



DOI:10.12404/j.issn.1671-1815.2403837

引用格式:任青阳,施俭,王彦丁,等.不同拟合指标下模拟节理岩体结构面产状的 Copula 函数方法[J].科学技术与工程,2025,25(10):4274-4283.

Ren Qingyang, Shi Jian, Wang Yanding, et al. Copula function method for simulating the occurrence of jointed rock mass structural plane under different fitting indexes[J]. Science Technology and Engineering, 2025, 25(10): 4274-4283.

不同拟合指标下模拟节理岩体结构面产状的 Copula 函数方法

任青阳^{1,2}, 施俭^{1,2}, 王彦丁^{1,2}, 肖宋强^{1,2}

(1. 重庆交通大学山区桥梁及隧道工程国家重点实验室, 重庆 400074; 2. 重庆交通大学土木工程学院, 重庆 400074)

摘要 为准确选取模拟节理岩体结构面产状互相关性的 Copula 函数,提出了不同拟合指标下模拟节理岩体结构面产状的 Copula 函数方法,通过采用最小平方欧式、AIC(Akaike information criterion)信息准则、BIC(Bayesian information criterion)信息准则这 3 种拟合指标确定各自的最优 Copula 函数并通过 MATLAB 确定实测产状数据的最优边缘分布,建立倾角和倾向的二维联合分布函数。同时结合蒙特卡洛抽样法自动生成模拟数据,将数据导入 Dips 软件中进行可视化处理,得到产状的赤平投影图,对比实测的倾角和倾向数据和不同拟合指标下确定的 Copula 函数模拟数据间的差异。最后,基于工程案例检验方法的有效性。结果表明:不同的拟合指标会产生不同的 Copula 函数,对模拟产状的有效性也会有较大差异,若是选择不当的拟合指标可能导致选择不准确的 Copula 函数,从而使模型无法准确地捕捉数据的相关结构和特征;不适当的拟合指标可能导致拟合模型与真实数据之间存在较大的误差,使得模型的预测能力和解释能力下降,就本案例表明在最小平方欧式值拟合指标下选择的 Gaussian Copula 函数拟合实测数据效果最好。此研究将有助于应用 Copula 函数时选用恰当的拟合指标。

关键词 结构面; Copula 函数; 产状; 拟合指标; 互相关性; 赤平投影

中图分类号 TU45; 文献标志码 A

Copula Function Method for Simulating the Occurrence of Jointed Rock Mass Structural Plane under Different Fitting Indexes

REN Qing-yang^{1,2}, SHI Jian^{1,2}, WANG Yan-ding^{1,2}, XIAO Song-qiang^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Mountain Bridge and Tunnel Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China;
2. School of Civil Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

[Abstract] In order to accurately select the Copula function to simulate the mutual correlation between inclination and dip of jointed rock mass structural plane, the Copula function method to simulate the occurrence of jointed rock mass structural plane under different fitting indexes was proposed. The optimal Copula function was determined by using the least square Euclidian, AIC information criterion and BIC information criterion, and the optimal edge distribution type of the observed occurrence data of the structural plane was determined by Matlab software. At the same time, Monte Carlo sampling method was used to automatically generate simulation data, and the data was imported into Dips software for visualization processing, and the erP projection map of occurrence was obtained. The difference between the measured dip and inclination data and the simulated data determined by Copula function under different fitting indexes was compared. Finally, the validity of the method is tested based on engineering cases. The results show that different fitting indicators will produce different Copula functions, and there will be great differences in the effectiveness of simulation occurrence. Improper fitting indicators may lead to the selection of inaccurate Copula functions, so that the model can not accurately capture the relevant structure and features of the data. Inappropriate fitting indexes may lead to large errors between the fitting model and the real data, which will decrease the predictive ability and interpretation ability of the model. In this case, it is shown that the Gaussian Copula function selected under the fitting index of least square Euclidene values has the best fitting effect on the measured data. This research will help to select the appropriate fitting index when using Coupla function.

[Keywords] structural plane; copula function; attitude; fitting index; cross-correlation; equatorial projection

收稿日期: 2024-05-23; 修订日期: 2025-01-14

基金项目: 国家重点研发计划(2023YFC3008304-4); 国家自然科学基金(U20A20314, 41472262); 重庆市高校创新研究群体项目(CXQT19021); 重庆市自然科学基金重点项目(cstc2020jcyj-zdxmX0012)

第一作者: 任青阳(1975—),男,汉族,河南南阳人,博士,教授,博士研究生导师。研究方向:岩土工程防灾减灾。E-mail: qyren@cqjtu.edu.cn。

在地质工程领域,结构面是岩石中具有特定走向和倾角的面状断裂或层理构造,结构面的产状参数(如倾向、倾角和间距)对于地质工程设计和岩石力学分析非常重要。准确模拟结构面互相关产状是提高地质工程设计和岩石力学分析的关键。传统的统计方法主要基于假设线性相关和独立分布,忽略了结构面之间的非线性和相依关系。因此,需要一种新的切实可行的方法来模拟结构面互相关产状。

众所周知,节理岩体产状主要包括3个要素:倾角、倾向以及走向,而走向是可以通过倾向换算出来,因此在表征产状中,一般通过倾角和倾向来表征产状,大量的文献以及工程实践结果表明倾角与倾向两个参数存在极高的互相关性^[1-6],因此不能将这两个参数分开单独分析。但是在查阅相关资料时发现相当一部分学者通常将倾角和倾向两个参数单独考虑建立联合概率分布模型,以统计这两个参数的分布形式,然后在构建结构面网络模型时将之前所得到的两个参数的样本数据进行随机抽样组合。毋庸置疑,这种模拟方式可能会与实际工程产生较大差异^[7-8]。

由于岩体工程体量较大,工程技术手段有限,导致无法取得完全勘探资料。因此,唐小松^[9]从统计分析角度出发从小样本数据中获得岩体参数概率分布信息和参数间互相关性信息。然而大量的工程实践表明,由于受到不完备概率信息的制约,想要高效拟合产状的联合概率分布模型存在一定困难。目前大家广泛使用 Fisher 分布方法^[10-12]、双平均密度分布方法^[13]、双正态密度分布方法^[13]、Bingham 分布^[14-15]等方法来表征产状。但是地质构造经过几百年甚至几千上万年的板块运动,岩体不连续面产状变得相当复杂,所以以上概率分布方法无法准确表征有些岩体的产状特征。基于此,有关研究人员通过二维经验分布法来描述不连续面产状的统计特性。这种方法存在一个重要的弊端,就是需要研究人员手动划分网格,这样不可避免地带来了局限性和计算误差的问题。岩体不连续面的特征参数对岩体稳定性起决定性作用,但二维经验分布方法无法满足高维的需要。因此,二维经验分布方法难以扩展到多维情形。

Copula 函数是近年来在岩土工程可靠度研究领域广泛应用的一种方法,用于捕捉多个参数之间的相关性,并构建这些参数的联合概率分布函数,通过这种方法,可以处理多种不同的相关结构,从而更准确地描述随机量的参数特征和可靠度,如王晓磊等^[16]通过 Copula 函数进行水平和竖向地震强度参数相关性分析并建立参数间的联合概率

模型。通过文献阅读可以发现目前将 Copula 函数应用于岩土工程领域的还不太多。Copula 函数是一个用于描述多维随机变量之间相关关系的函数,它将各个边际分布函数联结起来,构建多维联合分布函数。Copula 函数本身不包含边际分布信息,而是通过它们的累积分布函数来定义相互关系,相比于传统的产状相关性模拟方法,Copula 函数能够更灵活地处理参数数据之间的相关性,并提供更准确的模拟和拟合能力,如蒋水华等^[17]应用 Copula 理论模拟岩土不连续面产状互相关性。但是目前的学者在应用 Copula 函数时,对于最优 Copula 函数识别准则的选举各有差异,目前被广泛应用于 Copula 函数识别的主要有 AIC 识别准则、BIC 识别准则和最小平方欧氏距离法。而文献^[17]中则直接应用 AIC 识别准则,没有实际理论支持;Fan 等^[18]在对三峡库区香溪河流域多变量选择最合适的边际和联合分布形式时直接采用 AIC 信息准则,未具体说明理由;陈建兵等^[19]在进行混凝土受压本构全曲线相关性研究中直接选用 AIC(Akaike information criterion)信息准则选用最优 Copula 函数;孙杰涛等^[20]根据 AIC 信息准则和 BIC 信息准则识别最优 Copula 函数;Zhang 等^[21]对岩土问题的失效概率所采用的对称或非对称相关结构研究中同样直接采用 AIC 识别准则选择最优 Copula 函数;Charles 等^[22]在选择最优 Copula 函数生成基于 Copula 的旋转各向异性随机场,以表征土壤性质的空间变异性时,直接采用 AIC 信息识别准则。因此,有必要研究在3种不同识别准则下各 Copula 函数在模拟产状上的拟合度,比较最优识别准则。

本文研究对3种拟合指标拟合的 Copula 函数进行产状模拟,同时结合 Dips 软件对产状的倾角和倾向互相关性可视化处理,分析不同拟合指标下所得到的 Copula 函数在模拟倾角与倾向相关性差异。

1 Copula 函数理论

1.1 Copula 函数定义

Copula 理论最早被运用于表征随机变量间的互相关性结构。而后 Copula 理论开始在股市、银行等领域被广泛用来描述变量间相关性^[23]。当相关变量 X_i 为多维情况,其中 $i=1,2,\dots,n$, X_i 的边缘分布的累计概率密度 $F_i(X)$,服从标准均匀分布,可得标准均匀分布变量 $U_i = F_i(X_i)$,定义 $[0,1]$ 区间内则有

$$\begin{aligned} \Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= \Pr[U_1 \leq F_1(x_1), \dots, U_n \leq F_n(x_n)] \\ &= C[F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)] \quad (1) \end{aligned}$$

式(1)中: x_n 为变量 X_i 在 $[0, 1]^n$ 标准均匀空间内的累积分布函数。

多维 Copula 函数即为 $C[F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)]$ 定义在 $[0, 1]^n$ 标准均匀空间内的累积分布函数。Sklar^[24] 提出了 Sklar 定理, 使得人们在分析相关变量相关性中获得了更加高效且便利的联合分布模型, 推动了 Copula 函数在联合分布模型邻域的发展。其主要内容为: 若已知 n 维相关变量 X_i 的边缘累积分布函数 $F_1(X_1), F_2(X_2), \dots, F_i(X_i)$ 和其联合分布函数 $F_{1,2,\dots,n}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 有且仅有一个 Copula 函数, 满足:

$$\begin{aligned} F_{1,2,\dots,n}(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ = C_{1,2,\dots,n}[F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)] \\ = C_{1,2,\dots,n}(u_1, u_2, \dots, u_n) \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)中: $F_i(x_i) = u_i$ 为随机变量边缘分布函数。

Copula 函数的概率密度函数 $D_{1,2,\dots,n}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ 与联合分布模型的概率密度函数 $f_{1,2,\dots,n}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的关系^[24] 为

$$\begin{aligned} f_{1,2,\dots,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ \prod_{i=1}^n \frac{\partial F_i(x_i)}{\partial x_i} \frac{\partial^n C_{1,2,\dots,n}[F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)]}{\partial F_1(x_1) \partial F_2(x_2) \dots \partial F_n(x_n)} \\ = \prod_{i=1}^n f_i(x_i) D_{1,2,\dots,n}[F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)] \\ = D_{1,2,\dots,n}(u_1, u_2, \dots, u_n) \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \end{aligned} \quad (3)$$

由式(3)可知, 多维联合分布模型的概率密度函数 $f_{1,2,\dots,n}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 等效于 Copula 函数的概率密度函数 $D_{1,2,\dots,n}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ 。从中可以发现, 与其他联合分布模型不同的是此方法将联合分布模型一分为二, 由各随机变量边缘分布函数和各随机变量间的 Copula 函数共同组合, 两个函数的构造可以分开进行互不干扰, 相对传统的多维联合分布避免在整体以及各分布类型和不同 Copula 函数上的弊端, 促进多种随机变量联合分布模型的高效构建。

1.2 二维 Copula 函数

对于二维情况, Copula 函数是定义为 $[0, 1]$ 区间内均匀分布的二维联合分布函数^[24], 是以 Copula 函数将两个随机变量的边缘分布耦合起来。

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) = C[F(x_1), F(x_2); \theta] \\ = C(u_1, u_2; \theta) \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)中: θ 为 Copula 函数参数。

当随机变量 X_i 的概率密度函数 $f_i(x_i)$ 存在且连续, 其中 $i = 1, 2$, 那么对式(4)两边同时求导就能够得到随机变量 X_i 的联合概率密度函数 $f(x_1, x_2)$ 为

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)D[F_1(x_1), F_2(x_2); \theta] \quad (5)$$

式(5)中: $D[F_1(x_1), F_2(x_2); \theta] = D(u_1, u_2; \theta)$ 为 Copula 函数的密度函数。

综上所述, 如果随机变量 X_i 的边缘分布函数和 Copula 函数确定, 就可以通过式(4)和式(5)分别构建随机变量 X_i 的联合分布函数和联合概率密度函数^[24]。Copula 函数的相关参数 θ ^[25] 可以通过变量 X_i 间的线性相关系数或秩相关系数等求出。如 Pearson 线性相关系数、Kendall 秩相关系数等方法。

2 相关性度量指标

2.1 Pearson 线性相关系数

Pearson 线性相关系数 r 的公式为

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \hat{x}_1)(x_{2i} - \hat{x}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \hat{x}_1)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{2i} - \hat{x}_2)^2}} \quad (6)$$

式(6)中: (x_{1i}, x_{2i}) 为 (X_1, X_2) 的样本, 其中 $i = 1, 2, \dots, n$; \hat{x}_1 和 \hat{x}_2 为随机变量 X_i 的样本均值, 其中 $i = 1, 2$ 。

Copula 函数相关参数 θ 可由变量 X_i 间的 Pearson 相关系数 ρ 求得。由相关系数的定义, 可得 ρ 与 θ 间的关系^[25] 为

$$\begin{aligned} \rho = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} f_1(x_1)f_2(x_2) \times \\ D[F_1(x_1), F_2(x_2); \theta] dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)中: $\mu_{1,2}$ 为变量 X_i 的均值; $\sigma_{1,2}$ 为变量 X_i 的标准差。

若已知变量 X_i 间的 Pearson 线性相关系数 ρ , 解析式(7)就可以解出参数 θ , ρ 的取值区间为 $[-1, 1]$ 且 ρ 的绝对值越大则变量间的线性相关性越显著。

2.2 Kendall 秩相关系数

Kendall 秩相关系数 τ 的计算公式为

$$\tau = (C_n^2)^{-1} \sum_{i < j} \text{sign}[(x_{1i} - x_{1j})(x_{2i} - x_{2j})] \quad (8)$$

式(8)中: (x_i, y_i) 为观测点值, 其中 $i, j = 1, 2, \dots, n$; sign 为符号函数。

$$\begin{aligned} \text{sign}[(x_{1i} - x_{1j})(x_{2i} - x_{2j})] = \\ \begin{cases} 0, & (x_{1i} - x_{1j})(x_{2i} - x_{2j}) > 0 \\ 1, & (x_{1i} - x_{1j})(x_{2i} - x_{2j}) = 0 \\ -1, & (x_{1i} - x_{1j})(x_{2i} - x_{2j}) < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

同样, τ 越大则变量间的相关性越显著。在进

行线性或者非线性的变换时 Kendall 秩相关系数与 Pearson 线性相关系数存在一个主要的差异为在变换时 Kendall 秩相关系数都保持不变。分析其主要原因为: Kendall 秩相关系数衡量的是两个变量之间的等级相关性,而不受数据的线性或非线性变换的影响。因此,在进行线性或非线性变换时, Kendall 秩相关系数保持不变。这是因为 Kendall 秩相关系数是基于排名而不是原始数据的数值计算得出的,所以它不受数据的缩放或变换的影响。Pearson 线性相关系数衡量的是两个变量之间的线性相关性,它对数据的线性变换敏感。当进行线性变换时, Pearson 线性相关系数的特征也会发生相应的变化。在进行简单线性变换 ($Y = aX + b$) 时, Pearson 线性相关系数的值会保持不变,但其解释可能会有所改变。例如,如果对 X 和 Y 进行平移或缩放变换,则相关系数的值不会改变,但线性关系的斜率和截距可能会发生变化。而在进行非线性变换时, Pearson 线性相关系数的性质会发生较大改变。非线性变换可能会导致变量之间的线性关系变得非线性,从而影响 Pearson 相关系数的解释能力。因此,在进行非线性变换时, Pearson 线性相关系数的特征可能会发生明显的变化。

在二维情况下, Copula 函数的参数 θ [25] 可以通过 Kendall 秩相关系数与 Copula 函数 $C(u_1, u_2; \theta)$ 的关系式求出,即

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2; \theta) dC(u_1, u_2; \theta) - 1 \quad (10)$$

从式(10)可以得出,若使用式(10)求解 Copula 函数参数 θ , 其值只与变量间的相关结构有关,而与变量的边缘分布无关。可以独立地建模变量的相关性和边缘分布,通过 Kendall 秩相关系数来量化它们之间的关系。

通过对比可以得到, Pearson 相关系数只能表征随即参数变量间的线性关系,而节理岩体的参数大多是非线性的,由此可以得出该相关系数无法表征节理岩体倾角和倾向的非线性关系。但是在数学中为了减少 Pearson 相关系数带来的弊端,提出了秩相关系数 τ , 本文所应用的 Kendall 秩相关系数 τ 能够有力地表征参数间的非线性相关性 [9]。

3 联合分布函数构造

3.1 参数最优边缘分布识别

AIC 准则和 BIC 准则被广泛应用于最优边缘参数的识别, AIC 准则 [26] 是由日本统计学家 Akaike 提出的检验统计模型拟合优良性的标准。其计算公式 [16] 为

$$AIC = -2 \sum_{i=1}^N \ln f(x_i; p, q) + 2k_1 \quad (11)$$

式(11)中: x_i 为倾角和倾向两个参数的第 i 组试验数据, N 为样本数目; p 和 q 为分布参数; $f(x_i; p, q)$ 为倾角和倾向的边缘概率密度函数; k_1 为倾角和倾向的边缘分布函数的参数数目。对于常见的边缘分布类型,如正态分布、对数正态分布、正态分布等类型, $k_1 = 2$ [16]。

文献[27]在 AIC 准则的基础上提出了 BIC 准则又称贝叶斯信息准则,与 AIC 准则相同,用于检验统计模型拟合度。其计算公式 [16] 为

$$BIC = -2 \sum_{i=1}^N \ln f(x_i; p, q) + k_1 \ln N \quad (12)$$

因此,当已知随机参数变量的实测数据时,可以通过 AIC 和 BIC 准则方法快速有效地确定最优边缘分布类型,如果所有备选边缘分布函数的参数数目相等,则由 AIC 和 BIC 准则确定的最优边缘分布相同 [16]。在本文研究中选用 AIC 信息准则来识别参数的最优边缘分布,所求 AIC 值最小值对应的分布类型为最优边缘分布。

3.2 最优 Copula 函数选择与拟合指标

最优 Copula 函数是指在给定数据集情况下,能够最准确地描述随机变量之间相关性结构的 Copula 函数。由 Copula 函数定义可知, Copula 函数理论包括不同的 Copula 函数类型,它们所表征的随机变量间的相关性是不同的,使用不同的 Copula 函数会有不同的相关结构。因此,在实际研究过程中,仅仅知道节理岩体的实测数据是不够的,关键一步是要选取最佳拟合实测数据互相关结构的 Copula 函数。AIC 准则 [26]、BIC 准则 [27] 以及最小平方欧式 [28] 常用于选择最优 Copula 函数,各准则计算出的最小值对应的 Copula 函数为最优 Copula 函数。本文研究对比分析 3 种方法下所选取的 Copula 函数在模拟节理岩体产状的差异性。以下为 3 种拟合指标的基本介绍。

3.2.1 最小平方欧氏距离

平方欧氏距离 d^2 [28] 是指所构造的理论累积分布函数与经验累积概率分布函数在变量观测值中差值的平方和。平方欧氏距离 d^2 计算公式为

$$d^2 = \sum_{i=1}^N (d_i - \tilde{d}_i)^2 = \sum_{i=1}^N [C(u_{1i}, u_{2i}) - \tilde{C}(u_{1i}, u_{2i})]^2 \quad (13)$$

式(13)中: d_i 为理论累积分布函数值; \tilde{d}_i 为经验累积分布函数值; $C(\cdot, \cdot)$ 为二维分布模型的理论累积分布函数; $\tilde{C}(\cdot, \cdot)$ 为经验累积分布函数。

在实际工程以及研究中,由于考虑到计算成本和操作难度等原因,最小平方欧氏距离 d^2 更多地应用在二维 Copula 的选择中^[29-30]。

3.2.2 AIC 信息准则

AIC 考虑了模型的拟合程度和复杂度,并通过权衡两者来选择最佳模型。二维情况下的计算公式^[26]为

$$AIC = -2 \sum_{i=1}^N \ln D(u_{1i}, u_{2i}, \theta) + 2k \quad (14)$$

式(14)中: k 为相关参数的个数。

3.2.3 BIC 信息准则

与 AIC 相似,只是在训练模型时,增加参数基数,即增加模型复杂度,会增大似然函数,但是也会导致过拟合现象。针对该问题,AIC 和 BIC 均引入了与模型参数个数相关的惩罚项,BIC 的惩罚项比 AIC 的大,考虑了样本数量,样本数量过多时,可有效防止模型精度过高造成的模型复杂度过高。二维情况下其计算公式^[27]为

$$BIC = -2 \sum_{i=1}^N \ln D(u_{1i}, u_{2i}, \theta) + k \ln N \quad (15)$$

4 Copula 函数应用基本流程

Copula 函数应用基本流程包括:①根据实际研究需要选择研究的随机变量参数;②确定各随机变量的边缘分布;③计算相关系数及显著性检验;④确定各备选 Copula 函数的参数;⑤ Copula 函数的拟合度检验与优选;⑥推求联合概率分布和条件概率分布;⑦结合实际问题的展开相关后续研究。

5 Copula 函数适用条件与优势

5.1 Copula 函数适用条件

(1) 节理岩体倾角和倾向的互相关性乃至其他参数间的相关性都可以由多种度量指标度量,只是需要注意的是不同度量指标需要在不同的环境下使用,有些参数间存在上下尾相关性、正负相关性等等,在研究以及工程中常用的度量指标主要有最小平方欧式系数、Spearman 秩相关系数、Kendall 秩相关系数等等。因此在考虑实际问题时应合理选择度量指标。

(2) 在应用 Copula 函数时,椭圆型 Copula 函数族和阿基米德 Copula 函数族是应用频率最高的。椭圆型 Copula 函数族中的 Normal Copula 尾部相关性系数为零,t-Copula 尾部系数相同。阿基米德 Copula 函数族中的 Clayton Copula、Frank Copula 和

Gumbel Copula 的尾部相关性有所不同。由此可知,不同的 Copula 函数在分析参数间的依赖结构和尾部相关性方面存在差异。因此,在应用 Copula 函数计算参数间相关性时需要恰当使用 Copula 函数,才能更加精确地分析数据间相互相关性。

(3) 根据研究发现,已知的 Copula 函数在描述正负相关性问题上存在较大差异,多数的 Copula 函数只能表征随机变量间的正互相关性和较弱的负互相关性,不能同时表征随机变量间的正负互相关性。

5.2 Copula 函数优势

(1) Copula 函数最具优势的方面就是它可以将联合分布函数分成 Copula 函数结构和变量的边缘分布两个各自独立,互补干扰的独立部分,不受随机变量边缘分布的限制。

(2) 由 Copula 函数理论可以推出,不管是二维还是多维自相关,还是互相关变量,都可以采用 Copula 函数表征参数间的相关结构,使其可以拓展到多维领域。

(3) 对于非线性相关关系问题,Kendall 秩相关系数 τ 可以有效代替用 Pearson 相关系数 ρ 来度量非线性相关性。

(4) 在选择最优边缘分布以及最优 Copula 函数时,可以采用信息准则,快速有效地实现最优 Copula 函数的选择。

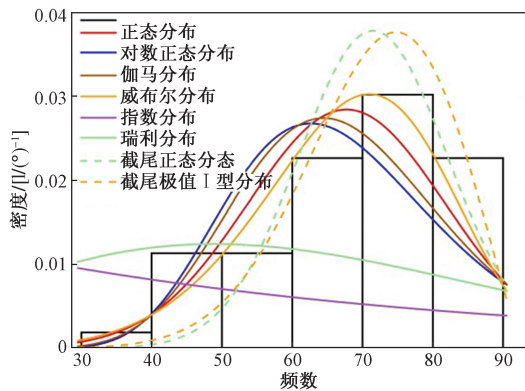
6 案例分析

为分析在不同 Copula 函数识别准则下各 Copula 函数模拟结构面产状拟合度的差异性,本文研究基于以上理论分析,以京珠高速公路鄂北某路段岩质边坡参数数据为例,该路段位于大别山南麓,为丘陵地带大地构造上位置上位于大别山斜背的次级褶皱黑土沟倒转斜背的北翼^[31]。贾洪彪等^[31]将该路段研究区分为 6 个不同的结构均匀区,每个区代表一个路段,共布置测线 26 条,测量结构面 3 826 条,以第 6 均质区为例,采用了动态类聚的方法把结构面样本分为 5 组,得到其优势产状,以第 4 组结构面产状实测数据为例测数据为例,如表 1 所示倾角和倾向数据,基于不同的方法进行模拟。图 1 为倾角和倾向的频率直方图,图 2(a)和图 2(b)为 53 条倾角与倾向实测数据的极点赤平投影图及其 3D 图,其互相关系数 $\tau = 0.02$ 。

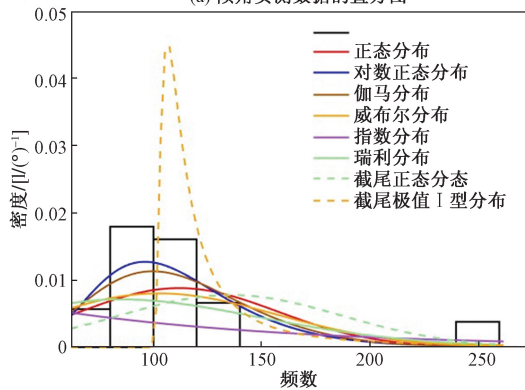
应用 MATLAB 程序计算出表 1 中倾角与倾向的 AIC 值及其均值和方差,具体数据如表 2 和表 3 所示。

表 1 实测节理裂隙数据
Table 1 Measured joint fracture data

| 序号 | 倾向/(°) | 倾角/(°) | 序号 | 倾向/(°) | 倾角/(°) | 序号 | 倾向/(°) | 倾角/(°) | 序号 | 倾向/(°) | 倾角/(°) |
|----|--------|--------|----|--------|--------|----|--------|--------|----|--------|--------|
| 1 | 260 | 88 | 15 | 115 | 75 | 29 | 95 | 55 | 43 | 128 | 62 |
| 2 | 255 | 85 | 16 | 116 | 63 | 30 | 82 | 81 | 44 | 65 | 89 |
| 3 | 255 | 85 | 17 | 115 | 81 | 31 | 108 | 80 | 45 | 120 | 54 |
| 4 | 98 | 84 | 18 | 80 | 42 | 32 | 76 | 72 | 46 | 95 | 54 |
| 5 | 65 | 89 | 19 | 76 | 72 | 33 | 76 | 72 | 47 | 98 | 75 |
| 6 | 98 | 75 | 20 | 76 | 72 | 34 | 128 | 74 | 48 | 110 | 49 |
| 7 | 82 | 84 | 21 | 80 | 71 | 35 | 128 | 74 | 49 | 95 | 55 |
| 8 | 130 | 61 | 22 | 87 | 42 | 36 | 110 | 52 | 50 | 115 | 49 |
| 9 | 105 | 71 | 23 | 87 | 42 | 37 | 85 | 76 | 51 | 103 | 30 |
| 10 | 119 | 79 | 24 | 80 | 46 | 38 | 85 | 63 | 52 | 260 | 86 |
| 11 | 115 | 82 | 25 | 90 | 79 | 39 | 103 | 66 | 53 | 98 | 75 |
| 12 | 94 | 57 | 26 | 90 | 79 | 40 | 103 | 66 | | | |
| 13 | 110 | 63 | 27 | 110 | 63 | 41 | 128 | 62 | | | |
| 14 | 110 | 63 | 28 | 110 | 63 | 42 | 128 | 62 | | | |

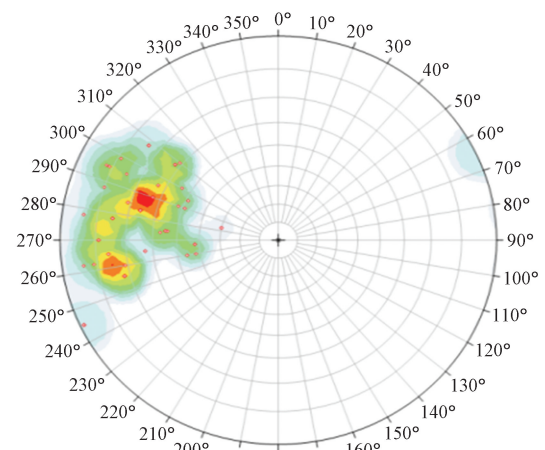


(a) 倾角实测数据的直方图

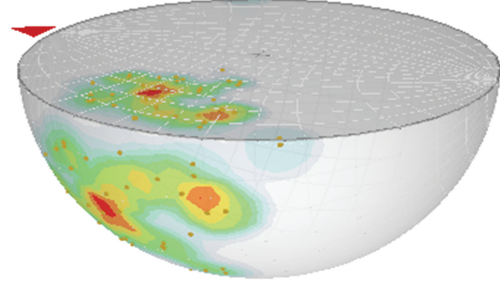


(b) 倾向实测数据的直方图

图 1 不连续面倾角和倾向实测数据的直方图
Fig. 1 Histogram of measured data of dips and dips of discontinuities



(a) 样本产状实测数据的赤平投影图



(b) 样本产状实测数据的3D赤平极点投影图

图 2 样本产状赤平投影图 ($\tau = 0.02$)
Fig. 2 Stereo-projection of sample occurrence

表 2 倾角和倾向不同边缘分布类型的 AIC 值
Table 2 AIC values of different edge distribution types of dip angle and dip direction

| 参数 | AIC 值 | | | | | | | |
|----|--------|--------|--------|------------|--------|--------|--------|--------|
| | 正态分布 | 截尾分布 | 对数分布 | 截尾极值 I 型分布 | 伽马分布 | 威布尔分布 | 指数分布 | 瑞利分布 |
| 倾向 | 557.73 | 588.91 | 523.85 | 596.03 | 665.91 | 553.23 | 608.05 | 556.34 |
| 倾角 | 433.43 | 529.95 | 442.66 | 429.44 | 565.43 | 429.90 | 554.83 | 488.30 |

由最小平方欧式值定理与表 4 可以得出,最小平方欧式值所得到的拟合最好的 Copula 函数是 Gaussian Copula 函数,基于表 2 和图 1 得出倾角和倾向实测数据最优的边缘分布分别为截尾极型 I 分布和对数正态分布。那么根据计算得到的结果,利用蒙特卡洛模拟产状数据,再通过 Dips 软件绘制节理产状极点赤平投影图,如图 3(a)和图 3(b)所示即 Gaussian Copula 函数模拟得到的。

表 3 结构面特征值

Table 3 Structural eigenvalue

| 倾向/(°) | | 倾角/(°) | |
|--------|------|--------|----|
| 均值 | 方差 | 均值 | 方差 |
| 103 | 18.7 | 66 | 15 |

表 4 不同 Copula 函数的最小平方欧氏距离值 d^2

Table 4 d^2 values for differnet Copula functions

| Copula 函数 | 最小平方欧氏距离值 |
|-----------|-----------|
| Gaussian | 0.026 2 |
| Gumbel | 0.037 9 |
| Frank | 0.026 9 |
| Clayton | 0.028 1 |
| t-Copula | 0.028 2 |

与此类推,基于表 5 可以得出最小 AIC 值所得到的拟合最好的 Copula 函数是 t-Copula 函数,边缘分布同上,图 4(a)和图 4(b)产状极点赤平投影图是 AIC 值所得到的拟合最好的 Copula 函数 t-Copula 函数模拟得到的。

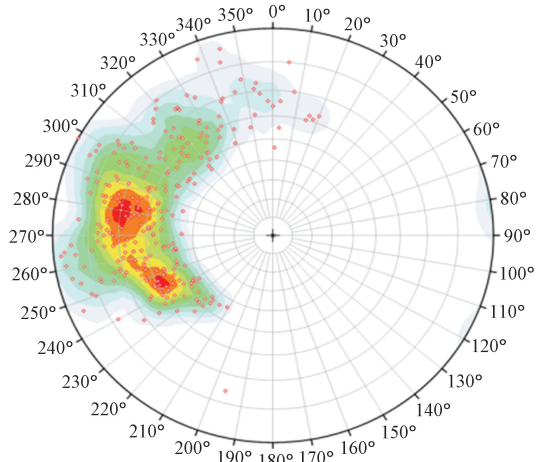
基于表 6 可以得出最小 BIC 所得到的拟合最好的 Copula 函数是 Gumbel Copula 函数,边缘分布同上,图 5(a)和图 5(b)产状极点赤平投影图是 BIC 所得到的拟合最好的 Copula 函数 Gumbel Copula 函数模拟得到。

需要说明的是图 2 ~ 图 5 中所示颜色越深代表结构面密度越大,裂隙产状越集中,反之,裂隙产状越分散。

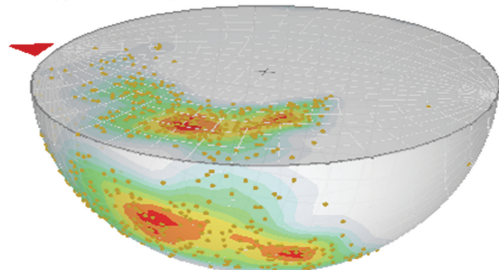
表 5 不同 Copula 函数的 AIC 值

Table 5 AIC values for differnet Copula functions

| Copula 函数 | AIC 值 |
|-----------|----------|
| Gaussian | 1.537 2 |
| Gumbel | -0.753 2 |
| Frank | 1.795 5 |
| Clayton | 2.000 0 |
| t-Copula | -1.901 6 |



(a) Gaussian Copula函数模拟的产状数据赤平投影

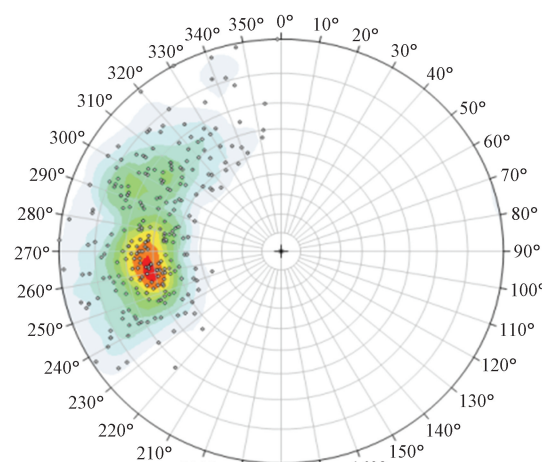


(b) Gaussian Copula函数模拟的产状数据3D赤平极点投影图

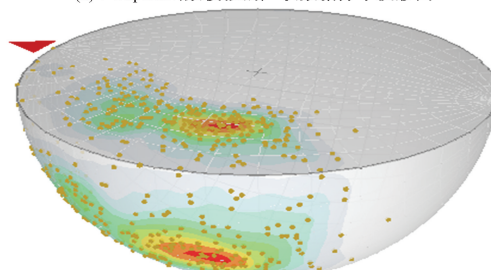
图 3 Gaussian Copula 函数模拟的产状赤平极投影图

($\tau = 0.06$)

Fig. 3 Gaussian Copula function simulation of the occurrence of erespan projection ($\tau = 0.06$)



(a) t-Copula函数模拟的产状数据赤平投影图



(b) t-Copula函数模拟的产状数据3D赤平极点投影图

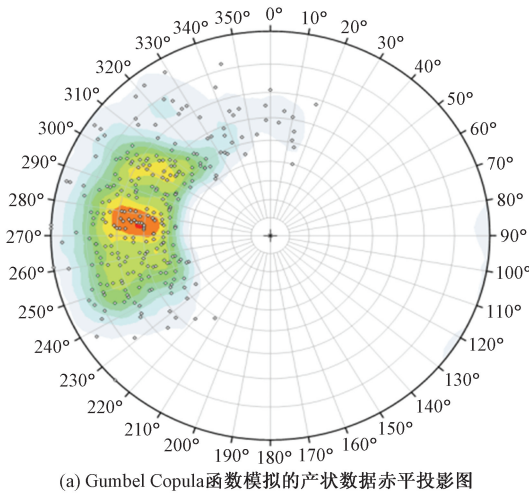
图 4 t-Copula 函数模拟的产状赤平投影图 ($\tau = -0.02$)

Fig. 4 t-Copula function simulation of the occurrence of erespan projection ($\tau = -0.02$)

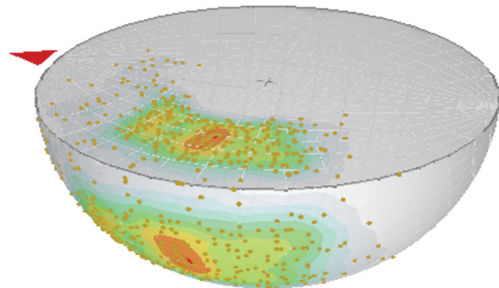
表 6 不同 Copula 函数的 BIC 值

Table 6 BIC values for different Copula functions

| Copula 函数 | BIC 值 |
|-----------|---------|
| Gaussian | 3.507 5 |
| Gumbel | 1.217 1 |
| Frank | 3.765 8 |
| Clayton | 3.970 3 |
| t-Copula | 2.039 0 |



(a) Gumbel Copula函数模拟的产状数据赤平投影图



(b) Gumbel Copula函数模拟的产状数据3D赤平极点投影图

图 5 Gumbel Copula 函数模拟的产状赤平投影图
($\tau = 0.15$)Fig. 5 Gumbel Copula function simulation of the occurrence of erespan projection ($\tau = 0.15$)

倾角和倾向数据通过 MATLAB 编程生成数据的直方图以及自动化计算其 AIC 值。表 4 ~ 表 6 分别列出了上述 5 种 Copula 函数的对应的 d^2 、AIC 和 BIC 值,表 2 列出了 8 种不同边缘分布类型的 AIC 值。如 AIC 值基本准则可得所选案例的倾角考虑到与实际工程相契合,模拟的参数样本数量应该远多余实测数量,所以在本文的工程案例里设置模拟样本数量为 300,但是在模拟过程中会存在不符合要求的目标产状,分析其主要原因可能是数据质量问题,在对产状数据进行动态类聚的工程中产生误差;以及随机性问题,产状模拟方法包含随机性因素,结果可能会有一定的随机波动,如果模拟次数较少或随机性影响较大,也可能导致不符合目标的产状。因此在四舍五入后数量可能不足 300。

将 3 种拟合指标下模拟得到的产状赤平投影图分别与实测数据下的赤平投影图,可以得出 Gaussian Copula 函数模拟得到的产状数据与实测数据最为吻合,对比 t-Copula 函数以及 Gumbel Copula 函数模拟的数据,Gaussian Copula 函数模拟的数据更加集中,离散性更小。因此,就本文中案例而言,基于最小平方欧式值得到的 Gaussian Copula 函数更能合理地表征倾角与倾向间的相关性。

相反,选择不当的拟合指标可能导致选择不准确的 Copula 函数,从而使模型无法准确地捕捉数据的相关结构和特征;不适当的拟合指标可能导致拟合模型与真实数据之间存在较大的误差,使得模型的预测能力和解释能力下降。

7 结论

提出了选取最优 Copula 函数模拟结构面产状的 3 种拟合指标,并给出了应用 Copula 函数模拟结构面互相关产状的基本流程,通过工程案例,比较了不同拟合指标所选的 Copula 函数在模拟结构面产状的有效性,得出如下结论。

(1)最小平方欧式、AIC 和 BIC 信息准则 3 种拟合指标所选取的最优 Copula 函数均可以模拟结构面产状,但是 Gaussian Copula、t-Copula、Gumbel Copula 3 种函数下建立的产状模型对比实测数据的模型可以发现,只有基于最小平方欧氏距离值得到的 Gaussian Copula 函数拟合的二维联合概率分布函数可以较好地反映岩体结构面产状互相关统计特性,并且与原始产状实测数据对比比较吻合。因此在应用 Copula 函数分析相关性时需要合理选择 Copula 函数的识别准则,精确表征参数间相关性。在本文研究中采用 Dips 软件绘制产状赤平投影图,Dips 不仅提供了基本的产状赤平绘制功能,还丰富的统计和分析工具,如频数分析、密度等值线分析等,提供高质量的三维和二维的可视化效果图。

(2)若结构面倾角和倾向之间存在负相关时,Copula 函数仍可以较好地模拟产状,如上文中的 t-Copula 函数。而 Gaussian Copula、Gumbel Copula 这两个 Copula 函数在描述倾角和倾向相关性上为正相关,因此 Copula 函数可以有效模拟参数间的正负相关性。

(3)通过本文工程案例可以得出,在不同的拟合指标下对 Copula 函数模拟产状的效果产生较大影响。不同的拟合指标不仅会对参数边缘分布类型产生影响,同时对 Copula 函数的选择也产生较大差异,并且在用于 AIC 或 BIC 选择边缘分布类型时,其边缘分布同样影响 Copula 选择。因此在选用

Copula 函数时,应选择恰当的拟合指标。Copula 函数方法可以摆脱传统联合分布模型的限制,不需要随机变量具有相同的边缘分布类型,构造更加灵活。

(4)考虑到应用 Copula 函数上升二维以上时难以解决复杂的数学问题,因此,本文研究仅考虑了两个参数的互相关性,而节理岩体不连续面还存在迹长、间距等其他参数,它们之间都存在一定的互相关性。Copula 函数方法在表征参数间相关性上具有显著优势,如可选类型多、Vine Copula 函数能够有效表征高维参数等,因此,基于 Copula 函数方法模拟结构面几何参数的互相关性还有待深入研究。

参 考 文 献

- [1] 杨梓枫,夏华宗,杜玉芳,等. 基于产状 Fisher 分布的岩石节理最小样本容量确定方法[J]. 河北地质大学学报, 2024, 47(1): 22-28.
Yang Zifeng, Xia Huazong, Du Yufang, et al. A method for determining the minimum sample size of joints based on fisher distribution of orientation[J]. Journal of Hebei Geo University, 2024, 47(1): 22-28.
- [2] Shamekhi E, Tannant D D. Probabilistic assessment of rock slope stability using response surfaces determined from finite element models of geometric realizations[J]. Computers and Geotechnics, 2015, 69: 70-81.
- [3] 王双,陈征宙,吴强等. 基于节理产状不确定性的边坡稳定性及敏感度分析[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(2): 348-354.
Wang Shuang, Chen Zhengzhou, Wu Qiang, et al. Stability and sensitivity analysis of slopes based on uncertainty of joint orientations[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 35(2): 348-354.
- [4] 靖盼盼. 岩体结构面几何特征参数统计及三维模型研究[D]. 南京: 南京大学, 2021.
Jing Panpan. Study on geometric characteristic parameters of discontinuity and research on 3D model of rock mass[D]. Nanjing: Nanjing University, 2021.
- [5] 陈剑平. 三维网络结构岩体力学架构与展望[J]. 工程地质学报, 2022, 30(1): 21-36.
Chen Jianping. Framework and expectation of three dimensional network structural rock mechanics[J]. Journal of Engineering Geology, 2022, 30(1): 21-36.
- [6] 姚荣文,张云辉,赵晓彦,等. 岩体裂隙三维可视化新方法及其应用[J]. 地球科学, 2022, 47(9): 3463-3476.
Yao Rongwen, Zhang Yunhui, Zhao Xiaoyan, et al. A new 3D visualization method for rock mass fractures and its application[J]. Earth Science, 2022, 47(9): 3463-3476.
- [7] 韩伟民,闫相祯,闫怡飞. 川东北嘉四段—嘉五段地层岩石力学参数不确定性研究[J]. 科学技术与工程, 2020, 20(27): 11272-11279.
Han Weimin, Yan Xiangzheng, Yan Yifei. Study on the uncertainty of rock mechanics parameters in the fourth-fifth member of Jialingjiang Formation in Northeast Sichuan[J]. Science Technology and Engineering, 2020, 20(27): 11272-11279.
- [8] 吴琼. 复杂节理岩体力学参数尺寸效应及工程应用研究[D]. 武汉: 中国地质大学, 2012.
Wu Qiong. The mechanical parameters of jointed rock mass: scale-effect research and its engineering application[D]. Wuhan: China University of Geosciences, 2012.
- [9] 唐小松. 基于 Copula 理论的岩土体参数不确定性建模与可靠度分析[D]. 武汉: 武汉大学, 2018.
Tang Xiaosong. Uncertainty modeling of correlated geotechnical parameters and reliability analysis using copulas[D]. Wuhan: Wuhan University, 2018.
- [10] 占洁伟. 复杂岩体结构的几何特征精细描述方法研究[D]. 长春: 吉林大学, 2020.
Zhan Jiewei. Research on fine descriptive method of geometric characteristics of complex rock mass structures[D]. Changchun: Jilin University, 2020.
- [11] 李立辰,吴文兵,杨松,等. 基于表征分形维数的结构面产状分组效果评价方法及应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2018, 37(7): 1641-1648.
Li Lichen, Wu Wenbing, Yang Song, et al. An evaluation method of clustering results of discontinuity orientation based on the representative fractal dimension and its application[J]. Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering, 2018, 37(7): 1641-1648.
- [12] 欧阳苏. 节理岩质边坡结构面参数概率分布更新及可靠性分析[D]. 南昌: 南昌大学, 2023.
Ou Yangsu. Updating of probability distributions of structural plane parameters and reliability analysis of jointed rock slopes [D]. Nanchang: Nanchang University, 2023.
- [13] 王述红,张紫杉,王存根,等. 岩体结构面产状随机分布空间表征[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2017, 38(1): 121-125.
Wang Shuhong, Zhang Zishan, Wang Cungen, et al. Stochastic spatial characterization of structural plane occurrence in rockmass [J]. Journal of Northeastern University(Nature Science Edition), 2017, 38(1): 121-125.
- [14] Koay G C. A simple scheme for generating nearly uniform distribution of antipodally symmetric points on the unit sphere[J]. Journal of Computational Science, 2011, 2(4): 377-381.
- [15] Christopher B. An antipodally symmetric distribution on the sphere [J]. The Annals of Statistics, 2007, 2(6): 1-9.
- [16] 王晓磊,王浠铭,阎卫东,等. 基于 Copula 函数的水平和竖向地震动强度参数相关性分析[J]. 工程力学, 2023, 40(5): 79-92.
Wang Xiaolei, Wang Ximing, Yan Weidong, et al. Correlation analysis of intensity measures of horizontal and vertical ground motions based on copula function [J]. Engineering Mechanics, 2023, 40(5): 79-92.
- [17] 蒋水华,欧阳苏,郑俊,等. 岩体不连续面互相关产状模拟的 Copula 函数方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2022, 41(7): 1427-1439.
Jiang Shuihua, Ou Yangsu, Zheng Jun, et al. A Copula method for modeling the cross-correlated orientations of rock mass discontinuities[J]. Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering, 2022, 41(7): 1427-1439.
- [18] Yurui Fan, Guohe Huang, Yin Zhang, et al. Uncertainty quantification for multivariate eco-hydrological risk in the Xiangxi River

- within the Three Gorges Reservoir Area in China[J]. *Engineering*, 2018, 4(5): 617-626.
- [19] 陈建兵,陶金聚,任晓丹,等. 基于 Copula 理论的混凝土受压本构全曲线参数相关性研究[J]. *土木工程学报*, 2020, 53(7): 52-63.
Chen Jianbing, Tao Jinju, Ren Xiaodan, et al. Research on the dependence between parameters in complete stress-strain constitutive curve of concrete based on copula theory[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2020, 53(7): 52-63.
- [20] 孙杰涛,李海枫. 基于多元数据融合的枢纽区边坡整体安全预警指标研究[J]. *岩石力学与工程学报*, 2024, 43(9): 2242-2256.
Sun Jietao, Li Haifeng. Research on overall safety early warning indicator for hydropower project slopes based on multi-data fusion method[J]. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 2024, 43(9): 2242-2256.
- [21] Zhang Y, Gomes A T, Beer M, et al. Reliability analysis with consideration of asymmetrically dependent variables; discussion and application to geotechnical examples[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2019, 185: 261-277.
- [22] Charles W W N, Chuan X Q, Raymond W M C, et al. Risk assessment of soil slope failure considering copula-based rotated anisotropy random fields[J]. *Computers and Geotechnics*, 2021, 136. DOI: 10.1016/j.compgeo.2021.104252.
- [23] 陈将宏,许晓亮,郭飞,等. 抗剪强度参数相关变量重构及 Copula 联合分布模型研究[J]. *科学技术与工程*, 2017, 17(1): 280-284.
Chen Jianghong, Xu Xiaoliang, Guo fei, et al. Reconstruction of the shear strength parameters correlation variable and the study on the joint distribution model of Copula[J]. *Science Technology and Engineering*, 2017, 17(1): 280-284.
- [24] Sklar A. Fonctions de répartition à dimensions et leurs marges[J]. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 1959, 8: 229-231.
- [25] Nelsen R B. An introduction to copulas[M]. 2nd ed. New York: Springer, 2006.
- [26] 王望,朱金,康锐,等. 基于 Vine Copula 函数的风浪要素联合概率分布模型[J]. *土木与环境工程学报(中英文)*, 2023, 45(4): 83-93.
Wang Wang, Zhu Jin, Kang Rui, et al. Joint probability distribution model of wind and wave with Vine Copula function[J]. *Journal of Civil and Environmental Engineering*, 2023, 45(4): 83-93.
- [27] 刘明旭,姚国文,彭刚辉,等. 基于 Copula 模型的多维地震动参数相关性分析[J]. *科学技术与工程*, 2024, 24(8): 3096-3106.
Liu Mingxu, Yao Guowen, Peng Ganghui, et al. Correlation analysis of multi-dimensional ground motion intensity parameters based on copula theory[J]. *Science Technology and Engineering*, 2024, 24(8): 3096-3106.
- [28] 吕天健. 基于 Copula 理论的岩土体参数多维联合分布模型构建与概率转换模型研究[D]. 武汉: 武汉大学, 2022.
Lu Tianjian. Multivariate distribution and probabilistic transformation models for multiple geotechnical parameters using copulas[D]. Wuhan: Wuhan University, 2022.
- [29] 杨超,黄达,张永兴等. 基于 Copula 理论的岩体抗剪强度参数估值[J]. *岩石力学与工程学报*, 2013, 32(12): 2463-2470.
Yang Chao, Huang Da, Zhang Yongxing, et al. Estimation of shear strength parameters of rock mass based on Copula[J]. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 2013, 32(12): 2463-2470.
- [30] 张蕾. 基于 Copula 函数的岩土体抗剪强度参数二维分布模型研究[D]. 武汉: 武汉大学, 2018.
Zhang Lei. Bivariate distribution of shear strength parameters of soils and rocks using copula[D]. Wuhan: Wuhan University, 2018.
- [31] 贾洪彪,唐辉明,刘佑荣,等. 岩体结构面三维网络模拟理论与工程应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
Jia Hongbiao, Tang Huiming, Liu Yourong, et al. Theory and engineering application of 3D network modeling of discontinuities in rock mass[M]. Beijing: Science Press, 2008.