



DOI:10.12404/j.issn.1671-1815.2403936

引用格式:赵雪芬,卢绍楠,孔德凤.一维六方准晶纳米涂层圆柱形夹杂的反平面问题[J].科学技术与工程,2025,25(11):4419-4427.

Zhao Xuefen, Lu Shaonan, Kong Defeng. Anti-plane problem of a nano-coated inclusion in one dimensional hexagonal quasicrystals[J]. Science Technology and Engineering, 2025, 25(11): 4419-4427.

晶体学

一维六方准晶纳米涂层圆柱形夹杂的反平面问题

赵雪芬^{1,2}, 卢绍楠³, 孔德凤^{1*}

(1. 宁夏大学新华学院, 银川 750021; 2. 宁夏大学信息工程学院, 银川 750021; 3. 宁夏大学数学统计学院, 银川 750021)

摘要 为设计和制备高质量的一维六方准晶纳米复合材料,利用复变函数方法和 Gurtin-Murdoch 表/界面理论,分别应用界面和界面相模型分别研究了含纳米涂层圆柱形夹杂的一维六方准晶反平面断裂问题。在两种模型下分别获得基体、涂层和夹杂中声子场和相位子场应力场的级数形式表达式。数值算例分析了界面弹性常数和尺寸效应对夹杂周围应力场的影响。结果表明:界面弹性常数的正负会影响纳米夹杂周围的应力场,随着纳米夹杂尺寸的增大,应力场表现出明显的尺寸依赖性,表面效应对无量纲化声子场和相位子场应力影响有显著差异。可见相关结果对研究准晶纳米夹杂力学行为提供一定的理论参考。

关键词 一维六方准晶; 纳米涂层圆柱形夹杂; 尺寸效应; 界面模型; 界面相模型

中图分类号 O753.3;

文献标志码 A

Anti-plane Problem of a Nano-coated Inclusion in One Dimensional Hexagonal Quasicrystals

ZHAO Xue-fen^{1,2}, LU Shao-nan³, KONG De-feng^{1*}

(1. Xinhua College, Ningxia University, Yinchuan 750021, China; 2. School of Information Engineering, Ningxia University, Yinchuan 750021, China; 3. School of Mathematical Statistics, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

[Abstract] To design and prepare high-quality one-dimensional hexagonal quasicrystal nano-composites, the interface and interface phase models were applied to study the infinite one-dimensional hexagonal quasicrystal anti-plane fracture problem with cylindrical inclusions containing nano coatings by using the complex function method and Gurtin-Murdoch's surface/interface elasticity theory. Under two different models, the series form expressions of phonon and phason field stress fields in matrix, coating and inclusion were obtained, respectively. Numerical examples were used to analyze the effects of interface elastic constants and size effects on the stress field around inclusions. The results showed that the positive or negative values of interface elastic constants would affect the stress field around nano-inclusions. As the size of nano-inclusions increased, the stress field exhibited significant size dependence, and surface effects had significant differences in their effects on the stress fields of dimensionless phonon and phason fields. The relevant results provide a certain theoretical reference for studying the mechanical behavior of quasicrystalline nano-inclusions.

[Keywords] one dimensional hexagonal quasicrystals; nano coated cylindrical inclusion; size effect; interface model; interphase model

准周期结构的特殊性,使得准晶材料表现出很多优良性质,在实际工程中应用前景非常广阔,如作为表面改良性涂层或复合材料结构颗粒增强相等^[1]。准晶在室温下虽然硬度高但呈脆性易碎,且在制造和使用中极易形成不同类型的缺陷(孔洞、裂纹和夹杂等)。当受到外力作用时,材料内部的缺陷会造成其周围力学性能的改变,进而导致材料失效和破坏,影响材料的使用寿命^[2]。为了保障准晶材料的高效利用,其断裂问题的研究成为国内外

学者关注的热点。

夹杂的存在往往会改变基体的局部物理、化学和机械性质,对材料的整体性能产生显著影响,研究夹杂问题有助于优化复合材料的设计,提升其性能。因此研究夹杂问题具有非常重要的理论和实际意义。目前,弹性材料夹杂问题已经得到了较为充分的研究。Yang 等^[3]利用高速摄像机记录了各试样的破坏过程,分析了夹杂物强度和应变率对砂岩动态冲击性能的影响。马连华等^[4]基于 Eshelby

收稿日期: 2024-05-27 修订日期: 2024-09-25

基金项目: 宁夏大学新华学院院级科学研究基金重点项目(23XHXY01)

第一作者: 赵雪芬(1983—),女,汉族,宁夏隆德人,博士,副教授。研究方向:复分析在新型材料中断裂力学中的应用。E-mail:snowfen@163.com。

*通信作者: 孔德凤(1982—),女,汉族,河北衡水人,硕士,副教授。研究方向:人工智能在新型材料中的应用。E-mail:fengkongde2012@163.com。

投稿网址:www.stae.com.cn

细观力学理论,研究了刚性椭球夹杂在流变基质中的运动演化机制。对于准晶夹杂问题,范淑琦等^[5]借助于复变函数方法探讨了无限大一维六方准晶材料中位错与椭圆夹杂的相互作用,给出了复势函数之间的关系,并得到了界面应力的封闭解。利用弹簧不完美界面模型的 Mori-Tanaka 方法, Li 等^[6]和武雨润等^[7]分别研究了一维正交和二维十次准晶复合材料有效弹性性能问题,详尽分析了体积分数和夹杂长径比对准晶复合材料有效弹性常数的影响。曹婷等^[8]结合本征应变计算公式和留数定理,得到了含椭球体夹杂三维立方准晶的 Eshelby 张量。利用保角变换技术, Guo 等^[9]讨论了含椭圆夹杂的一维六方准晶压电复合材料反平面剪切问题,导出了夹杂和基体各物理量的封闭解。Guo 等^[10]研究了一维准晶压电复合结构中三相圆柱夹杂问题,利用级数展开式获得了反平面机械载荷和面内电载荷作用下各物理场的精确解,并预测了准晶压电复合材料的有效电弹性模量。胡克强等^[11]分析了准晶压电材料中两个圆柱形状夹杂互相干涉问题,通过解析延拓理论把夹杂问题转换为可解的边值问题,求出基体、夹杂内应力和电位移的封闭解。

随着准晶材料宏观研究的成熟化,在微观尺度下准晶力学性能研究的逐渐增多。当缺陷是纳米尺度时,其表面积与体积之比非常大,此时纳米缺陷的表面性能对纳米尺度问题下应力场具有显著的影响^[12]。为了刻画纳米尺度下的表面和界面影响, Gurtin 等^[13]于 1975 年建立了表/界面弹性模型和理论,目前该理论已被成功用于研究纳米缺陷/结构的力学行为。借助于复变函数方法和表/界面弹性理论,赵雪芬等^[14]得到了在剪切载荷作用下含纳米正三角形孔边三裂纹一维六方准晶反平面问题的解答。Yang 等^[15]通过构造新的保角变换研究了带六条纳米裂纹的纳米六边形孔的一维六方准晶中反平面断裂问题,得到了考虑表面效应影响下应力和能量释放率的表示式。Su 等^[16]在电不渗透边界条件下分析了含纳米椭圆形孔边双裂纹的一维六方准晶压电 III 型断裂行为,给出了纳米裂纹尖端断裂参数。王磊^[17]研究具有非理想界面的一维六方准晶增强纳米圆夹杂复合材料的反平面剪切问题,获得受反平面机械载荷作用下基体、夹杂及涂层中声子场、相位子场的应力、应变的解析解。

在微纳米尺度下,准晶具有出色的形态可控性,这使得准晶常应用于微小器件的制备。此外,纳米涂层可以有效提高材料的抗疲劳性、抗裂性和韧性。然而相比于其他传统材料,纳米准晶的研究起步相对较晚且由于问题的复杂性,因此目前一维

六方准晶纳米涂层圆柱形夹杂的研究还未见有文献报道。界面和界面相模型^[13,18]适用于探讨含纳米夹杂介质的弹性问题和纳米复合材料宏观有效性预测问题。基于 Gurtin-Murdoch 表/界面理论结合复变函数方法研究一维六方准晶纳米涂层中纳米涂层圆柱形夹杂的反平面断裂问题,在界面和界面两种相模型下分别获得一维六方准晶基体、涂层和夹杂中声子场和相位子场应力的解析解。数值算例讨论尺寸效应对纳米夹杂周围应力场分布的影响,研究结果可为纳米准晶及其复合材料的制造和应用提供理论层面的依据。

1 一维六方准晶反平面问题的基本方程

由准晶线弹性理论知,一维六方准晶反平面问题的声子场位移 u_z 和相位子场位移 w_z 可用两个解析函数 $\varphi(z)$ 、 $\psi(z)$ 表示为^[5]

$$\begin{cases} u_z(x, y) = \frac{1}{2}[\varphi(z) + \overline{\varphi(z)}] = \text{Re}\varphi(z) \\ w_z(x, y) = \frac{1}{2}[\psi(z) + \overline{\psi(z)}] = \text{Re}\psi(z) \end{cases} \quad (1)$$

式(1)中: $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ 。

反平面应力和应变的极坐标表示分别为

$$\begin{cases} \sigma_{zr} - i\sigma_{z\theta} = [C_{44}\varphi'(z) + R_3\psi'(z)]e^{i\theta} \\ H_{zr} - iH_{z\theta} = [K_2\psi'(z) + R_3\varphi'(z)]e^{i\theta} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{zr} - i\varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2}e^{i\theta}\varphi'(z) \\ \omega_{zr} - i\omega_{z\theta} = e^{i\theta}\psi'(z) \end{cases} \quad (3)$$

式中: σ_{zj} 、 ε_{zj} 和 H_{zj} 、 ω_{zj} ($j = r, \theta$) 分别为声子场和相位子场应力、应变; C_{44} 、 K_2 为声子场和相位子场弹性常数; R_3 为声子场相位子场耦合系数; $\varphi' = d\varphi/dz$, $\psi' = d\psi/dz$ 。

沿任意弧段 AB , 声子场和相位子场径向应力的积分 T_σ 、 T_H 为

$$\begin{cases} T_\sigma = \int_A^B \sigma_{zr} ds = \frac{1}{2}C_{44}i[\overline{\varphi(z)} - \varphi(z)] + \frac{1}{2}R_3i[\overline{\psi(z)} - \psi(z)] \\ T_H = \int_A^B H_{zr} ds = \frac{1}{2}R_3i[\overline{\varphi(z)} - \varphi(z)] + \frac{1}{2}K_2i[\overline{\psi(z)} - \psi(z)] \end{cases} \quad (4)$$

2 应力场求解

2.1 界面模型和界面相模型

以一维六方准晶圆柱夹杂圆心为原点,建立直

角坐标系 Oxy 和极坐标系 $Or\theta$, 无穷远处声子场和相位子场作用的均匀反平面切应力记为 $\sigma_{zx}^0, \sigma_{zy}^0$ 和 H_{zx}^0, H_{zy}^0 。无限大一维六方准晶中单个纳米涂层圆柱形夹杂的平面模型示意图如图 1 所示。

图 1(a) 中, 用 Ω^I, Ω^C 和 Ω^M 分别表示一维六方准晶纳米夹杂、纳米涂层和基体所占区域, S_1 和 S_2 表示一维六方准晶纳米夹杂/一维六方准晶纳米涂层和一维六方准晶纳米涂层/一维六方准晶基体之间的界面, r_1 和 r_2 表示界面 S_1 和 S_2 的半径。一维六方准晶纳米夹杂、纳米涂层和基体中的位移、应力和弹性常数分别用上标 I、C 和 M 表示。在界面 S_1 和 S_2 上, 满足 Gurtin-Murdoch 界面条件, 跨越界面的应力不连续。

在图 1(b) 中, $\Omega^i (i = 1, 2, \dots, 5)$ 分别表示一维六方准晶各相所占区域, 其中 Ω^1, Ω^3 和 Ω^5 表示一维

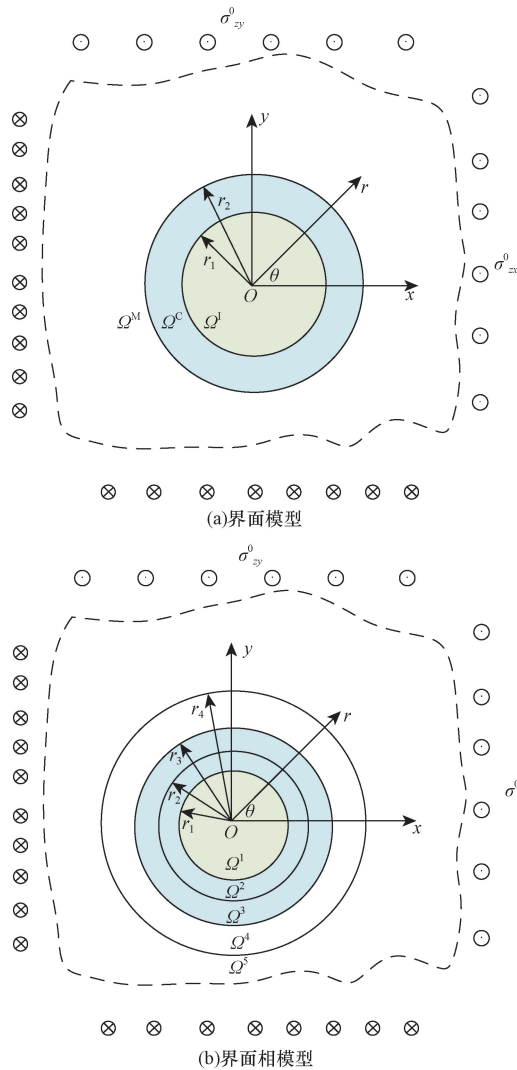


图 1 一维六方准晶纳米涂层圆柱形夹杂反平面问题的两种模型

Fig. 1 Two models of a nano-coated cylindrical inclusion in one-dimensional quasicrystals

六方准晶纳米夹杂、纳米涂层和基体, Ω^2 和 Ω^4 表示一维六方准晶纳米夹杂/一维六方准晶纳米涂层和一维六方准晶纳米涂层/一维六方准晶基体之间的界面。 r_1, r_2, r_3, r_4 是各相的半径, $S^j (j = 1, 2, 3, 4)$ 为各相接触面。在接触面 S^j 上, 满足经典界面连续条件。一维六方准晶各相的弹性常数分别用上标 $i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 表示。

2.2 界面模型的应力场

界面模型中, 一维六方准晶各区域分别用解析函数 $\varphi(z), \psi(z)$ 展开成 Taylor 和 Laurent 级数^[19] 即

$$\begin{cases} \varphi^I(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^I z^k \\ \psi^I(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^I z^k \end{cases}, z \in \Omega^I \quad (5)$$

$$\begin{cases} \varphi^\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_{-k}^\zeta z^{-k} + A_k^\zeta z^k) \\ \psi^\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (B_{-k}^\zeta z^{-k} + B_k^\zeta z^k) \end{cases}, z \in \Omega^\zeta \quad (6)$$

式中: $\zeta = C, M$; A_k^I, B_k^I 和 $A_{-k}^\zeta, A_k^\zeta, B_{-k}^\zeta, B_k^\zeta$ 为待定系数。

在界面 S_1 和 S_2 上, 声子场和相位子场位移和径向应力的边界条件^[20] 可表示为

$$\begin{cases} u_z^I(z) = u_z^C(z), w_z^I(z) = w_z^C(z) \\ \sigma_{zr}^I(z) - \sigma_{zr}^C(z) = \frac{2C_{44}^{S_1}}{r_1} \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}^{S_1}}{\partial \theta} + \frac{R_3^{S_1}}{r_1} \frac{\partial \omega_{z\theta}^{S_1}}{\partial \theta}, z \in S_1 \\ H_{zr}^I(z) - H_{zr}^C(z) = \frac{K_2^{S_1}}{r_1} \frac{\partial \omega_{z\theta}^{S_1}}{\partial \theta} + \frac{2R_3^{S_1}}{r_1} \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}^{S_1}}{\partial \theta} \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} u_z^C(z) = u_z^M(z), w_z^C(z) = w_z^M(z) \\ \sigma_{zr}^C(z) - \sigma_{zr}^M(z) = \frac{2C_{44}^{S_2}}{r_2} \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}^{S_2}}{\partial \theta} + \frac{R_3^{S_2}}{r_2} \frac{\partial \omega_{z\theta}^{S_2}}{\partial \theta}, z \in S_2 \\ H_{zr}^C(z) - H_{zr}^M(z) = \frac{K_2^{S_2}}{r_2} \frac{\partial \omega_{z\theta}^{S_2}}{\partial \theta} + \frac{2R_3^{S_2}}{r_2} \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}^{S_2}}{\partial \theta} \end{cases} \quad (8)$$

式中: $C_{44}^{S_1}, \varepsilon_{z\theta}^{S_1}$ 和 $K_2^{S_1}, \omega_{z\theta}^{S_1}$ 分别为 S_1 的声子场和相位子场应变和弹性常数; $R_3^{S_1}$ 为 S_1 的声子场相位子场耦合系数; $C_{44}^{S_2}, \varepsilon_{z\theta}^{S_2}$ 和 $K_2^{S_2}, \omega_{z\theta}^{S_2}$ 分别为 S_2 的声子场、相位子场应变和弹性常数; $R_3^{S_2}$ 为 S_2 的声子场相位子场耦合系数。

假设界面完全结合, 此时 S_1 和 S_2 的界面应变与准晶材料的切向应变相等。不失一般性, 在以下推导中取, 即

$$\begin{cases} \varepsilon_{z\theta}^{S_1} = \varepsilon_{z\theta}^I(r_1), \varepsilon_{z\theta}^{S_2} = \varepsilon_{z\theta}^C(r_2) \\ \omega_{z\theta}^{S_1} = \omega_{z\theta}^I(r_1), \omega_{z\theta}^{S_2} = \omega_{z\theta}^C(r_2) \end{cases} \quad (9)$$

利用式(1)~式(3),由边界条件式(7)、式(8)可得

$$\begin{cases} A_k^I - A_k^C - r_1^{-2k} \overline{A_{-k}^C} = 0 \\ B_k^I - B_k^C - r_1^{-2k} \overline{B_{-k}^C} = 0 \\ (C_{44}^I + C_{44}^{S_1} k R_3^{S_1}) A_k^I - C_{44}^C A_k^C + C_{44}^C \overline{A_{-k}^C} r_1^{-2k} + \\ (R_3^I + R_3^{S_1} k r_1^{-1}) B_k^I - R_3^C B_k^C + R_3^C \overline{B_{-k}^C} r_1^{-2k} = 0 \\ (R_3^I + R_3^{S_1} k r_1^{-1}) A_k^I - R_3^C A_k^C + R_3^C \overline{A_{-k}^C} r_1^{-2k} + \\ (K_2^I + K_2^{S_1} k r_1^{-1}) B_k^I - K_2^C B_k^C + K_2^C \overline{B_{-k}^C} r_1^{-2k} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} A_k^C - A_k^M + r_2^{-2k} (\overline{A_{-k}^C} - \overline{A_{-k}^M}) = 0 \\ B_k^C - B_k^M + r_2^{-2k} (\overline{B_{-k}^C} - \overline{B_{-k}^M}) = 0 \\ (C_{44}^C + k C_{44}^{S_2} r_2^{-1}) A_k^C r_2^{2k} - (C_{44}^C - k C_{44}^{S_2} r_2^{-1}) \overline{A_{-k}^C} + \\ C_{44}^M \overline{A_{-k}^M} (R_3^C + k R_3^{S_2} r_2^{-1}) B_k^C r_2^{2k} - C_{44}^M A_k^M r_2^{2k} - \\ (R_3^C - k R_3^{S_2} r_2^{-1}) \overline{B_{-k}^C} + (\overline{B_{-k}^M} - B_k^M r_2^{2k}) R_3^M = 0 \\ (R_3^C + k R_3^{S_2} r_2^{-1}) r_2^{2k} A_k^C - (R_3^C - k R_3^{S_2} r_2^{-1}) \overline{A_{-k}^C} + \\ (\overline{A_{-k}^M} - A_k^M r_2^{2k}) R_3^M + (K_2^C + k K_2^{S_2} r_2^{-1}) r_2^{2k} B_k^C - \\ (K_2^C - k K_2^{S_2} r_2^{-1}) \overline{B_{-k}^C} + (\overline{B_{-k}^M} - B_k^M r_2^{2k}) K_2^M = 0 \end{cases} \quad (11)$$

根据无穷远处的应力边界条件,令 $\sigma_{xy}^0 = 0$, $H_{zy}^0 = 0$,由式(6)可得实数解为

$$\begin{cases} A_1^M = \frac{K_2^M \sigma_{zx}^0 - R_3^M H_{zx}^0}{K_2^M C_{44}^M - (R_3^M)^2} \\ B_1^M = \frac{C_{44}^M H_{zx}^0 - R_3^M \sigma_{zx}^0}{K_2^M C_{44}^M - (R_3^M)^2} \\ A_k^M = 0, B_k^M = 0, k = 2, 3, 4, \dots \end{cases} \quad (12)$$

显然,只有当 $k = 1$ 时式(5)和式(6)中的系数是不为零的实数。由式(10)和式(11)可推得各系数为

$$\begin{cases} A_{-1}^C = a_{-1} A_1^I + b_{-1} B_1^I \\ A_1^C = a_1 A_1^I + b_1 B_1^I \\ B_{-1}^C = a_{-2} A_1^I + b_{-2} B_1^I \\ B_1^C = a_2 A_1^I + b_2 B_1^I \\ A_{-1}^M = (a_{-1} L_{-11} + a_1 L_{11} + a_{-2} L_{-21} + a_2 L_{21}) A_1^I + \\ (b_{-1} L_{-11} + b_1 L_{11} + b_{-2} L_{-21} + b_2 L_{21}) B_1^I \\ A_1^M = (a_{-1} L_{-12} + a_1 L_{12} + a_{-2} L_{-22} + a_2 L_{22}) A_1^I + \\ (b_{-1} L_{-12} + b_1 L_{12} + b_{-2} L_{-22} + b_2 L_{22}) B_1^I \\ B_{-1}^M = (a_{-1} L_{-13} + a_1 L_{13} + a_{-2} L_{-23} + a_2 L_{23}) A_1^I + \\ (b_{-1} L_{-13} + b_1 L_{13} + b_{-2} L_{-23} + b_2 L_{23}) B_1^I \\ B_1^M = (a_{-1} L_{-14} + a_1 L_{14} + a_{-2} L_{-24} + a_2 L_{24}) A_1^I + \\ (b_{-1} L_{-14} + b_1 L_{14} + b_{-2} L_{-24} + b_2 L_{24}) B_1^I \end{cases} \quad (13)$$

式中: A_1^I 和 B_1^I 的系数为

$$\begin{cases} a_{-1} = \frac{r_1^2}{2} + \frac{R_3^C (R_3^I + R_3^{S_1} r_1) - K_2^C (C_{44}^I + C_{44}^{S_1} r_1^{-1})}{2 r_1^{-2} [C_{44}^C K_2^C - (R_3^C)^2]} \\ a_1 = \frac{1}{2} + \frac{C_{44}^I}{2 C_{44}^C} + [C_{44}^{S_1} K_2^C r_1^{-1} - R_3^C (R_3^I - R_3^{S_1} r_1^{-1}) + \\ C_{44}^I (R_3^C)^2] / \{2 C_{44}^C [C_{44}^C K_2^C - (R_3^C)^2]\} \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} b_{-1} = \frac{R_3^C (K_2^I + K_2^{S_1} r_1^{-1}) - K_2^C (R_3^I + R_3^{S_1} r_1^{-1})}{2 r_1^{-2} [C_{44}^C K_2^C - (R_3^C)^2]} \\ b_1 = -r_1^{-2} b_{-1} \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} a_{-2} = \frac{R_3^C (C_{44}^I + C_{44}^{S_1} r_1^{-1}) - C_{44}^C (R_3^I + R_3^{S_1} r_1^{-1})}{2 r_1^{-2} [C_{44}^C K_2^C - (R_3^C)^2]} \\ a_2 = -C_{44}^C r_1^{-2} a_{-2} \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} b_{-2} = [R_3^C (R_3^I - R_3^C + R_3^{S_1} r_1^{-1}) - C_{44}^C (K_2^I - K_2^C) - \\ C_{44}^C K_2^{S_1} r_1^{-1}] / 2 r_1^{-2} [C_{44}^C K_2^C - (R_3^C)^2] \\ b_2 = 1 - r_1^2 b_{-2} \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} L_{-11} = \frac{1}{2} + \frac{C_{44}^C - C_{44}^{S_2} r_2^{-1}}{2 C_{44}^M} + [- (R_3^M)^2 (C_{44}^C - \\ C_{44}^{S_2} r_2^{-1}) + C_{44}^M R_3^M (R_3^C - R_3^{S_2} r_2^{-2})] / \\ \{2 C_{44}^M [C_{44}^M K_2^M - (R_3^M)^2]\} \end{cases} \quad (18)$$

$$L_{11} = \frac{r_2}{2} - \frac{R_3^M R_3^{S_2} + C_{44}^{S_2} K_2^M + C_{44}^M K_2^M r_2}{2 (C_{44}^M K_2^M - [R_3^M]^2)} - \frac{C_{44}^{S_2}}{C_{44}^M}$$

$$\begin{cases} L_{-21} = \frac{R_3^C + 2 R_3^M - R_3^{S_2} r_2^{-1}}{2 C_{44}^M} + [C_{44}^M R_3^M (K_2^C - K_2^{S_2} r_2^{-2}) - \\ (R_3^M)^2 (R_3^C - R_3^{S_2} r_2^{-1})] / \{2 C_{44}^M [C_{44}^M K_2^M - (R_3^M)^2]\} \\ L_{21} = [K_2^M r_2 (2 R_3^M r_2 - R_3^C r_2 - R_3^{S_2}) + 2 (R_3^M) 2 r_2 \\ (R_3^C r_2 + R_3^{S_2} - R_3^M r_2) + R_3^M r_2 (K_2^C r_2 + K_2^{S_2})] / \\ \{2 C_{44}^M [C_{44}^M K_2^M - (R_3^M)^2]\} \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} L_{-12} = [R_3^M (R_3^{S_2} r_2^{-2} - R_3^C) + (R_3^M)^2 (C_{44}^C - C_{44}^{S_2} r_2^{-1}) + \\ K_2^M (C_{44}^{S_2} r_2^{-1} - C_{44}^C)] / \{2 r_2^2 C_{44}^M [C_{44}^M K_2^M - (R_3^M)^2]\} + \\ 1 / [2 r_2^2 C_{44}^M] \\ L_{12} = \frac{C_{44}^{S_2} r_2^{-1} + C_{44}^C}{2 C_{44}^M} + \frac{1}{2} + [C_{44}^M R_3^M (R_3^{S_2} r_2^{-1} + R_3^C) - \\ (R_3^M)^2 (C_{44}^{S_2} r_2^{-1} + C_{44}^C)] / \{2 C_{44}^M [C_{44}^M K_2^M - (R_3^M)^2]\} \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} L_{-22} = \frac{R_3^{S_2} r_2^{-1} - R_3^C - 2R_3^M}{2r_2^2 C_{44}^{(M)}} + [C_{44}^M R_3^M (K_2^{S_2} r_2^{-2} - K_2^C) - \\ (R_3^M)^2 (R_3^{S_2} r_2^{-1} - R_3^C)] / \{2r_2^2 C_{44}^M [C_{44}^M K_2^M - (R_3^M)^2]\} \\ L_{22} = \frac{(R_3^C - 2R_3^M + R_3^{S_2} r_2^{-1})}{2C_{44}^M} + [C_{44}^M R_3^M (K_2^C + K_2^{S_2} r_2^{-1}) - \\ (R_3^M)^2 (R_3^C + R_3^{S_2} r_2^{-1})] / \{2C_{44}^M [C_{44}^M K_2^M - (R_3^M)^2]\} \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} L_{-13} = \frac{C_{44}^M (R_3^C - R_3^{S_2} r_2^{-1}) + R_3^M (C_{44}^{S_2} r_2^{-1} - C_{44}^C)}{2[C_{44}^M K_2^M - (R_3^M)^2]} \\ L_{13} = \frac{R_3^M (C_{44}^C r_2^2 + C_{44}^{S_2} r_2) - C_{44}^M (R_3^C r_2^2 + R_3^{S_2} r_2)}{2[C_{44}^M K_2^M - (R_3^M)^2]} \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} L_{-23} = 1/2 + [C_{44}^M (K_2^C - K_2^{S_2} r_2^{-2}) + \\ R_3^M (R_3^{S_2} r_2^{-1} - R_3^C)] / \{2[C_{44}^M K_2^M - (R_3^M)^2]\} \\ L_{23} = r_2^2/2 + [R_3^M (r_2 R_3^C + R_3^{S_2}) r_2 - C_{44}^M \\ (K_2^C r_2 + K_2^{S_2}) r_2] / \{2[C_{44}^M K_2^M - (R_3^M)^2]\} \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} L_{-14} = \frac{C_{44}^M (R_3^{S_2} r_2^{-2} - R_3^C) + R_3^M (C_{44}^C - C_{44}^{S_2} r_2^{-1})}{2r_2^2 [C_{44}^M K_2^M - (R_3^M)^2]} \\ L_{14} = \frac{C_{44}^M (R_3^C + R_3^{S_2} r_2^{-1}) - R_3^M (C_{44}^C + C_{44}^{S_2} r_2^{-1})}{2[C_{44}^M K_2^M - (R_3^M)^2]} \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} L_{-24} = \frac{1}{2r_2^2} + [C_{44}^M (K_2^{S_2} r_2^{-2} - K_2^C) + \\ R_3^M (R_3^C - R_3^{S_2} r_2^{-1})] / \{2r_2^2 [C_{44}^M K_2^M - (R_3^M)^2]\} \\ L_{24} = \frac{1}{2} + \frac{C_{44}^M (K_2^C + K_2^{S_2} r_2^{-1}) - R_3^M (R_3^C - R_3^{S_2} r_2^{-1})}{2[C_{44}^M K_2^M - (R_3^M)^2]} \end{cases} \quad (25)$$

在式(13)中联立 A_1^M 和 B_1^M 的表达式,可求出 A_1^l 和 B_1^l , 系数 $\overline{A_{-1}^C}$ 、 A_1^C 、 $\overline{B_{-1}^C}$ 、 B_1^C 、 A_{-1}^M 和 B_{-1}^M 由其余等式得到。若 $\sigma_{xy}^0 \neq 0, H_{xy}^0 \neq 0$, 则 A_1^M 和 B_1^M 为复数。这时,将未知系数的实部与虚部分开后,虚部可由式(10)和式(11)分别求出。求得未知系数后,基体、涂层和夹杂各区域内的解析函数就可以完全确定,进而求得全场应力和位移的解答。由纳米准晶夹杂内应力函数的级数表达式中仅 z 的系数不等于0可知,纳米一维六方准晶夹杂内部应力是均匀分布的。

令 $K_2^l = R_3^l = 0 (l = I, C, M)$, 问题解答可退化为无限大弹性介质中含单个纳米涂层夹杂反平面剪切问题的解^[20]。当 $K_2^l = R_3^l = 0 (l = I, C, M)$ 且 $C_{44}^{S_2} = 0, C_{44}^C = C_{44}^M$, 或 $C_{44}^{S_1} = 0, C_{44}^C = C_{44}^M$ 时,问题结论可退化为无限大弹性介质中单个纳米圆柱夹杂问题的解答^[21]。

2.3 界面上模型的应力场

图1(b)中,一维六方准晶各区域应力函数可分别用解析函数 $\varphi(z)$ 、 $\psi(z)$ 展开成 Taylor 和 Laurent

级数,即

$$\begin{cases} \varphi^1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^1 z^k \\ \psi^1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^1 z^k \end{cases}, \quad z \in \Omega^1 \quad (26)$$

$$\begin{cases} \varphi^i(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_{-k}^i z^{-k} + A_k^i z^k) \\ \psi^i(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (B_{-k}^i z^{-k} + B_k^i z^k) \end{cases}, \quad z \in \Omega^i, \quad i = 2, 3, 4, 5 \quad (27)$$

式中: A_k^i, B_k^i 和 $A_{-k}^i, B_{-k}^i (i = 2, 3, 4, 5)$ 为待定系数。在各相相邻界面 $S_j (j = 1, 2, 3, 4)$ 上,位移及径向应力连续的界面条件为

$$\begin{cases} u_z^j(z) = u_z^{j+1}(z) \\ w_z^j(z) = w_z^{j+1}(z) \end{cases}, \quad z \in S^j, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (28)$$

$$\begin{cases} T_\sigma^j(t) = T_\sigma^{j+1}(t) \\ T_H^j(z) = T_H^{j+1}(z) \end{cases}, \quad z \in S^j, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (29)$$

记 $A_{-k}^1 = B_{-k}^1 = 0$, 利用式(1)和式(4),由式(28)和式(29)可得

$$\begin{cases} A_k^j - A_k^{j+1} + r_j^{-2k} (\overline{A_{-k}^j} - \overline{A_{-k}^{j+1}}) = 0 \\ B_k^j - B_k^{j+1} + r_j^{-2k} (\overline{B_{-k}^j} - \overline{B_{-k}^{j+1}}) = 0 \end{cases}, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (30)$$

$$\begin{cases} (C_{44}^j \overline{A_{-k}^j} - C_{44}^{j+1} \overline{A_{-k}^{j+1}}) r_j^{-2k} - C_{44}^j A_k^j + C_{44}^{j+1} A_k^{j+1} + \\ (R_3^j \overline{B_{-k}^j} - R_3^{j+1} \overline{B_{-k}^{j+1}}) r_j^{-2k} - R_3^j B_k^j + R_3^{j+1} B_k^{j+1} = 0 \\ (R_3^j \overline{A_{-k}^j} - R_3^{j+1} \overline{A_{-k}^{j+1}}) r_j^{-2k} - R_3^j A_k^j R_3^{j+1} A_k^{j+1} + \\ (K_2^j \overline{B_{-k}^j} - K_2^{j+1} \overline{B_{-k}^{j+1}}) r_j^{-2k} - K_2^j B_k^j + K_2^{j+1} B_k^{j+1} = 0 \end{cases} \quad (31)$$

在无穷远处令 $\sigma_{xy}^0 = 0, H_{xy}^0 = 0$, 可得

$$\begin{cases} A_1^5 = \frac{K_2^5 \sigma_{zx}^0 - R_3^5 H_{zx}^0}{C_{44}^5 K_2^5 - (R_3^5)^2} \\ B_1^5 = \frac{C_{44}^5 H_{zx}^0 - R_3^5 \sigma_{zx}^0}{C_{44}^5 K_2^5 - (R_3^5)^2} \end{cases} \quad (32)$$

同理,只有当 $k = 1$ 时式(26)和式(27)中的系数是不为零的实数。由式(30)和式(31)可推得各系数为

$$\begin{cases} A_{-1}^{j+1} = M_1^{-j} A_1^j + N_1^{-j} B_1^j \\ A_1^{j+1} = M_1^j A_1^j + N_1^j B_1^j \end{cases}, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (33)$$

$$\begin{cases} B_{-1}^{j+1} = M_2^{-j} A_1^j + N_2^{-j} B_1^j \\ B_1^{j+1} = M_2^j A_1^j + N_2^j B_1^j \end{cases}, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (34)$$

这里约定 $M_1^{-0} = 0, N_1^{-0} = 0, M_1^0 = 1, N_1^0 = 1, M_2^{-0} = 0, N_2^{-0} = 0, M_2^0 = 1, N_2^0 = 1$ 。 A_1^1 和 B_1^1 的系数表达式为

$$\left\{ \begin{aligned} M_1^{\delta j} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{C_{44}^j K_2^{j+1} - R_3^j R_3^{j+1}}{2[C_{44}^{j+1} K_2^{j+1} - (R_3^{j+1})^2]} \right) M_1^{\delta j - \delta} + \\ &\quad \left(\frac{1}{2} + \frac{R_3^j R_3^{j+1} - C_{44}^j K_2^{j+1}}{2[C_{44}^{j+1} K_2^{j+1} - (R_3^{j+1})^2]} \right) (r_j^2)^{-\delta} M_1^{-\delta j + \delta} \\ M_2^{\delta j} &= \frac{C_{44}^{j+1} R_3^j - C_{44}^j R_3^{j+1}}{2[C_{44}^{j+1} K_2^{j+1} - (R_3^{j+1})^2]} M_2^{\delta j - \delta} + \\ &\quad \frac{(C_{44}^j R_3^{j+1} - C_{44}^{j+1} R_3^j) (r_j^2)^{-\delta}}{2[C_{44}^{j+1} K_2^{j+1} - (R_3^{j+1})^2]} M_2^{-\delta j + \delta} \\ N_1^{\delta j} &= \frac{K_2^{j+1} R_3^j - K_2^j R_3^{j+1}}{2[C_{44}^{j+1} K_2^{j+1} - (R_3^{j+1})^2]} N_1^{\delta j - \delta} + \\ &\quad \frac{(K_2^j R_3^{j+1} - K_2^{j+1} R_3^j) (r_j^2)^{-\delta}}{2[C_{44}^{j+1} K_2^{j+1} - (R_3^{j+1})^2]} N_1^{-\delta j + \delta} \\ N_2^{\delta j} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{C_{44}^{j+1} K_2^j - R_3^{j+1} R_3^j}{2[C_{44}^{j+1} K_2^{j+1} - (R_3^{j+1})^2]} \right) N_2^{\delta j - \delta} + \\ &\quad \left(\frac{1}{2} + \frac{R_3^j R_3^j - C_{44}^{j+1} K_2^j}{2[C_{44}^{j+1} K_2^{j+1} - (R_3^{j+1})^2]} \right) (r_j^2)^{-\delta} N_2^{-\delta j + \delta} \end{aligned} \right. \quad (35)$$

$$\left\{ \begin{aligned} N_1^{\delta j} &= \frac{K_2^{j+1} R_3^j - K_2^j R_3^{j+1}}{2[C_{44}^{j+1} K_2^{j+1} - (R_3^{j+1})^2]} N_1^{\delta j - \delta} + \\ &\quad \frac{(K_2^j R_3^{j+1} - K_2^{j+1} R_3^j) (r_j^2)^{-\delta}}{2[C_{44}^{j+1} K_2^{j+1} - (R_3^{j+1})^2]} N_1^{-\delta j + \delta} \\ N_2^{\delta j} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{C_{44}^{j+1} K_2^j - R_3^{j+1} R_3^j}{2[C_{44}^{j+1} K_2^{j+1} - (R_3^{j+1})^2]} \right) N_2^{\delta j - \delta} + \\ &\quad \left(\frac{1}{2} + \frac{R_3^j R_3^j - C_{44}^{j+1} K_2^j}{2[C_{44}^{j+1} K_2^{j+1} - (R_3^{j+1})^2]} \right) (r_j^2)^{-\delta} N_2^{-\delta j + \delta} \end{aligned} \right. \quad (36)$$

式中: $\delta = \pm 1$ 。

在式(33)中取 $i = 4$, 可得

$$\left\{ \begin{aligned} A_1^1 &= \frac{N_2^4 A_1^5 - N_1^4 B_1^5}{M_1^4 N_2^4 - M_2^4 N_1^4} \\ B_1^1 &= \frac{M_2^4 A_1^5 - M_1^4 B_1^5}{N_1^4 M_2^4 - M_1^4 N_2^4} \end{aligned} \right. \quad (37)$$

其余系数均可由式(34)求出。同理, 令 $K_2^i = R_3^i \rightarrow 0 (i = 1, 2, \dots, 5)$, 问题解答可退化为无限大弹性材料中单个纳米涂层夹杂反平面问题的界面相模型解答^[20]。

在两种模型中, 当夹杂、涂层和基体任意材料的相位子场弹性常数和声子场相位子场耦合系数取 0 时, 一维六方准晶材料退化为弹性材料, 可得到相应模型问题的解答。

3 数值算例

为研究一维六方准晶纳米涂层夹杂周围应力场的分布情况及纳米尺度下应力的尺度依赖性, 数值算例分析纳米夹杂半径和界面弹性常数对无量纲应力的影响及无量纲应力, 径向应力在纳米夹杂周围的变化趋势。一维六方准晶夹杂, 涂层和基体的弹性常数如表 1 所示^[10,17]。

表 1 一维六方压电准晶材料弹性常数
Table 1 Elastic constants of one-dimensional hexagonal quasicrystals

材料	C_{44}/GPa	K_2/GPa	R_3/GPa
夹杂 I	35	0.15	0.86
涂层 C	50	0.3	1.2
基体 M	70.19	24	1.72

算例中, 取 $\sigma_{zx}^0 = 100 \text{ MPa}$, $H_{zx}^0 = 10 \text{ MPa}$, 夹杂半径 $r_1 = 4 \text{ nm}$ 。在界面相模型中, 当 Ω_2 和 Ω_4 的厚度充分小时, 界面模型可以利用界面相模型来近似模拟^[18], 因此在本节中仅讨论界面模型问题中纳米准晶涂层夹杂周围应力场的分布情况。

记无量纲化声子场和相位场应力分别为

$$\frac{\sigma_{zx}}{\sigma_{zx}^0} = \begin{cases} \sigma_{zx}^I / \sigma_{zx}^0, & z \in \Omega^I \\ \sigma_{zx}^C / \sigma_{zx}^0, & z \in \Omega^C \\ \sigma_{zx}^M / \sigma_{zx}^0, & z \in \Omega^M \end{cases} \quad (37)$$

$$\frac{H_{zx}}{H_{zx}^0} = \begin{cases} H_{zx}^I / H_{zx}^0, & z \in \Omega^I \\ H_{zx}^C / H_{zx}^0, & z \in \Omega^C \\ H_{zx}^M / H_{zx}^0, & z \in \Omega^M \end{cases} \quad (38)$$

图 2 给出了 y 轴涂层上无量纲声子场应力 $\sigma_{zx}/\sigma_{zx}^0$ 随夹杂半径 r_1 的变化情况, 这里涂层厚度 $r_2 - r_1 = 1 \text{ nm}$ 。令 $K_2 = R_3 = 0$, 此时一维六方准晶材料退化为弹性材料。从图 2 中可以看出, 本文界面模型的退化结果与文献[18]中的结果完全一致, 这可以验证本文理论求解的正确性。

在界面模型中, 界面 S_i 的界面弹性常数与一维六方准晶基体的弹性常数比 $\alpha_i^C = C_{44}^{S_i}/C_{44}^M$, $\alpha_i^K = K_2^{S_i}/K_2^M$, $\alpha_i^R = R_3^{S_i}/R_3^M (i = 1, 2)$ 均可在 $[-0.2 \text{ nm}, 0.2 \text{ nm}]$ 之间取值^[17], 记 $\alpha_i = (\alpha_i^C, \alpha_i^K, \alpha_i^R)$ 。图 3、图 4 给出了 y 轴上纳米准晶夹杂侧和纳米涂层侧上当 α_1, α_2 变化时, r_1 对 $\sigma_{zx}/\sigma_{zx}^0$ 和 H_{zx}/H_{zx}^0 的影响, 其中 $\alpha_i = 0.2 \text{ nm}$ 表示 $\alpha_i = (0.2, 0.2, 0.2) \text{ nm} (i = 1, 2)$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \text{ nm}$ 代表忽略界面效应的情况, 以下类同。

从图 3、图 4 可以看出, 随着 r_1 的增大, $\sigma_{zx}/\sigma_{zx}^0$ 和 H_{zx}/H_{zx}^0 均表现出明显的尺寸依赖性。图 3 显示, 当 α_1 为正时, $\sigma_{zx}/\sigma_{zx}^0$ 随着 r_1 的增大而增大; 当 α_1 为负时, $\sigma_{zx}/\sigma_{zx}^0$ 随着 r_1 的增大而减小; α_2 的正负对

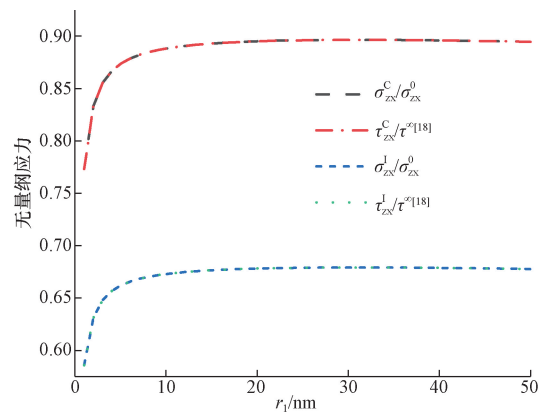


图 2 退化验证

Fig. 2 The degradation verification

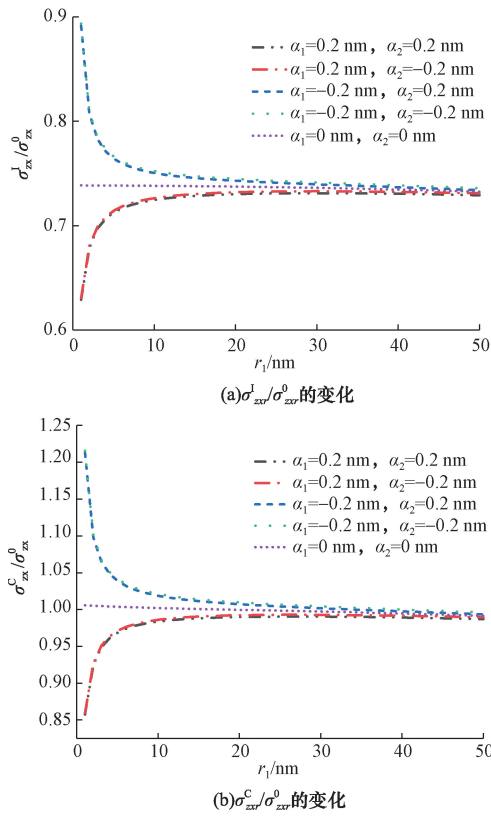


图3 α_1, α_2 不同时, $\sigma_{zx}/\sigma_{zx}^0$ 随 r_1 的变化

Fig. 3 The variation of $\sigma_{zx}/\sigma_{zx}^0$ with r_1 for different α_1, α_2

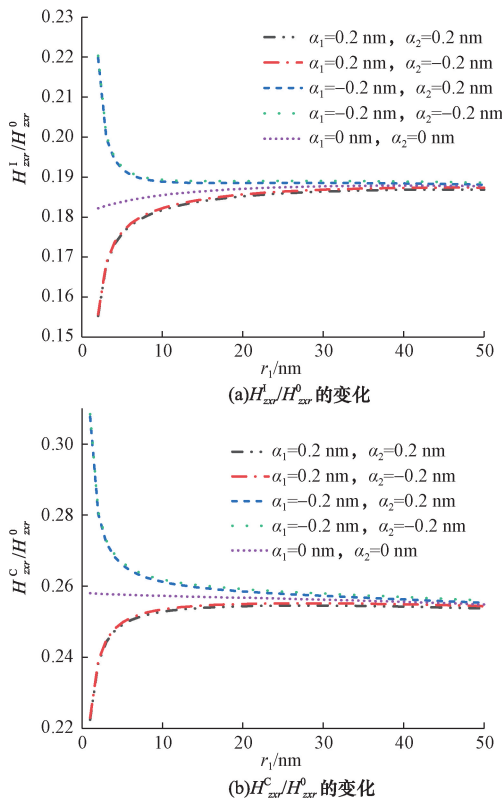


图4 α_1, α_2 不同时, H_{zx}/H_{zx}^0 随 r_1 的变化

Fig. 4 The variation of H_{zx}/H_{zx}^0 with r_1 for different α_1, α_2

$\sigma_{zx}/\sigma_{zx}^0$ 的影响较小。图4(a)表明 α_1 对 H_{zx}^I/H_{zx}^0 的影响较大,而 α_2 对 H_{zx}^I/H_{zx}^0 的影响较小, H_{zx}^I/H_{zx}^0 的变化趋势和图3(a)相同。从图4(b)可以看出,无论 α_1 和 α_2 的正负, H_{zx}^C/H_{zx}^0 都随着 r_1 的增大而增大。

图5给出了 α_1, α_2 不同时, $\sigma_{zx}/\sigma_{zx}^0$ 和 H_{zx}/H_{zx}^0 沿 y 轴的变化趋势,其中当 $y/r_1 \in [0, 1]$ 时, $\sigma_{zx}/\sigma_{zx}^0 = \sigma_{zx}^I/\sigma_{zx}^0, H_{zx}/H_{zx}^0 = H_{zx}^I/H_{zx}^0$; 当 $y/r_1 \in [1, 1.25]$ 时, $\sigma_{zx}/\sigma_{zx}^0 = \sigma_{zx}^C/\sigma_{zx}^0, H_{zx}/H_{zx}^0 = H_{zx}^C/H_{zx}^0$; 当 $y/r_1 \in [1.25, 4]$ 时, $\sigma_{zx}/\sigma_{zx}^0 = \sigma_{zx}^M/\sigma_{zx}^0, H_{zx}/H_{zx}^0 = H_{zx}^M/H_{zx}^0$ 。从图5中可以看出, $\sigma_{zx}^I/\sigma_{zx}^0$ 和 H_{zx}^I/H_{zx}^0 分布均匀,而在界面 S_1, S_2 两侧,应力存在跳跃现象,其中 S_1 界面两侧的应力跳跃现象较为明显。随着 y/r_1 的增大, $\sigma_{zx}^C/\sigma_{zx}^0, \sigma_{zx}^M/\sigma_{zx}^0$ 和 $H_{zx}^C/H_{zx}^0, H_{zx}^M/H_{zx}^0$ 逐渐减小,且 $H_{zx}^C/H_{zx}^0, H_{zx}^M/H_{zx}^0$ 的变化趋势较小。随着 y/r_1 逐渐远离涂层区域, $\sigma_{zx}^M/\sigma_{zx}^0$ 和 H_{zx}^M/H_{zx}^0 的取值趋向于1,这表明远离涂层夹杂时界面效应和夹杂对应力分布几乎没有影响。此外,当 α_1, α_2 同正或同负时, $\sigma_{zx}/\sigma_{zx}^\infty$ 与不考虑界面效应时的取值差异较大,而 α_1, α_2 异号时差异较小。而 α_1, α_2 的取值对 H_{zx}/H_{zx}^0

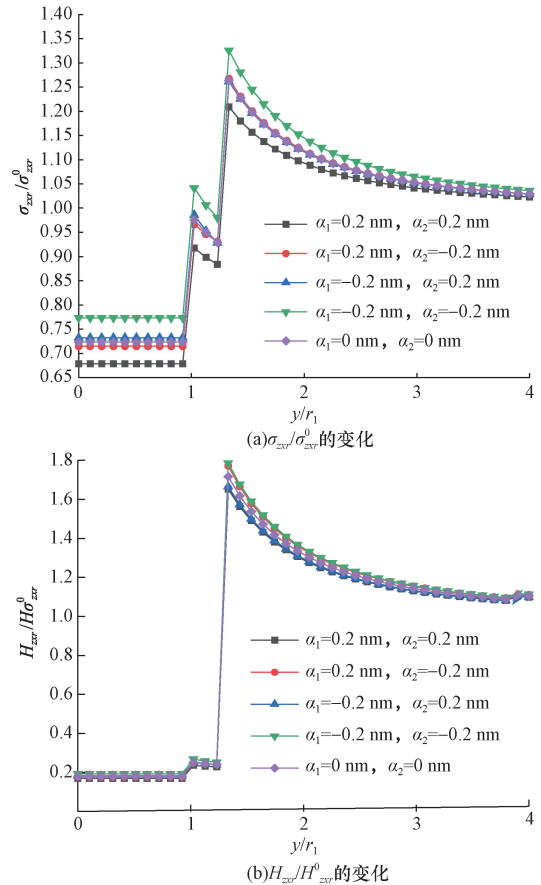


图5 α_1, α_2 不同时, $\sigma_{zx}/\sigma_{zx}^0$ 和 H_{zx}/H_{zx}^0 随 y/r_1 的变化

Fig. 5 The variation of $\sigma_{zx}/\sigma_{zx}^0$ and H_{zx}/H_{zx}^0 with y/r_1 for different α_1, α_2

几乎无影响,这说明表面效应对 H_{zx}/H_{zx}^0 影响较小。

图 6 给出了 α_1, α_2 不同时, $\sigma_{zx}/\sigma_{zx}^0$ 和 H_{zx}/H_{zx}^0 沿 x 轴的变化趋势。从图 6 中可以看出,随着 x/r_1 的增大, $\sigma_{zx}/\sigma_{zx}^0$ 和 H_{zx}/H_{zx}^0 逐渐增大且取值趋近于 1。在涂层区域 [$x/r_1 \in (1, 1.25)$], 当 α_1, α_2 同号时, 沿 x 轴的 $\sigma_{zx}/\sigma_{zx}^0$ 与不考虑界面效应时的取值差异较小, 而 α_1, α_2 异号时差异较大。 α_1, α_2 的取值对 H_{zx}/H_{zx}^0 几乎无影响。

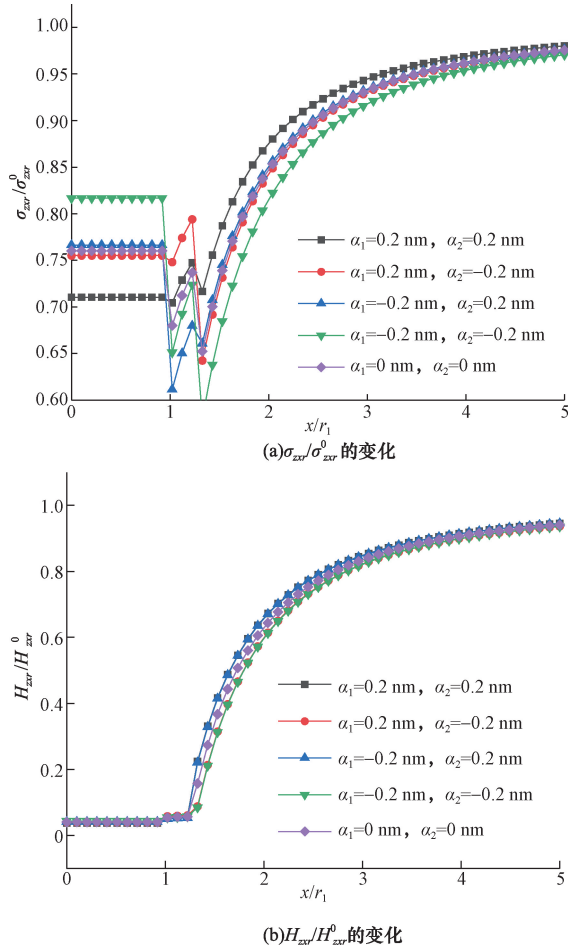


图 6 α_1, α_2 不同时, $\sigma_{zx}/\sigma_{zx}^0$ 和 H_{zx}/H_{zx}^0 随 x/r_1 的变化

Fig. 6 The variation of $\sigma_{zx}/\sigma_{zx}^0$ and H_{zx}/H_{zx}^0 with x/r_1 for different α_1, α_2

4 结论

基于复变函数方法和 Gurtin-Murdoch 表/界面理论, 研究了一维六方准晶单个纳米涂层圆柱形夹杂的反平面剪切问题, 得到以下结论。

(1) 获得了界面和界面相两种模型下应力函数的解析表达式, 进而可得到声子场和相位子场的全场应力和位移的封闭解。

(2) 界面弹性常数 α_1, α_2 的正负会影响准晶纳米夹杂周围的应力场, 其中 α_1 为正负对声子场和相

位子场无量纲化应力影响较明显, 而 α_2 的正负对其影响较小。

(3) 随着纳米准晶夹杂半径的增大, 无量纲化声子场和相位子场应力表现出明显的尺寸依赖性, 其中表面效应对无量纲化声子场应力的影响较为显著, 对无量纲化相位子场应力影响较小。

参 考 文 献

- [1] Eisenhammer T. Quasicrystal films: numerical optimization as a solar selective absorber[J]. Thin Solid Films, 1995, 270(1/2): 1-5.
- [2] 范天佑. 准晶数学弹性力学的缺陷力学[J]. 力学进展, 2000, 30(2): 161-174.
Fan Tianyou. Mathematical theory of elasticity and defects of quasicrystals[J]. Advances in Mechanics, 2000, 30(2): 161-174.
- [3] Yang G, Zhang T, Dong Z, et al. Dynamic mechanical properties of sandstone with two circular inclusions under impact loading[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2024, 133: 104636.
- [4] 马连华, 李雅娆, 谭如峰. 流变基质中刚性椭球夹杂的运动演化机制[J]. 科学技术与工程, 2020, 20(17): 6748-6751.
Ma Lianhua, Li Yarao, Tan Rufeng. The motion evolution mechanism of rigid ellipsoid in viscous flows[J]. Science Technology and Engineering, 2020, 20(17): 6748-6751.
- [5] 范淑琦, 李联和. 一维六方准晶中椭圆夹杂与位错的相互作用问题[J]. 内蒙古师范大学学报, 2022, 51(2): 156-170.
Fan Shuqi, Li Lianhe. Interaction between elliptic inclusion and dislocation in one-dimensional hexagonal quasicrystals[J]. Journal of Inner Mongolia Normal University (Natural Science Edition), 2022, 51(2): 156-170.
- [6] Li G, Li S, Li L. An analysis of composites with two-dimensional decagonal quasicrystal matrix and spheroidal inclusions[J]. International Journal of Modern Physics B, 2024, 38(7): 2450103.
- [7] 武雨润, 李璐, 李联和. 考虑弹簧型不完美界面的一维正交准晶有效弹性性能研究[J/OL]. 应用力学学报, 1-12 [2025-01-23]. <https://link.cnki.net/urlid/61.1112.o3.20231115.1446.013>.
Wu Yurun, Li Lu, Li Lianhe. Study on the effective elastic properties of one-dimensional orthogonal quasicrystals considering spring-type imperfect interfaces[J/OL]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 1-12 [2025-01-23]. <https://link.cnki.net/urlid/61.1112.o3.20231115.1446.013>.
- [8] 曹婷, 付笑宇, 张亮亮, 等. 三维立方准晶椭球夹杂的 Eshelby 张量[J]. 固体力学学报, 2022, 43(6): 750-762.
Cao Ting, Fu Xiaoyu, Zhang Liangliang, et al. Eshelby tensors for three-dimensional cubic quasicrystal materials with ellipsoidal inclusions[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2022, 43(6): 750-762.
- [9] Guo J, Zhang Z, Xing Y. Anti-plane analysis for an elliptical inclusion in 1D hexagonal piezoelectric quasicrystal composites[J]. Philosophical Magazine Structure and Properties of Condensed Matter, 2016, 96(4): 349-369.
- [10] Guo J, Pan E. Three-phase cylinder model of one-dimensional hexagonal piezoelectric quasi-crystal composites[J]. Journal of Applied Mechanics, 2016, 83(8): 081007-081017.

- [11] 胡克强, 高存法, 付佳维, 等. 无限大压电准晶介质中两个圆柱夹杂的干涉作用[J]. 内蒙古工业大学学报: 自然科学版, 2023, 42(3): 230-236.
Hu Keqiang, Gao Cunfa, Fu Jiawei, et al. Interference of two cylindrical inclusions in an infinite piezoelectric quasicrystal medium [J]. Journal of Inner Mongolia University of Technology (Natural Science Edition), 2023, 42(3): 230-236.
- [12] He L, Li Z. Impact of surface stress on stress concentration[J]. International Journal of Solids and Structures, 2006, 43(20): 6208-6219.
- [13] Gurtin M E, Murdoch A I. A continuum theory of elastic material surfaces[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1975, 57(4): 291-323.
- [14] 赵雪芬, 马园园, 卢绍楠. 一维六方准晶中纳米尺度正三角形孔边裂纹的反平面问题[J]. 科学技术与工程, 2023, 23(7): 2727-2733.
Zhao Xuefen, Ma Yuanyuan, Lu Shaonan. Anti-plane problem of nano-cracks emanating from a regular triangular nano-hole in one dimensional hexagonal quasicrystals[J]. Science Technology and Engineering, 2023, 23(7): 2727-2733 .
- [15] Yang D, Liu G. Exact solution of six cracks in hexagonal hole in 1D hexagonal piezoelectric quasicrystals considering surface effect [J]. Chinese Physics B, 2020, 29(10): 104601.
- [16] Su M, Xiao J, Feng G, et al. Mode-III fracture of a nanoscale cracked hole in one dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals[J]. International Journal of Mechanics and Materials in Design, 2022, 18(2): 423-433.
- [17] 王磊. 具有非理想界面的一维六方准晶纳米复合材料的有效力学性能研究[D]. 呼和浩特: 内蒙古工业大学, 2023.
Wang Lei. Effective mechanical properties of onedimensional hexagonal quasicrystal nanocomposites with imperfect interfaces [D]. Huhehaote: Inner Mongolia University of Technology, 2023.
- [18] Xiao J, Xu Y, Zhang F. Evaluation of effective electroelastic properties of piezoelectric coated nano-inclusion composites with interface effect under antiplane shear[J]. International Journal of Engineering Science, 2013, 69: 61-68.
- [19] Shi Y, Wan Y, Zhong Z. Effective properties of coated fibrous piezoelectric composites with spring-type interfaces under anti-plane mechanical and in-plane electrical loads [J]. Science China Physics Mechanics and Astronomy, 2016, 59(10): 64-71.
- [20] 崔春丽, 徐耀玲, 肖俊华. 无限介质中单个纳米涂层夹杂反平面问题的两个模型[J]. 力学季刊, 2020, 41(2): 258-266.
Cui Chunli, Xu Yaoling, Xiao Junhua. Two models on the anti-plane problem of a nano coated inclusion in an infinite medium [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2020, 41(2): 258-266.
- [21] Luo J, Wang X. On the anti-plane shear of an elliptic nano inhomogeneity[J]. European Journal of Mechanics A/Solids, 2009, 28(5): 926-934.