本文模型的数值求解效率相较于AMLE模型和向量值分数阶Cahn-Hilliard修复模型的数值求解效率有一定提升。另外,TV修复模型在使用时需设定最大迭代次数。而所提出模型能够修复不同类型的图像损坏,稳定地产生高质量的修复结果。

从修复图像的视觉效果上看,4种方法整体效果较好。AMLE模型和TV模型相对缺乏局部细节的辨识能力;而向量值分数阶Cahn-Hilliard模型(VFCH)具有分数阶作用机制,能够更有效辨识局部细节,但缺乏全局引导;本文模型在VFCH基础上增加了总变差极小化引导,能够兼顾局部细节辨识和全局特征一致性保护,提升恢复效果。

综上分析,所提出的修复模型相较已有模型在效果和效率上具有一定的优势和竞争力,并且在解决不同的图像破损情况时体现出一定的鲁棒性。

4 结论

提出了一个向量值Cahn-Hilliard方程约束的总变差极小化的修复模型。其优化目标和约束控制方程兼顾了全局特征恢复和局部细节恢复之间的平衡,所采取的灰度值向量动态调整策略,有助于改善向量分数Cahn-Hilliard修复模型计算代价过大的问题。数值示例表明,与已有模型方法相比,本文方法在修复结果质量和鲁棒性上具有一定优势。

参考文献

- [1] Segel L A. Mathematics applied to continuum mechanics[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1977.
- [2] Braverman C. Photoshop retouching handbook[M]. Foster City: IDG Books Worldwide, 1998.
- [3] Halim A, Kumar B R. An anisotropic PDE model for image inpainting[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2020, 79

- (9): 2701-2721.
- [4] Bosch J, Stoll M. A fractional inpainting model based on the vector-valued Cahn-Hilliard equation[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2015, 8(4): 2352-2382.
- [5] Newson A, Almansa A, Gousseau Y, et al. Non-local patch-based image inpainting[J]. *Image Processing On Line*, 2017, 7: 373-385.
- [6] Chan T F, Shen J. Mathematical models for local non-texture inpaintings[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2002, 62(3): 1019-1043.
- [7] Chan T F, Shen J. Non-texture inpainting by curvature-driven diffusions[J]. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2001, 12(4): 436-449.
- [8] Burger M, He L, Schonlieb C B. Cahn-Hilliard inpainting and a generalization for gray value images[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2009, 2(4): 1129-1167.
- [9] Bertozzi A, Esedoglu S, Gillette A. Analysis of a two-scale Cahn-Hilliard model for binary image inpainting[J]. *Multiscale Modeling & Simulation*, 2007, 6(3): 913-936.
- [10] Bertozzi A, Esedoglu S, Gillette A. Inpainting of binary images using the Cahn-Hilliard equation[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, 16(1): 285-291.
- [11] Zou Q. An image inpainting model based on the mixture of Perona-Malik equation and Cahn-Hilliard equation[J]. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 2021, 66(1/2): 21-38.
- [12] Lian X, Fu Q, Su W, et al. The fractional Laplacian based image inpainting[J]. *Inverse Problems and Imaging*, 2023, 18(2): 326-365.
- [13] Zhang M, Zhang G F. Fast image inpainting strategy based on the space-fractional modified Cahn-Hilliard equations[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2021, 102: 1-14.
- [14] Carrillo J A, Kalliadasis S, Liang F, et al. Enhancement of damaged-image prediction through Cahn-Hilliard image inpainting[J]. *Royal Society Open Science*, 2021, 8(5): 201294.
- [15] Goodfellow I, Pouget-Abadie J, Mirza M, et al. Generative adversarial networks [J]. *Communications of the ACM*, 2020, 63(11): 139-144.
- [16] Zhao L, Mo Q, Lin S, et al. UCTGAN: diverse image inpainting based on unsupervised cross-space translation[C]// In Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Seattle: IEEE, 2020; 5741-5750.
- [17] Lashgari M, Rabbani H, Plonka G, et al. Reconstruction of connected digital lines based on con-strained regularization[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2022, 31: 5613-5628.
- [18] 邱小锋, 丁友东, 梁冰, 等. 基于递归特征估计的图像修复算法[J]. *科学技术与工程*, 2022, 22(3): 1098-1106.
- Qiu Xiaofeng, Ding Youdong, Liang Bing, et al. Image inpainting algorithm based on recursive feature estimation[J]. *Science Technology and Engineering*, 2022, 22(3): 1098-1106.
- [19] Elharrouss O, Almaadeed N, Al-Maadeed S, et al. Image inpainting: a review [J]. *Neural Processing Letters*, 2020, 51: 2007-2028.
- [20] Dong B, Jiang Q, Shen Z. Image restoration: wavelet frame shrinkage, nonlinear evolution pdes, and beyond[J]. *Multiscale Modeling and Simulation*, 2017, 15(1): 606-660.
- [21] Novak A, Reinic N. Shock filter as the classifier for image inpainting problem using the Cahn-Hilliard equation[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2022, 123: 105-114.
- [22] Bai X, Sun J, Shen J, et al. A Ginzburg-Landau- H^{-1} model and its SAV algorithm for image inpainting[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2023, 96(2): 40.
- [23] Kumar BVR, Halim A. A linear fourth-order pde-based gray-scale image inpainting model[J]. *Computational & Applied Mathematics*, 2019, 38(6): 1-21.
- [24] Ben-loughfry A, Hakim A. Caputo fractional-time of a modified Cahn-Hilliard equation for the inpainting of binary images [J]. *Journal of Mathematical Modeling*, 2023, 11(2): 357-373.
- [25] Huang X, Li D, Sun H W, et al. Preconditioners with symmetrized techniques for space fractional Cahn-Hilliard equations[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2022, 92(2): 41.
- [26] Brkić A L, Mitrović D, Novak A. On the image inpainting problem from the view point of a nonlocal Cahn-Hilliard type equation [J]. *Journal of Advanced Research*, 2020, 25: 67-76.
- [27] Wang Z, Bovik A C, Sheikh H R, et al. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2004, 13(4): 600-612.
- [28] Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1992, 60(1/4): 259-268.
- [29] Blank L, Butz M, Garcke H. Solving the Cahn-Hilliard variational inequality with a semi-smooth Newton method[J]. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2011, 17(4): 931-954.
- [30] Novick-cohen A, Segel L A. Nonlinear aspects of the Cahn-Hilliard equation[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1984, 10(3): 277-298.
- [31] Elliott C M, Luckhaus S. A generalised diffusion equation for phase separation of a multicomponent mixture with interfacial free energy[J]. *Primary Care and Community Psychiatry*, 1991, 12(1): 23-31.
- [32] Eyre D J. Systems of Cahn-Hilliard equations[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1993, 53(6): 1686-1712.
- [33] 张旻. 几类分数阶偏微分方程快速解法及应用[D]. 兰州: 兰州大学, 2021.
- Zhang Min. Fast solutions and applications of several fractional partial differential equations[D]. Lanzhou: Lanzhou University, 2021.
- [34] Caselles V, Morel J M. An axiomatic approach to image interpolation[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1998, 7(3): 376-386.